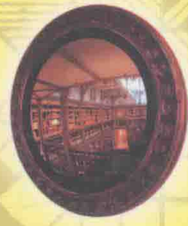

Bulgarian Mathematical Olympiad

保加利亚数学奥林匹克

● [保] 鲍瓦伦库（P.Boyvalenkov）编著

● 隋振林　译

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Bulgarian Mathematical Olympiad

保加利亚数学奥林匹克

● [保] 鲍瓦伦库（P.Boyvalenkov）编著
● 隋振林 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2014－049 号

内容提要

本书汇集了 2003－2006 年保加利亚各级竞赛及选拔赛试题. 本书所有题目均给出了详细的解答过程，且大多数问题的难度与 IMO 及 BMO 试题的难度相同.

本书适合数学竞赛选手和教练员、高等学校相关专业研究人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

保加利亚数学奥林匹克/(保)鲍瓦伦库(Boyvalenkov，P.)编著；隋振林译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014. 10

ISBN 978－7－5603－4857－5

Ⅰ. ①保… Ⅱ. ①鲍… ②隋… Ⅲ. ①数学-竞赛题 Ⅳ. ①O1－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 182617 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress. hit. edu. cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 13.5 字数 247 千字
版 次 2014 年 10 月第 1 版 2014 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978－7－5603－4857－5
定 价 38.00 元

⊙ 本书作者

Dr. Oleg Mushkarov

- 保加利亚科学院数学与信息学院教授，复分析教研室主任.
- 研究方向 复分析、微分几何、磁扭线理论.
- 保加利亚数学联合会会长.
- 数学与信息学院大学生指导员.
- 保加利亚 IMO 领队(1994—1998).
- 保加利亚 BMO 领队(1989—1993).

Dr. Nikolai Nikolov

- 保加利亚科学院数学与信息学院，复分析教研室副教授.
- 研究方向 多变量研究.
- 保加利亚 IMO 副领队(自 2004 年以来).
- 保加利亚 BMO 副领队(1999—2003).
- 保加利亚 BMO 领队(自 2004 年以来).

Dr. Emil Kolev

- 保加利亚科学院信息与数学学院，数学信息基础教研室副教授.
- 研究方向 编码理论、搜索问题.
- 保加利亚 IMO 领队(自 2004 年以来).
- 保加利亚 BMO 领队(1999—2003).

Dr. Peter Boyvalenkov

- 保加利亚科学院数学与信息学院，数学信息基础教研室副教授.
- 研究方向 编码理论、球形编码与设计.
- 保加利亚 BMO 副领队(自 2004 年以来).

⊙ 前言

保加利亚是一个具有悠久数学竞赛传统的国家.大量的地区竞赛与基督教日历的重要日期或保加利亚的历史相关联.这些系列数学竞赛在形式和难度上为所有低年级或高年级的学生提供了检测他们解决问题能力的机会.他们中的绝大多数人已经深深地为这样的竞赛而努力获取新的数学知识所吸引.

在保加利亚最重要的和最有威望的国家竞赛是冬季数学竞赛、春季数学竞赛和国家奥林匹克竞赛.这些赛事的组织机构是由科教部、保加利亚数学联合会以及地区组织共同完成的.竞赛用的试题是由保加利亚数学联合会的专业团队(称为特别课程研究团队)提供的.

冬季数学竞赛 第一次冬季数学竞赛是1982年在城市Russe举行的.自那儿以后,每年的一月底二月初,保持从4年级到12年级大约1 000名学生参加这个竞赛.保加利亚的四个城市Vorna,Russe,Bourgas和Pleven轮流组织竞赛活动.

春季数学竞赛 第一次春季数学竞赛是1971年在城镇Kazanlyk举行的,竞赛活动在每年的五月底举行.每年有来自8年级到12年级的大约500名学生参加这个竞赛活动.保加利亚的两个城市Kazanlyk和Iambol轮流组织竞赛活动.在Iambol举行竞赛活动之后,命名为Atanas Radev(1886—1970)数学竞赛.Atanas Radev是著名的数学教师,他为数学教育贡献了自己的一生.

