

关于太阳系中大星体间 优化飞行的初步理论探讨

GUANYU TAIYANGXI ZHONG DAXINGTI JIAN
YOUHUA FEIXING DE CHUBU LILUN TANTAO

竺苗龙 竺雪君 著



关于太阳系中大星体间 优化飞行的初步理论探讨

竺苗龙 竺雪君 著

 中国宇航出版社
· 北京 ·

内 容 简 介

本书为关于航天力学中优化理论研究的学术专著,主要提出了一种太阳系中大星体间优化飞行的新方法。具体讲就是在太阳系中飞行时各子弧如何优化设计及如何优化拼接。

全书共5章,分别为:引论;绕地飞行航天器的最佳发射轨道理论;返回中的一个优化问题;有关小推力轨道;关于太阳系中大星体间的优化飞行初步探讨。书中所论述的内容全部来自作者及其合作者多年的科研成果。

本书可供从事航天器发射轨道研究的航天科学技术工作者阅读,也可作为高等院校和研究机构相关专业的研究生教学参考书。

版权所有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

关于太阳系中大星体间优化飞行的初步理论探讨 /
竺苗龙,竺雪君著. -- 北京:中国宇航出版社,2015.4
ISBN 978-7-5159-0913-4

I. ①关… II. ①竺… ②竺… III. ①航天器—飞行
控制 IV. ①V448.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 068416 号

责任编辑 赵宏颖

责任校对 祝延萍

封面设计 文道思

出 版 发 行 中国宇航出版社

社 址 北京市阜成路 8 号 邮 编 100830
(010)68768548

网 址 www.caphbook.com

经 销 新华书店

发行部 (010)68371900 (010)88530478(传真)
(010)68768541 (010)68767294(传真)

零售店 读者服务部 北京宇航文苑
(010)68371105 (010)62529336

承 印 北京国中国画印刷有限公司

版 次 2015 年 4 月第 1 版
2015 年 4 月第 1 次印刷

规 格 787×1092

开 本 1/16

印 张 8.5

字 数 243 千字

书 号 ISBN 978-7-5159-0913-4

定 价 65.00 元

本书如有印装质量问题,可与发行部联系调换

前 言

近几十年来，太阳系中的金星、火星等八大行星以及小行星、行星的卫星、彗星甚至太阳本身等人们都已探测过，有的还探测过多次，更惊人的是实现了载人登月。这些飞行，除了少数是利用甩摆技术（即引力效应）或霍曼转移外，其他基本上都是用大推力化学火箭的一般飞行。

如何既要安全地到达目标，又要考虑能量或费用最省（例如探月等），或者时间最短（例如探测火星等），或者两者都要考虑，等等，这就是这本小书要介绍的太阳系中的优化飞行了。

为了进行太阳系中的优化飞行，我们把《绕地飞行航天器最佳发射轨道理论及其他问题的研究》中的有关理论扩展到太阳系中大星体间飞行上，从而形成了一个太阳系中大星体间优化飞行的新方法。小星体的探测则另当别论。原则上讲这个方法对探测太阳系中任一大星体的优化飞行都可用，包括探测大星体的卫星等。而且对人们熟知的甩摆技术也有用，起码是甩摆技术的首尾两段都可用此方法从而更提高甩摆技术的效益。至于甩摆飞行中的中间部分则要具体问题具体分析。

反过来，甩摆技术对上述方法也有用，例如用此新方法去探测木星或者土星等，中间就可利用火星等的引力作用。探测大星体的卫星时，若也利用一下引力效应，则效果也可能会更好。再则若先从地球出发探测金星，然后转向地球而充分利用地球的引力效应再去探测火星等，这样地球本身也成为甩摆技术的一个角色了。各种甩摆，五花八门。

所以这个新方法跟甩摆技术在太阳系中的优化飞行中的应用，它们各有千秋，可以互相补充，好好结合。当然有的场合，例如探月，那只能用我们搞的新方法。而从地球飞向目标星体时中间其他星体越多，则甩摆技术的优越性越能体现。

上面基本上都是对大推力的火箭而言的。

如果考虑小推力火箭飞行，例如电火箭的飞行，虽然载人登月由于相对大推力火箭来说时间太长，故至今未被采用过；但载货及探测其他行星等，例如探测土星等，那么由于小推力火箭加速时间长，从而速度也就可以达到较大，这样它就可能比大推力的化学火箭还要早到土星等星体，如果再充分利用太阳能及引力效应（如果有条件的话）等，那么效益就会更好。所以小推力火箭的飞行情况，在太阳系的优化飞行中也是可以考虑的。而且我们的小推

力火箭飞行轨道（即本书介绍的小推力火箭飞行轨道）都是从椭圆停泊轨道上起飞的，这与以前的都从圆停泊轨道上起飞不同，因为圆停泊轨道是椭圆停泊轨道的特例，所以我们考虑的是更一般的情况。

本书着重介绍的就是我们上面提到的把《绕地飞行航天器最佳发射轨道理论及其他问题的研究》中的有关理论扩展到太阳系的飞行中而建立起来的一种太阳系中优化飞行的新方法，以及从椭圆停泊轨道上起飞的小推力火箭的飞行情况，当然也讲到这种新方法在人们熟知的甩摆技术（即引力效应）中的应用，以及它们两者之间的关系。至于行星际的霍曼转移等，大家很熟，故只在第5章中简单提到和比较。

这个新方法效益会如何？我们这样考虑的小推力火箭飞行是不是比前人考虑的更好些，等等，这些都要请同行特别是同行中的前辈多多指教。

最后，我们要说本书所有内容（包括本书介绍的小推力飞行）除个别特殊声明（例如甩摆技术）之外，都是我们自己完成的科研成果，读者若发现有别人在我们论文发表之前已发表有关论文，请及时指出来，以便我们再版时修正。

作 者

2014年6月于青岛大学

目 录

第 1 章 引论	1
1.1 关于绕地飞行航天器最佳发射轨道的理论	1
1.2 关于返回中的优化	3
1.3 关于太阳系中的优化飞行	3
第 2 章 绕地飞行航天器的最佳发射轨道理论	6
2.1 引言	6
2.2 发射人造地球卫星的最佳轨道 (I)	9
2.3 一些有关性质的证明	16
2.4 发射人造地球卫星的最佳轨道 (II)	24
2.5 发射人造地球卫星的最佳轨道 (III)	29
2.6 $\min(v_0 + \Delta v)$ 随 r_0 变化的情况	34
2.7 指标是 $f = v_0 + \Delta v + A$ 时, 双曲轨道和抛物轨道等作为惯性段的排除和直接进入等	37
2.8 发射地球静止轨道卫星的最佳轨道 (I)	40
2.9 发射地球静止轨道卫星的最佳轨道 (II)	45
2.10 一个关于最佳发射轨道的实例	47
2.11 例子分析 (1)	56
2.12 例子分析 (2)	60
2.13 一般情况下停泊式整体最佳发射和三段式整体最佳发射及其比较	62
2.14 R^* 与 r_0^* 的关系	66
2.15 特殊的停泊轨道和转移轨道及其应用	68
2.16 三种模型下结果的异同	71
2.17 本章初步总结	74
第 3 章 返回中的一个优化问题	80
3.1 飞船返回时一个有关轨道的优化问题	80
3.2 一些有关性质的证明	84

第 4 章 有关小推力轨道	89
4.1 从初始椭圆轨道起飞的恒定径向横向小推力飞船轨道	89
4.2 从椭圆轨道上起飞的恒定切向小推力飞行问题	99
第 5 章 关于太阳系中大星体间的优化飞行初步探讨	111
5.1 关于太阳系中的优化飞行 (1)	111
5.2 关于太阳系中的优化飞行 (2)	115
5.3 关于太阳系中的优化飞行 (3)	119
5.4 关于太阳系中的优化飞行 (4)	121
参考文献	127
后 记	128

第1章 引论

这本小书共分5章:第1章是引论,第2章是绕地飞行航天器最佳发射轨道的理论,第3章是返回中的一个优化问题的解决,第4章是有关小推力飞行轨道,第5章是关于太阳系中大星体间优化飞行的初步探讨。

前言已说,对于太阳系中星体的探测,人们已进行了几十年。不但对各大行星都多次探测过,甚至连彗星、小行星、有些行星的卫星及太阳本身等也都进行过多次探测,更惊人的是还实现了载人登月。这些飞行,除了甩摆飞行或霍曼转移外,基本上都是一般的飞行。