为了选拔保加利亚巴尔干地区奥林匹克竞赛团队,考虑选手冬季数学竞赛和春季数学竞赛的成绩,综合两次选拔赛成绩确定团队人选.

国家奥林匹克数学竞赛 首届国家奥林匹克数学竞赛可以追溯到1949—1950学年度.按校级竞赛、地市级竞赛和全国性决赛三轮进行组织.校级竞赛一轮,在不同年级由地市级数学权威机构组织实施,他们编制试题和级别方案.地市级竞赛一轮也是在不同的年级,由地市中心组织实施.试题由全国奥林匹克竞赛委员会提供,地市级数学主管部门的职责是进行等级划分.全国决赛一轮安排两天进行,每天三道试题,试题及组织类似于IMO.12名成绩较好的学生应邀参加两

次选拔赛. 按惯例，每一次选拔赛安排两天，每天三个问题，由两次选拔赛的结果确定 6 名学生组成保加利亚 IMO 团队.

保加利亚和国际数学竞赛 保加利亚是 1959 年六国(保加利亚，捷克斯洛伐克，德意志民主共和国，匈牙利，罗马尼亚和苏维埃社会主义共和国联盟)数学竞赛发起国之一，IMO 现在非常流行. 自那儿以后，保加利亚团队参加所有的 IMO. 保加利亚的学生也要参加日益普及的巴尔干地区数学奥林匹克和最后一轮的全俄数学奥林匹克.

本书包含的全部问题来自上面提到过的 2003—2006 年全国数学竞赛试题(8—12 年级)，也包括了同期 BMO，IMO 选拔赛试题. 问题中的大多数和 IMO 的试题难度相当. 本书适合对奥林匹克数学竞赛感兴趣的大学生、高中生和教师研读.

⊙ 一些标准记号列表

N——所有自然数集合，即 $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\cdots\}$.

Z——所有整数集合，即 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots\}$.

Q——所有有理数集合，即 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p,q\in\mathbf{Z}\right\}$.

R——所有实数的集合.

C——所有复数的集合，即 $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}$.

$[x]$——x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数.

$\{x\}$——x 的小数部分，即 $\{x\}=x-[x]$.

(a,b)——整数 a,b 的最大公因数.

$[a,b]$——整数 a,b 的最小公倍数.

目录 Contest

2003 年冬季数学竞赛 1

2003 年春季数学竞赛 10

2003 年国家奥林匹克地区轮回赛 21

2003 年国家奥林匹克国家轮回赛 25

2003 年 BMO 团队选拔赛 30

2003 年 IMO 团队选拔赛 33

2004 年冬季数学竞赛 37

2004 年春季数学竞赛 45

2004 年国家奥林匹克地区轮回赛 53

2004 年国家奥林匹克国家轮回赛 66

2004 年 BMO 团队选拔赛 71

2004 年 IMO 团队选拔赛 76

2005 年冬季数学竞赛 84

2005 年春季数学竞赛 95

2005 年国家奥林匹克地区轮回赛 107

2005 年国家奥林匹克国家轮回赛 120

2005 年 BMO 团队选拔赛 125

2005 年 IMO 团队选拔赛 130

2006 年冬季数学竞赛 135

2006 年春季数学竞赛 146

2006 年国家奥林匹克地区轮回赛 157

2006 年国家奥林匹克国家轮回赛 167

2006 年 BMO 团队选拔赛 172

2006 年 IMO 团队选拔赛 176

编辑手记 187

2003 年冬季数学竞赛

问题 9.1 如图 1,设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,$AC = BC$,k 是圆心在 C 点,半径小于高 CH 的圆,$H \in AB$. 过 A,B 两点分别做圆 k 的切线,切点是 P,Q,且 P,Q 两点位于高 CH 的同侧. 证明:P,Q 和 H 三点共线.

Oleg Mushkarov

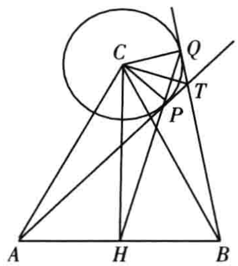

图 1

证明一 因为 $CP = CQ$,$CA = CB$,且 $\angle APC = \angle BQC = 90°$,则 $\triangle APC \cong \triangle BQC$,因此 $\angle CAP = \angle CBQ$.

设 $AP \cap BQ = T$,由此可见,四边形 $ABTC$ 四点共圆,则 $\angle BAC = \angle QTC$,又 $\angle TQC = \angle AHC = 90°$,因此,$\angle QCT = \angle ACH$. 由关系式 $\angle AHC = \angle APC = \angle CPT = \angle CQT = 90°$ 可见,四边形 $AHPC$,$CPTQ$ 都是圆内接四边形,所以 $\angle APH = \angle ACH$,$\angle QPT = \angle QCT$,从而 $\angle APH = \angle QPT$,所以 H,P,Q 三点共线.

证明二 设 $S = HQ \cap k$,由于四边形 $BHCQ$ 四点共圆,又 $\triangle ABC$,$\triangle CQS$ 是等腰三角形. 由此可见,$\angle BAC = \angle ABC = \angle HQC = \angle CSQ$,所以 $AHSC$ 是圆内接四边形.

因此,$\angle ASC = \angle AHC = 90°$,因此点 S 与点 P 重合,即 H,P,Q 三点共线.

问题 9.2 求 a 的所有值,使得方程

$$\frac{2a}{(x+1)^2} + \frac{a+1}{x+1} - \frac{2(a+1)x-(a+3)}{2x^2-x-1} = 0$$

有两个实根 x_1 和 x_2,且满足关系 $x_1^2 - ax_1 = a^2 - a - 1$.

Ivan Landjev

解 给定的方程等价于

$$ax^2 + (1-2a)x + (1-a) = 0$$

其中 $x \neq -1, -\frac{1}{2}, 1$. 所以这个方程有两个实根 x_1,x_2,满足 $x_2^2 - ax_1 = a^2 - a - 1$. 因为 $x_1 + x_2 = \frac{2a-1}{a}$,则有

$$x_2^2 + ax_2 - a^2 - a + 2 = 0$$

以及,$ax_2^2 + (1-2a)x_2 + 1 - a = 0$. 所以

$$(a^2+2a-1)x_2 = a^3 + a^2 - 3a + 1 = (a^2+2a-1)(a-1)$$

当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，x_2 的系数变为 0.

如果 $a=-1+\sqrt{2}$，则

$$(-1+\sqrt{2})x_2^2+(3-2\sqrt{2})x_2+2-\sqrt{2}=0$$

这是不可能的. 因为该二次方程判别式 $\Delta=33-24\sqrt{2}<0$，方程没有实根.

如果 $a=-1-\sqrt{2}$，则

$$(-1-\sqrt{2})x_2^2+(3+2\sqrt{2})x_2+2+\sqrt{2}=0$$

有两个不等于 $\pm 1, -\frac{1}{2}$ 的实根.

现设 $a\neq -1\pm\sqrt{2}$，则 $x_2=a-1$，于是 $a(a-1)(a-3)=0$. 因为 $a\neq 0,1$，所以 $a=3$. 此时，方程的实根是 $-\frac{1}{3}$，2，满足给定的条件. 因此，所求 a 的值为 $-1-\sqrt{2}$，3.

问题 9.3 求小于 2 003 的正整数 a，使得存在一个正整数 n，满足 $3^{2\,003}$ 能被 n^3+a 所整除.