而这本小书要探讨的却是优化飞行,即不但要求到达预定目标,而且要使能量最省(例如探月),或者时间最短(例如探测火星等),或者两者兼顾等等。

但是太阳系中的任何优化飞行都是从地球开始的。所以绕地飞行的优化问题必须先加以考虑。

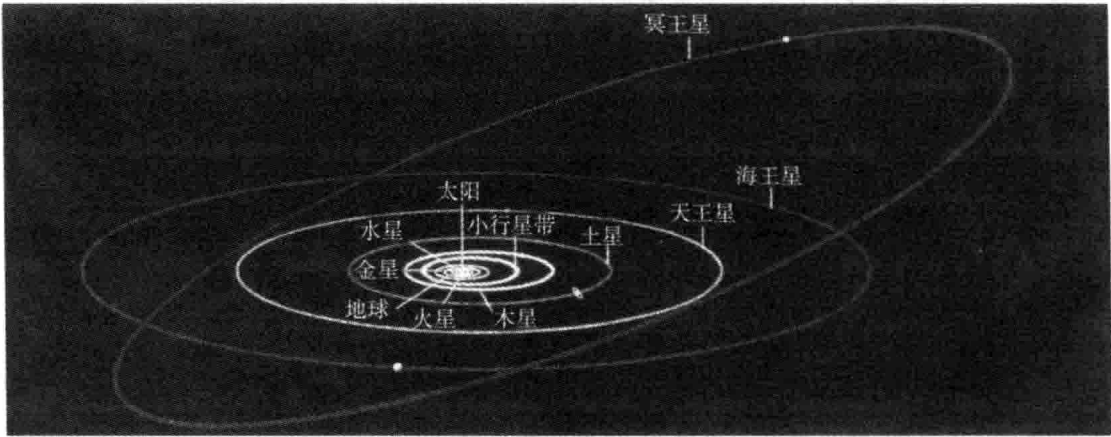


图 1-1 太阳系行星和冥王星的轨道图

从内向外,太阳、水星(Mercury)、金星(Venus)、地球(Earth)、火星(Mars)、小行星带(Asteroid Belt)、木星(Jupiter)、土星(Saturn)、天王星(Uranus)、海王星(Neptune)和冥王星(Pluto)

1.1 关于绕地飞行航天器最佳发射轨道的理论

绕地飞行航天器,其轨道当然是椭圆轨道(包含圆,以下不重复)。

对于一个给定的目标椭圆轨道而言,其发射轨道可以是停泊式、三段式或直接进入。因为直接进入可以作为三段式发射的特殊情况,所以人们只要比较三段式发射和停泊式发射的优劣就行。比较后知:三段式发射不但能量也很省,而且有点火次数少等优点,所以三段式发射很重要,当然对控制的要求是高了点。

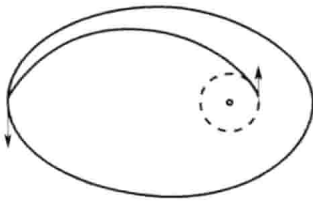


图 1-2 $r_0 \leq r_p$ 时三段式最佳发射

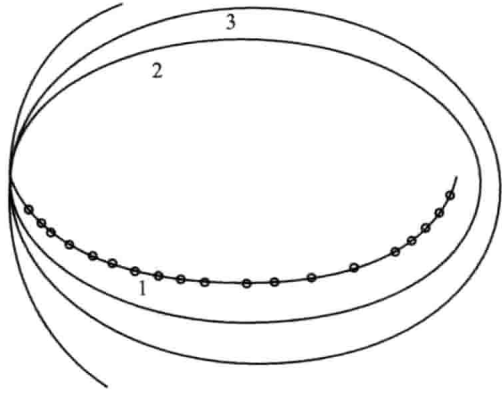


图 1-3 轨道替代示意图

对于三段式的发射有个优化的问题,提法将在第 2 章中详述。

对于三段式的发射还有个更重要的整体优化问题,提法也将在第 2 章中详述。

我们把三段式发射的整体优化的 r_0 记为 r_0^* ,当然它对应的实际上是 (r_0^*, α^*, V_0^*) 这三个参数。

对于停泊式发射也有个优化问题,提法也将在第 2 章中详述。

对于停泊式发射也有个更重要的整体优化问题,提法也将在第 2 章中详述。

我们记停泊式发射的整体优化 R 为 R^* 。

计算表明,若记目标椭圆轨道的近点距为 r_p ,远点距为 r_A ,那么 r_0^* 往往有 $r_0^* + R_0 < r_p$,此时我们可得到 $r_0^* = R^*$ 这个结论。但从理论上讲,若 r_0^* 不是 $r_0^* + R_0 < r_p$,那么 r_0^* 与 R^* 就不一定有 $r_0^* = R^*$ 这个关系。这里 R_0 是地球的半径。