Emil Kolev, Nikolai Nikolov

解 我们要证明，所求数具有下列形式之一

$$9k\pm 1, 3^3(9k\pm 1), 3^6(9k\pm 1)$$

假设 3 不能整除 a，因为 $n^3\equiv 0,\pm 1 \pmod 9$，则 $a\equiv\pm 1\pmod 9$. 相反的，设 $a\equiv\pm 1\pmod 9$，因为 9 整除 1^3-1，2^3+1，则有 n_0 满足 $n_0^3+a=3^st\ (s\geqslant 2)$，其中 t 不能被 3 整除. 我们要证明，如果 $n_1=n_0+2\cdot 3^{s-1}t$，则 3^{s+1} 整除 n_1^3+a. 我们有

$$(n_0+2\cdot 3^{s-1}t)^3+a=3^st(2n_0^2+1)+4n_0 3^{2s-1}t^2+8\cdot 3^{3s-3}\cdot t^2$$

因为 3 不能整除 n_0，则 $2n_0^2+1$ 能被 3 整除，此外，$2s-1\geqslant s+1$，$3s-3\geqslant s+1$. 所以，n_1^3+a 能被 3^{s+1} 整除，但 3 不能整除 n_1. 重复同样的论证，我们得到正整数 n_p 满足 $3^{2\,003}$ 整除 n_p^3+a.

现设 3 整除 $a<2\,003$，则 $a=3^sb\ (s\leqslant 6)$. 因此，n 能被 3 整除，即 $n=3^pn_0$，其中 $p\geqslant 1$，且 3 不能整除 n_0. 如果 $p\geqslant 3$，则 3^9 整除 n^3，但不能整除 a. 这就意味着 $3^{2\,003}$ 不能整除 n^3+a. 所以 $p=1$ 或 2，易见 $s=3$ 或 6.

第一种情况，我们得到 $3^{2\,000}$ 整除 n_0^3+b，其中 3 不能整除 b，且 $27b<2\,003$. 由上述可见，$b\equiv\pm 1\pmod 9$.

第二种情况，类似地，我们得到 $3^{1\,997}$ 整除 n_0^3+b，其中 $729b<2\,003$. 且 $b\equiv\pm\pmod 9$.

正整数 $b\equiv\pm 1\pmod 9$，满足 $b<2\,003$，$27b<2\,003$，$729b<2\,003$ 的个数分别等于 $2\times 222+1=445$，$2\times 8+1=17$，1，所

以，所求的数为 $445+17+1=463$.

问题 10.1 求 a 的所有值，使得方程
$$\sqrt{ax^2+ax+2}=ax+2$$
有唯一实根.

Alexander Ivanov, Emil Kolev

解 如果 $ax+2<0$，则方程没有实根. 如果 $ax+2\geqslant 0$，则方程等价于 $ax^2+ax+2=(ax+2)^2$，即 $(a^2-a)x^2+3ax+2=0$. 这最后的方程，在下列三种情况下有唯一实根.

情况 1 x^2 的系数变为 0. 各自的线性方程有一根 x，满足 $ax+2\geqslant 0$.

如果 $a=0$，则 $2=0$，这是不可能的. 如果 $a=1$，则 $x=\frac{2}{3}$，且 $ax+2=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}>0$，所以 $a=1$ 是一个解.

情况 2 x^2 的系数非 0. 即 $a\neq 0,1$，这个二次方程有唯一一个实根 x，且 $ax+2\geqslant 0$. 因此判别式 $\Delta=9a^2-8(a^2-a)=a^2+8a=0$，所以 $a=-8$，从而 $x=\frac{1}{6}$，且 $ax+2=-8\times\frac{1}{6}+2=\frac{2}{3}>0$. 即 $a=-8$ 是一个解.

情况 3 x^2 的系数非 0. 即 $a\neq 0,1$，且这个二次方程有两个实根 $x_1<x_2$，满足 $ax_1+2<0\leqslant ax_2+2$，即 $-\frac{2}{a}\in(x_1,x_2]$.