另外,第 2 章中还有一个仿真的例子。

这个例子是针对静止轨道的一个转移轨道,其 $r_p = (500 + R_0)$ km, $r_A = (30\,000 + R_0)$ km。

对于这么一个转移轨道,我们当然可以进行整体最佳发射。书中告诉我们此时: $r_0^* + R_0 < r_p$ 。

然后我们用 $r_0^* + R_0 = r_p, r_A = r_A$ 作为一个新的转移轨道,而且直接从 r_0^* 处进入该新轨道,那么这个新的转移轨道显然要比原转移轨道好。

这个方法在太阳系的优化飞行中设计第 1 子弧时常要用到。

这与在绕地飞行时不同,那时对给定的目标椭圆轨道整体最佳发射时,其整体最佳的 r_0^* 常常有 $r_0^* + R_0 < r_P$ 。

1.2 关于返回中的优化

第3章中介绍的返回中的优化,是对从地外天体返回地球而言的。

显见这个成果对探测月球、探测火星等,不管是绕它们飞行也好,登陆也好,也都可用(当然有关数值会有变化)。

书中讨论时考虑的首要指标是能量最省,实际上此时时间是放在第2位的。但返回可能是双曲线轨道返回,也可能是抛物轨道返回,也可能是椭圆轨道返回。

如果考虑的是时间最省,例如人们在探测火星时就希望往返时间最省,这时不但开始子弧采用双曲线子弧,中间子弧要采用双曲线子弧,最后子弧也希望是双曲线子弧。这就有可能在最后子弧的开始时也要加速,这样就把时间最省放在第一位,而把能量最省放在第二位了。

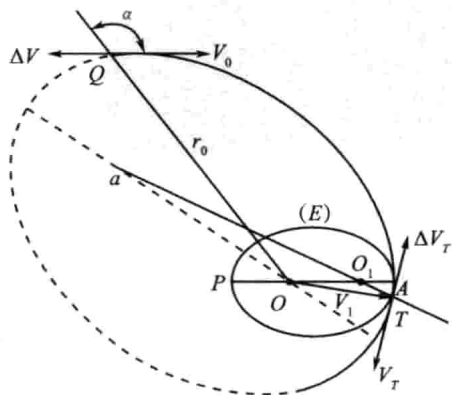


图 1-4 返回优化模型

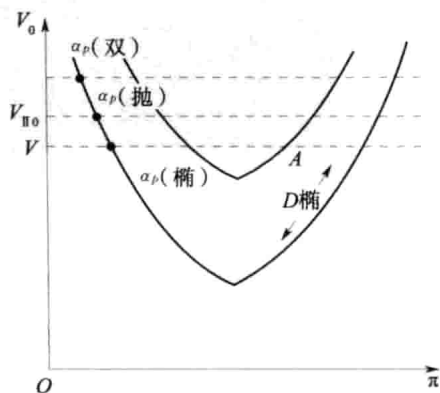


图 1-5 返回优化分析

1.3 关于太阳系中的优化飞行

本书第4章是关于小推力轨道,第5章是太阳系中优化飞行的初步探讨。

例如探测月球。

按引力球理论,我们先用第2章内容来设计第1子弧。实际上是半个椭圆, r_A 是远点距,要求 r_A 在月球引力球内,而且其位置、速度方向等也都要符合要求(参见阿波罗登月图)。

然后我们按引力球理论,用第3章的内容来设计第2子弧,让其进入绕月轨道或登月。

然后根据有摄限制三体问题的理论,进一步进行计算。如果 r_A 及其对应的基本参数变化不大,那就不必调整发射第 1 子弧的基本参数。否则,则要调整发射第 1 子弧的基本参数。对于这个调整后的椭圆轨道而言,又有一个整体最佳发射方案,从而产生了新的基本参数。