如果 $-\frac{2}{a}=x_2$，则 $(a^2-a)\left(-\frac{2}{a}\right)^2+3a\left(-\frac{2}{a}\right)+2=0$. 所以 $-\frac{1}{a}=0$，矛盾. 于是
$$-\frac{2}{a}\in(x_1,x_2)\Leftrightarrow(a^2-a)\left[(a^2-a)\left(-\frac{2}{a}\right)^2+3a\left(-\frac{2}{a}\right)+2\right]<0$$

容易求出上面不等式的解是 $a>1$. 所以，当 $a=-8$ 或 $a\geqslant 1$ 时，给定的方程有唯一实根.

问题 10.2 设 k_1，k_2 分别表示圆心在点 O_1，O_2，半径为 R_1，R_2 的两个圆，且 $O_1O_2=25$，$R_1=4$，$R_2=16$. 又设圆 k 满足：圆 k_1 内切圆 k 于切点 A，圆 k_2 外切圆 k 于切点 B.

a) 证明：线段 AB 过一定点(即与圆 k 无关)；

b) 直线 O_1O_2 分别交圆 k_1，k_2 于 P，Q 两点，满足 O_1 在线段 PQ 上，O_2 不在 PQ 上. 证明：四点 P，A，Q，B 共圆；

c) 求线段 AB 长度的最小可能值(当圆 k 变动时).

Stoyan Atansov, Emil kolev

解 a) 我们要证明,点 $S=O_1O_2\cap AB$ 的位置与 k 无关. 设圆 k 的圆心是 O_3,对 $\triangle O_1O_2O_3$ 及直线 AB,使用 Menelaus 定理,有

$$\frac{O_3B}{BO_2}\cdot\frac{O_2S}{SO_1}\cdot\frac{O_1A}{AO_3}=1$$

因为 $O_3B=AO_3$,所以,$\frac{O_2S}{SO_1}=\frac{BO_2}{O_1A}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{16}{4}=4$. 因此,$S$ 是一个固定点. 由关系式 $O_1O_2=25=O_2S+O_1S$,有 $O_2S=20$,$O_1S=5$.

b) 设 $\angle O_1O_3O_2=x$,$\angle O_1O_2O_3=y$,则 $\angle AO_1S=x+y$. 因为 $\triangle O_1AP$ 是等腰三角形,所以 $\angle APS=\frac{x+y}{2}$. 另一方面,$\triangle AO_3B$,$\triangle BO_2Q$ 也是等腰三角形,所以 $\angle SBO_3=90^\circ-\frac{x}{2}$,$\angle QBO_2=90^\circ-\frac{y}{2}$. 于是,$\angle SBQ=\frac{x+y}{2}$,所以 $\angle APS=\angle SBQ$. 即 $PBQA$ 是圆内接四边形.

c) 注意关系式 $SP\cdot SQ=SA\cdot SB$,$SP\cdot SQ=(SO_1+R_1)(SO_2-R_2)=9\times4=36$. 由基本不等式,有 $AB=SA+SB\geqslant 2\sqrt{SA\cdot SB}=2\sqrt{SP\cdot SQ}=12$. 从而当且仅当 $SA=SB$ 时,不等式成立.

余下要证明,有一个圆 k,满足 $SA=SB$.

取点 $A\in k_1$,满足 $SA=6$. 因为 S 对 k_1 的幂等于 $SO_1^2-R_1^2=5^2-4^2=9$,而 $SA^2=36>9$. 容易看出,通过点 A 的圆 k 满足问题的条件,则 $SB=\sqrt{SP\cdot SQ}=6$,即 $SA=SB$.

问题 10.3 设 A 是由 0 和 1 组成的所有四元组的集合,两个四元组称为"邻居",如果它们在三个位置准确地重合. 设 M 是 A 的子集,具有如下性质:M 中的任何两个元素不是"邻居",且存在 M 中的一个元素和其中的一个是"邻居",求 M 的最小可能的基数.