然后按第 1 子弧的新的参数发射(如果旧的基本上也合适,这时看做新旧一样),显见这时的 r_A 对应的第 1 子弧及其以后的子弧就构成了一条新的基本轨道。当然在第 2 子弧的开始时,有时作一些必要的修正也是需要的。

然后按书上讲的多选几条新的基本轨道,就可基本上确定登月时的整体最佳轨道。

实际操作这条基本上整体最佳轨道的情况,基本上就是如此。详细情况,正文中会介绍。甚至包括不共面情况。

大推力火箭探测火星的情况详细见正文,那里还讲探测太阳系中的其他星体及甩摆方法等。

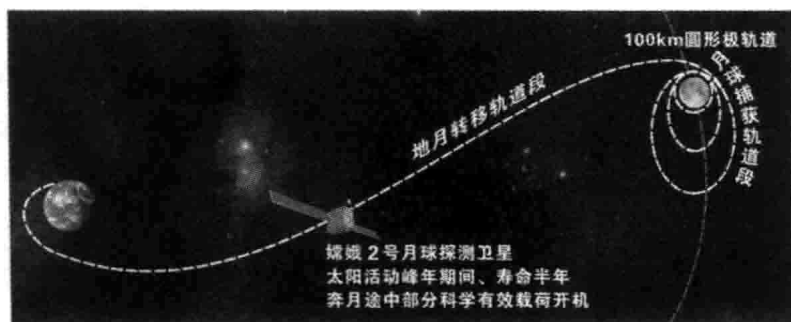


图 1-6 嫦娥 2 号飞行示意图

读者如果对第 2、3、4 章的内容比较熟悉了,另外则要对天体力学的有关知识,例如 2 体问题、3 体问题等多体问题及受摄限制多体问题等及其有关数值计算的方法要比较熟悉(例如学一下有关天体力学及深空探测等方面的著作),有了这些条件,阅读这本小书其他内容,包括引论,就会比较容易。

当然,第 2、3 章内容,对甩摆技术也是有用的,例如开始和结尾都可应用。至于中间部分,则要具体问题具体分析。此外,除了图示的甩摆外,还有先从地球飞向金星,然后用地球引力飞向火星;还有用月球引力的甩摆,等等。

我们提出的优化方法在探月、探测火星和金星等方面显然效果明显,但在探测水星、土星、木星等方面,用一下甩摆技术显然更好。2 种方法各有千秋,我们要好好把握,甚至将它们结合使用。

总之,本小书的主要内容是对太阳系中的优化飞行提出我们的新方法,实际效果会如何,要由实践来检验。因为实践是检验真理的唯一标准。

另外,前言已说:用电火箭等作小推力飞行,虽然载人探月时不会采用(不载人当然可考

虑),因为相对于现在火箭飞行来回时间小推力飞行时间就太长了。但在探测火星等星体行星际飞行时,能不能采用?就可考虑。因为小推力飞行时其加速时间长,从而使速度大大增加。这就有可能在长距离飞行时,它比大推力的化学火箭(推进剂量有限)更早地到达火星等星体。如果中间再充分利用太阳能、引力效应(如果可能的话)等,那效果当然会更好。至于小推力飞行中的子弧拼接问题,第5章中也会叙述。

以后人们会不会想出其他甚至更好的太阳系中优化飞行的方法来,我们认为是大有可能的,因为科学是在不断发展的。另外请注意:我们的小推力飞行是在椭圆停泊轨道上起飞的,圆停泊轨道上起飞的情况是它的特例,所以它更一般。

第2章 绕地飞行航天器的最佳发射轨道理论

2.1 引言

1962年,钱学森先生出版了《星际航行概论》一书。在该书中,他在国内首先提出了关于人造地球卫星的最佳发射轨道问题,并且对目标轨道为圆周轨道的情况建立了一个简单的数学模型。

首先,把人造地球卫星的发射轨道分为图2-1所示的三段。

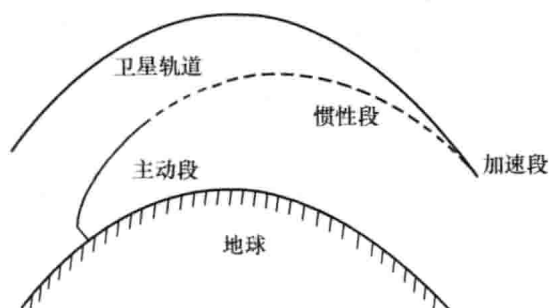


图 2-1 三段式发射轨道示意图

其次,作如下假设:对于熄火点 r_0 而言,若其对应的速度为 v_0 ,那么从地面起飞到熄火点 r_0 处,由大气阻力引起的速度损耗 A_2 和由地球引力引起的速度损耗 A_1 之和为常数。