Ivan Landjev, Emil Kolev

解 考虑一个表,其行对应 A 的元素,其列对应 M 的元素. 如果单元格中,其行元素(属于 A) 与列元素(属于 M) 是"邻居",则在该单元格里写下 $\times$. 设 $|M|=k$,由给定的条件可以得出,没有两个相同的行,从而 M 至少有 16 个不同的子集. 因为具有 n 个元素的集合有 2^n 个子集,所以 $k\geqslant4$.

任何行确有 5 对元素是"邻居",因而,任何列确有包含 5 个"$\times$",即"$\times$"的总数是 $5k$."$\times$"的最小个数,由各行达到. 如果一行没有"$\times$",k 行包含一个"$\times$",$\binom{k}{2}$行包含两个"$\times$",等等.

如果 $k=4$，则 M 的所有子集是 16 个，因此，M 的任何子集确实出现一次与 A 的某些元素的集合是"邻居"．则我们有一行没有"×"，4 行有一个"×"，6 行有两个"×"，4 行有三个"×"以及一行有 4 个"×"．"×"的总数变成 $32>20$，矛盾．

对于 $k=5$，有 25 个"×"，它们的最小数由行达到．当一行没有包含"×"，5 行包含一个"×"和 10 行包含 2 个"×"．由于 $5\times 1+10\times 2=25$，25 个"×"的分布必须如此．这种情况上面已经描述过，这个意思是 M 中的任何两个元素，都是与 A 的某些元素是"邻居"．容易发现，如果 M 中的两个元素，至多在两个位置不重合，则就没有 A 的一个元素与它们是"邻居"．所以，M 的任何两个元素，在一或两个位置不重合．两个元素如果在一个位置不重合，我们可以假定它们是 $a=0000$，$b=1000$，在 M 中与 a,b 是邻居的是 0000，1000．因此，a 和 b 的行重合，矛盾．这表明 M 的任何两个元素在确定的两个位置上是不同的．我们可以假定 $0000\in M$，则余下的 4 个元素是在 0011，1100，0101，1010，1001，0110 当中．但是对(0011，1100)，(0101，1010)，(1001，0110)中任何一个，至多可以选择一个元素，矛盾．

对于 $k=6$，集合 $M=\{0000,1111,0111,0100,1001,0101\}$ 分离 A 的任何两个元素，所以要求的最小值是 6．

问题 11.1 设 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2a_n}$ $(n\geqslant 1)$，证明：

a) $n\leqslant a_n^2\leqslant n+\sqrt[3]{n}$；

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-\sqrt{n})=0$.

Nikolai Nikolov

证明 a) 我们有 $a_{n+1}^2=a_n^2+1+\dfrac{1}{4a_n^2}$．特别地 $a_{n+1}^2>a_n^2+1$，由数学归纳法可知 $a_n^2\geqslant n$.

我们再次使用归纳法来证明不等式的右边．对于 $n=1$，不等式显然成立．假定 $a_n^2<n+\sqrt[3]{n}$，则 $a_{n+1}^2<n+\sqrt[3]{n}+1+\dfrac{1}{4n}$，只需证明

$$\sqrt[3]{n}+\frac{1}{4n}<\sqrt[3]{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{4n}<\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}<4n\Leftrightarrow$$

$$1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}<4\sqrt[3]{n}$$

这个不等式，可由不等式 $1+\dfrac{1}{n}\leqslant 2$，$1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}<$

4 求得.

b) 命题是下列不等式的一个推论

$$0 \leqslant a_n - \sqrt{n} < \sqrt{n+\sqrt[3]{n}} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+\sqrt[3]{n}}+\sqrt{n}} < \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$$

问题 11.2 如图 2,设 M 是 $\triangle ABC$ 内部一点,直线 AM,BM 和 CM 与直线 BC,CA 和 AB 分别交于点 A_1, B_1 和 C_1,满足 $S_{\triangle CB_1M} = 2S_{\triangle AC_1M}$. 证明:$A_1$ 是线段 BC 的中点,当且仅当 $S_{\triangle BA_1M} = 3S_{\triangle AC_1M}$.