对某个给定的 r_0 而言,若记 $A_1 + A_2 = A$,那么钱学森先生解决他提出的那个问题的指标函数就是

$$f = v_0 + \Delta v + A$$

这就是说,对于一个给定的目标轨道,我们如何分配 v_0 及 Δv ,使卫星切向进入目标轨道且使指标函数 f 之值为最小?

他考虑的是一个圆周轨道。他充分利用圆周轨道这个特征,简洁而巧妙地解决了这个问题。答案很漂亮,如图2-2所示。

那么我们做了些什么呢?

首先,对于给定的某一常数 r_0 而言,若到此 r_0 处由空气阻力所引起的速度损耗和由地球引力所引起的速度损耗之和还是某一常数 A ,但我们把目标轨道扩大到椭圆轨道(当然结

论可用于圆周目标轨道)。

其次,若给定目标椭圆轨道的近地点的距离是 r_P , 而远地点的距离是 r_A , 那么我们这里的 r_0 可以是 $r_0 \leq r_P$, 也可以是 $r_P < r_0 < r_A$ 及 $r_0 \geq r_A$ 。在 r_0 满足

$$R + 100 \text{ km} \leq r_0 \leq 300 \text{ km} + R$$

情况下,就有可能碰到上述三种情况,那更不用讲关于 r_0 的其他情况了(其中 R 为地球半径)。

这就是说,对于这种已扩大意义下的 r_0 而言,若目标轨道为椭圆轨道,发射人造地球卫星的最佳轨道此时又是什么?

其实,对于给定的 r_0 而言,若目标轨道为一般的二次曲线轨道,这时的最佳发射轨道问题显然也可像本章所述的那样类似地去探讨,当然那时已不是发射人造地球卫星了,而是发射人造行星等。

为了叙述方便,本章仅限于讨论目标椭圆轨道,对于其他情况有兴趣的读者可自己去推算。

对发射轨道的惯性段,我们也不仅仅局限在椭圆轨道情况,而是把它扩大到一般二次曲线轨道的情况。

为此我们也建立了严格的数学模型。

这个模型计算比较繁,但每一步都是严格的,而且得到的结果也比较多。

例如当 $r_0 \leq r_P$ 时,我们得到了此时的最佳发射轨道(见图 2-3),而且证明了此时双曲轨道和抛物轨道都不能作为最佳发射轨道的惯性段。

如果一个圆周轨道的半径为 $\bar{R}$, $r_P < \bar{R} < r_A$, 那么这个圆周轨道到这个椭圆轨道的最佳双切向过渡轨道是一个双外切的椭圆轨道。但在最佳发射轨道问题里,如果指标是

$$f = v_0 + \Delta v + A$$

那么这时的最佳发射轨道是双内切椭圆轨道(如图 2-4),这与轨道过渡问题的区别就明显地表示出来了。

对于 $r_P < r_0 < r_A$ 及 $r_0 \geq r_A$ 的情况(见图 2-5),它们的最佳发射轨道,按我们的模型严格地证明,此时的双曲轨道和抛物轨道也都不能作为最佳发射轨道的惯性段;这些结论也是很有意义的。

此外,从上已知:

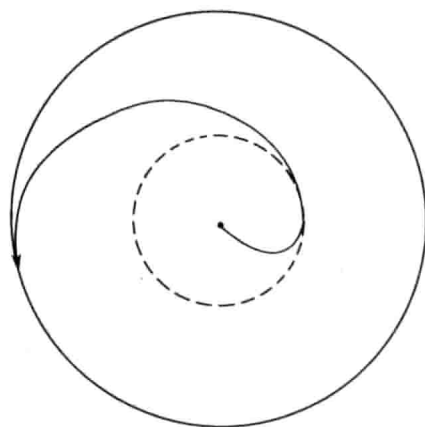


图 2-2 目标轨道为圆周轨道时
最佳发射轨道示意图

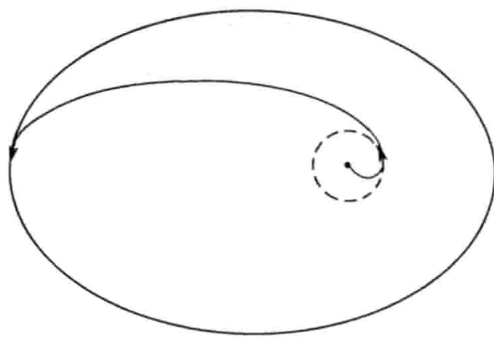


图 2-3 $r_0 \leq r_P$ 时最佳发射轨道示意图

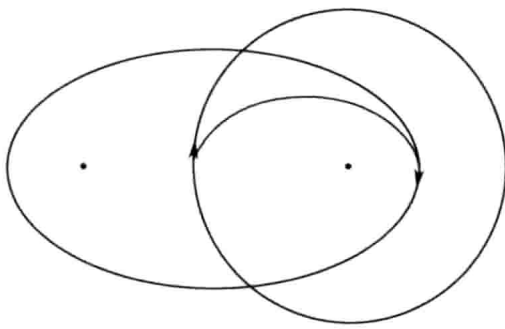


图 2-4 $r_p < r_0 < r_A$ 时最佳发射轨道示意图

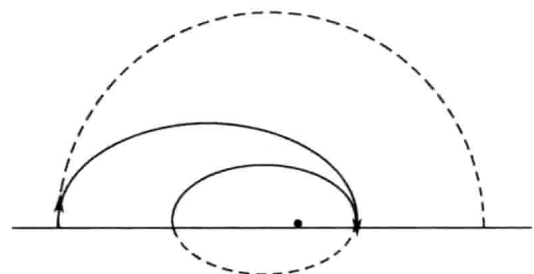


图 2-5 $r_0 \geq r_A$ 时最佳发射轨道示意图

- { 对于一个给定的 r_{01} ,
- { 有一个对应的最佳发射轨道,
- { 从而对应一个最佳的 f 值 f_1 。

同样

- { 给定另一个 r_0 的值 r_{02} ,
- { 又有另一个对应的最佳发射轨道,
- { 从而对应另一个最佳的 f 值 f_2 。

.....

现在要问,如果不改变推力但 r_0 允许变化,那么这个最佳的 f 值即 $f_{\min}$ 随 r_0 到底如何变化?

再推广一点,如果推力也可改变或选择,我们又如何考虑?

再则,我们知道指标函数是

$$f = v_0 + \Delta v + A$$

如果不考虑 A ,那么 $\min(v_0 + \Delta v)$ 随 r_0 的变化规律我们在本章中也解决了,而且画出了图 2-6 进行示意。

如果考虑 A ,那么对于允许范围内的某一推力值和一个允许的 r_0 ,有一个对应的 $\min(v_0 + \Delta v)$,也有一个对应的 $A(r_0)$,从而有一对应的

$$f_{\min}(r_0) = \min(v_0 + \Delta v) + A(r_0)$$

例如从距地面高度 100 km 到 300 km 之间给出一组 r_0 的值,就 $f_{\min}(r_0)$ 的对应值画出草图。这样不但可看出 $f_{\min}(r_0)$ 随 r_0 如何变化,而且还能看出最佳 r_0 的大致位置。

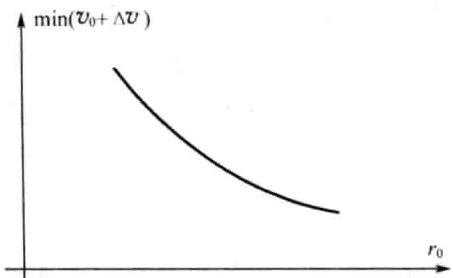


图 2-6 $\min(v_0 + \Delta v)$ 随 r_0 变化示意图(1)

再给几个允许范围内的其他推力值,又重复上面的工作,这样就可大致确定最佳的推力和最佳的 r_0 。

以上叙述是对给定的 r_0 其对应的损耗 $A(r_0)$ 假定是相差不大或者相等而言的。

如果对于一个给定的 r_0 其对应的损耗 $A(r_0)$ 不仅跟 r_0 有关,而且跟 V_0 有关,我们也讨论这种情况的最佳发射轨道问题以及经过停泊轨道发射航天器的轨道优化问题和三段式最佳发射轨道和最佳停泊式发射及直接进入的关系等。