Oleg Mushkarov

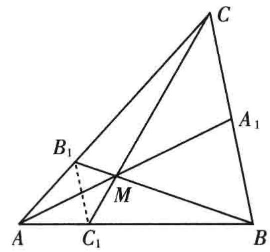

图 2

证明 设 A_1 是线段 BC 的中点,由 Ceva 定理,有

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

即$\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{B_1A}{B_1C}$. 所以 $B_1C_1 \parallel BC$,即有

$$S_{\triangle BC_1M} = S_{\triangle CB_1M} = 2S_{\triangle AC_1M}, S_{\triangle AB_1M} = S_{\triangle AC_1M}$$

则

$$\frac{1}{3} = \frac{S_{\triangle AC_1M}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{C_1M}{MC} = \frac{S_{\triangle BC_1M}}{S_{\triangle BMC}} = \frac{2S_{\triangle AC_1M}}{2S_{\triangle BA_1M}}$$

从而有 $S_{\triangle BA_1M} = 3S_{\triangle AC_1M}$.

相反,设 $S_{\triangle AC_1M} = 1$, $S_{\triangle CB_1M} = 2$, $S_{\triangle BA_1M} = 3$, $S_{\triangle BC_1M} = x$, $S_{\triangle CA_1M} = 3y$, $S_{\triangle AB_1M} = 2z$,我们有 $y = 1$. 注意到

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{S_{\triangle AC_1M}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{C_1M}{CM} = \frac{S_{\triangle C_1MB}}{S_{\triangle CMB}} = \frac{x}{3(y+1)}$$

类似地

$$\frac{3}{x+1} = \frac{3y}{2(z+1)}, \frac{2}{3(y+1)} = \frac{2z}{x+1}$$

这些等式相乘,有 $xyz = 1 \Rightarrow z = \dfrac{1}{xy}$.

由第一个等式,有

$$xy = \frac{3y^2+3y-2}{2} \tag{1}$$

类似地,由第二个等式,有

$$2\left(1+\frac{1}{xy}\right) = xy + y \tag{2}$$

把式(1) 代入式(2),有

$$(3y^2+3y-2)^2 + 2y(3y^2+3y-2) - 12y(y+1) = 0$$

即

$$(y-1)[3(y+2)(3y^2+3y+2)+6y^2-16] = 0$$

由式(1)得 $3y^2+3y>2$，且由于 $y>0$，所以

$$3(y+2)(3y^2+3y+2)+6y^2-16>6(3y^2+3y+2)-16>8$$

因此，$y=1, x=2, z=\frac{1}{2}$.

问题 11.3 Aleksander 写了一个正整数作为一个四次多项式的系数之后，Elitza 也写了一个正整数作为同一个多项式的系数，如此下去，直到多项式的 5 个系数全部填满为止. 如果多项式有一个整数根，那么 Aleksander 赢，否则 Elitza 赢，他们中谁有赢的策略？

解 我们来证明，Elitza 有赢的策略.

如果多项式是 $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$，且 Aleksander 写下了 a_0, a_1, a_2 或 a_3，则 Elitza 分别写下了 $a_1=a_0$，$a_0=a_1$，$a_3=a_2$ 或 $a_2=a_3$. 如果 Aleksander 写下了 a_4，Elitza 写下了 $a_1=1$. 同理 Elitza 写下第二个数之后，能够得到 $a_1\leqslant a_0$，且 $a_3\leqslant a_2$. 假定多项式有一个整数根 y，则 $y\geqslant 1$，因此，$a_4=y^3(a_1-a_0y)+a_3-a_2y\leqslant 0$，矛盾.

问题 12.1 考虑函数 $f(x)=4x^4+6x^3+2x^2+2\,003x-2\,003^2$，证明：

a) $f'(x)$ 的局部极值是正数；

b) 方程 $f(x)=0$ 确有两个实根，并求出这两个实根.

Sava Grozdev, Svetlozar

证明 a) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，这足以表明，$f'(x)$ 的局部最小值 m 是正数. 因为方程 $f''(x)=0$ 有两个实根 $x_1>x_2$，由此可知 $m=f'(x_1)>0$. 现易证 $x_1\in(-1,0)$，且 $m>0$.

b) 由 a) 可得方程 $f'(x)=0$ 有唯一实根. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，且 $f(0)<0$，我们推出方程 $f(x)=0$ 确有两个实根. 为找到它们，设 $y=2\,003$，并考虑方程 $f(x)=0$ 作为关于 y 的二次方程，我们有

$$y_{1,2}=\frac{x\pm x(4x+3)}{2}$$

于是，$2y=x-x(4x+3)$ 或 $2y=x+x(4x+3)$. 对于 $y=2\,003$，第一个方程没有实根，第二个方程有两个实根 $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4\,007}}{2}$.

问题 12.2 如图 3,设 M,N 和 P 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB,BC 和 AC 上的一点,过 M,N 和 P 三点分别作 AB,BC 和 CA 的平行线交于一点 T. 证明:

a) 如果 $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}$,则点 T 是 $\triangle ABC$ 的重心;

b) $S_{\triangle MNP}\leqslant\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

Sava Grozdev, Svetlozar Doyohev

证明 设 $PT\cap BC=P_1$,$NT\cap AB=N_1$,$MT\cap AC=M_1$,则 $\triangle N_1MT$,$\triangle PTM_1$,$\triangle TP_1N\backsim\triangle ABC$. 设 $k_1=\frac{N_1M}{AB}$,$k_2=\frac{PT}{AB}$,$k_3=\frac{TP_1}{AB}$,则

$$k_1+k_2+k_3=1 \tag{1}$$

这是由于 $k_1+k_2+k_3=\frac{N_1M}{AB}+\frac{PT}{AB}+\frac{TP_1}{AB}=\frac{N_1M}{AB}+\frac{AN_1}{AB}+\frac{MB}{AB}=1$.

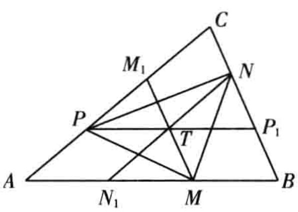

图 3

a) 显然,$\frac{AM}{MB}=\frac{PT+N_1M}{AB}=\frac{k_1+k_2}{k_3}$. 类似可得 $\frac{BN}{NC}=\frac{k_1+k_3}{k_2}$,$\frac{CP}{PA}=\frac{k_2+k_3}{k_1}$.

由 $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}$,可得 $\frac{k_1+k_2}{k_3}=\frac{k_1+k_3}{k_2}$,即 $(k_2-k_3)(k_1+k_2+k_3)=0$. 所以 $k_2=k_3$. 同理可得 $k_1=k_2$.

于是 $k_1=k_2=k_3$. 所以 $PT=TP_1$. 又因为 $PP_1\mathbin{/\mkern-5mu/}AB$,由此可见,直线 CT 交于 AB 的中点. 类似地,直线 BT,AT 分别交于 AC,BC 的中点,因此,T 是 $\triangle ABC$ 的重心.

b) 我们有

$$\begin{aligned}S_{\triangle MNP}&=S_{\triangle MNT}+S_{\triangle NPT}+S_{\triangle PMT}=S_{\triangle MBT}+S_{\triangle TNC}+S_{\triangle PAT}=\\&\frac{1}{2}(S_{\text{四边形}MBP_1T}+S_{\text{四边形}TNCM_1}+S_{\text{四边形}PAN_1T})=\\&\frac{1}{2}(1-k_1^2-k_2^2-k_3^2)S_{\triangle ABC}\end{aligned}$$

由不等式 $k_1^2+k_2^2+k_3^2\geqslant\frac{(k_1+k_2+k_3)^2}{3}$ 及式(1) 可知,$k_1^2+k_2^2+k_3^2\geqslant\frac{1}{3}$. 所以 $S_{\triangle MNP}\leqslant\frac{S_{\triangle ABC}}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.