总之,我们在本章将建立起航天器的最佳发射轨道的一个比较完整的理论。

2.2 发射人造地球卫星的最佳轨道(I)

前面已指出:发射人造地球卫星的轨道一般分为三段:一是由地面起飞,冲破大气层,到达一定高度的主动段;二是自由飞行的被动段;三是在卫星目标轨道附近通过冲击使卫星进入目标轨道的短程加速段。最优化的要求是使整个发射过程中火箭的特征速度需要量为最小。分析中通常认为冲击是瞬时的,并且被动段与目标轨道相切于冲击点,因此冲击的方向必须沿着轨道切线。在假定第一主动段结束之前的速度损耗为常量且目标轨道为圆形的条件下,上述问题已经解决,所得的最佳被动段轨道是霍曼式轨道。由本节开始,我们把问题推广到卫星目标轨道为椭圆的情况。

不妨假定目标椭圆轨道的近地点距离是 r_P 而远地点距离是 r_A 。

本节讨论第一段熄火点的地心距离(不妨记为) r_0 小于、等于目标轨道近地点距离 r_P 的情况。对于 $r_P < r_0 < r_A$ 和 $r_0 \geq r_A$ 的情况,将在下面几节中分别讨论。

设卫星的目标椭圆轨道 E 的方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (2.2-1)$$

其中, p 为椭圆的通径; e 为偏心率; p 和 e 均已给定。

此外,限定发射轨道的被动段也是椭圆 E' , 令其方程为

$$r' = \frac{p'}{1 + e' \cos(\theta - \theta_0)} \quad (2.2-2)$$

其中,通径 p' 、偏心率 e' 和 θ_0 都需由相切条件和最优化的要求确定, $|\theta_0|$ 为椭圆 E 和 E' 的长轴间的夹角(见图 2-7)。

假定两椭圆相交于某点,则在交点处有 $r = r'$, 即

$$\frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{p'}{1 + e' \cos(\theta - \theta_0)}$$

从而有

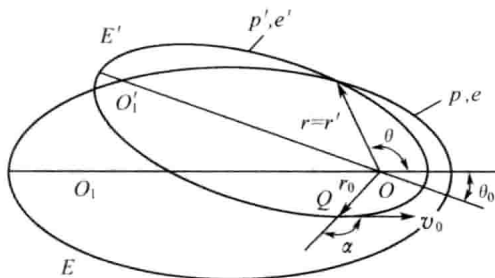


图 2-7 两椭圆相交时

$$p - p' = (p'e - pe' \cos \theta_0) \cos \theta - pe' \sin \theta_0 \sin \theta$$

故有

$$\frac{p - p'}{\sqrt{(p'e - pe' \cos \theta_0)^2 + (pe' \sin \theta_0)^2}} = \frac{p'e - pe' \cos \theta_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \theta - \frac{pe' \sin \theta_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \theta$$

其中

$$A = p'e - pe' \cos \theta_0$$

$$B = pe' \sin \theta_0$$

若令

$$\cos \delta = \frac{p'e - pe' \cos \theta_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.2-3)$$

其中 $\delta \in [0, \pi]$, 那么

$$\sin \delta = \pm \frac{pe' \sin \theta_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.2-4)$$

由于对称, 只需考虑在目标轨道椭圆 E 的上半部相切的情况。显见, 此时的 $\theta_0 \in [-\pi, 0]$, 从而式(2.2-4)中的 $\sin \delta$ 的表达式应取负号, 于是有

$$\cos(\theta - \delta) = \frac{p - p'}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.2-5)$$

相切要求在切点 T 处有

$$\cos(\theta_T - \delta) = \pm 1$$

由于椭圆 E' 内切于椭圆 E 而有 $p' < p$, 故上式右端应取正号, 即在切点处有

$$\theta_T = \delta \quad (2.2-5')$$

若在椭圆 E 的下半部相切, 也可以进行同样的分析。

这样, 由式(2.2-5)可得相切条件

$$[(pe')^2 - 2pp'ee' \cos \theta_0 + (p'e)^2] - (p - p')^2 = 0 \quad (2.2-6)$$

因为 $e' \neq 0$ (这里不考虑圆的情况), 故得

$$\cos \theta_0 = \frac{(pe')^2 + (p'e)^2 - (p - p')^2}{2pp'ee'} \quad (2.2-7)$$