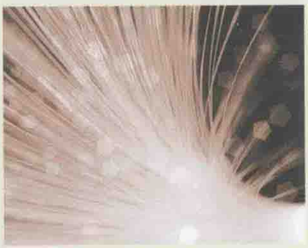
北华大学文库

BEIHUA DAXUE WENKU

国家自然科学基金资助项目资助出版

小波分析理论及工程应用

XIAOBO FENXI LILUN JI GONGCHENG YINGYONG



◎ 谢成俊 著

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

北华大学文库
BEIHUA DAXUE WENKU

小波分析理论及工程应用

谢成俊 著

东北师范大学出版社
长 春

图书在版编目（CIP）数据

小波分析理论及工程应用/解成俊著. —2版. —长春：东北师范大学出版社，2015.3
ISBN 978-7-5681-0330-5

Ⅰ.①小… Ⅱ.①解… Ⅲ.①小波理论 Ⅳ.O174.22

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第269569号

□责任编辑：孙维石　□封面设计：李冰彬
□责任校对：曲　颖　□责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街118号（邮政编码：130117）
网址：http：//www.nenup.com
东北师范大学出版社激光照排中心制版
河北省廊坊市永清县晔盛亚胶印有限公司
河北省廊坊市永清县燃气工业园榕花路3号（065600）
2015年3月第2版　2015年3月第1次印刷
幅面尺寸：148mm×210mm　印张：8.5　字数：243千

定价：50.00元

国家自然科学基金资助项目（60672156）
资助出版

北华大学学术专著出版基金（2006013）
资助出版，已列入北华大学文库

前　言

本书全面阐述了小波分析的基本概念和基本算法，介绍了小波分析在信号分析、图像压缩、模式识别、跟踪等图像分析中的应用。

小波分析是泛函分析、数值分析等的最完美结晶，在信号处理、图像处理、语音分析、模式识别、量子物理及众多非线性科学等领域，它被认为是近年来在工具及方法上的重大突破。小波分析在理论、算法、技术工具、方法方面仍有很多须要研究和解决的问题。为了便于读者的理解，我们尽量用通俗的语言来叙述其思想，揭示其实质。读者同时会发现，它也不失数学上的完美。

本书系北华大学学术成果，由国家自然科学基金资助项目（60672156）和北华大学学术专著出版基金（2006013）资助出版，已列入北华大学文库。

本书适合做高等学校计算机、信息、电子类专业本科生、硕士研究生的教材以及一般工程技术人员的参考书。

作　者

目　　录

第一章　多分辨率分析的基本性质

§1.1　Shannon 采样定理

设信号函数 $f(x)$ 的频谱 $f(\omega)$ 限制于$[0,2\pi f_{\mathrm{m}}]$中,即

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\int_R f(x)e^{-i\omega x}dx & |\omega|\leqslant 2\pi f_{\mathrm{m}}\\ 0 & |\omega|>2\pi f_{\mathrm{m}}\end{cases}$$

其中,f_{m} 为信号 $f(x)$ 的最高频率。令 $B=2\pi f_{\mathrm{m}}, V_B=[0,B]$。

定　义

称 $f(x)$ 是一带宽 B 有限的函数,则 $f\in V_B=\{f(x)$,当$|\omega|\geqslant B$时,$\hat{f}(\omega)=0\}$。

Shannon 采样定理

设 $f(x)$ 是一带宽有限的函数,则当采样间隔 $\Delta\leqslant\frac{\pi}{B}$ 时,集合 $\{f(k\Delta),k\in\mathbf{Z}\}$ 可以唯一确定地表示 $f(x)$,并可以表示为

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k\Delta)\frac{\sin\left[\frac{\pi}{\Delta}(x-k\Delta)\right]}{\frac{\pi}{\Delta(x-k\Delta)}}$$

在特定情形 $B=\pi,\Delta=1$ 时,对于 $f\in V_\pi$,记 $\phi(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$,可以证明

$$\langle \phi(x-k), \phi(x-l) \rangle = \int_R \phi(x-k)\overline{\phi(x-l)}dx = \delta_{kl}$$

并且$\{\phi(x-k), k \in \mathbf{Z}\} = \left\{\dfrac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}, k \in \mathbf{Z}\right\}$构成了$V_\pi$的标准正交基。

Shannon 采样定理可以写成如下形式：

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k)\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k)\phi(x-k)$$

为了得到$L^2(R)$的标准正交基，作变换

$$f(x) \to f(2x), V_\pi \to V_{2\pi}。$$

对于$f \in V_{2\pi}$，取$\Delta = \dfrac{1}{2}$，则有

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k}{2}\right)\frac{\sin2\pi\left(x-\frac{k}{2}\right)}{2\pi\left(x-\frac{k}{2}\right)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k}{2}\right)\phi(2x-k)$$

可以证明

$$\langle \phi(2x-k), \phi(2x-l) \rangle = \int_R \phi(2x-k)\overline{\phi(2x-l)}dx = 2\delta_{kl}$$

将上式改写成

$$\langle \sqrt{2}\phi(2x-k), \sqrt{2}\phi(2x-l) \rangle = \int_R \phi(2x-k)\overline{\phi(2x-l)}dx = \delta_{kl}$$

故$\{\sqrt{2}\phi(2x-k), k \in \mathbf{Z}\}$构成了$V_{2\pi}$的标准正交基。

依此类推，并作变换$f(x) \to f(2^n x)$：

$$V_\pi \to V_{2^n\pi} = \{f(x) \mid 当 \mid \omega \mid \geqslant 2^n\pi 时, \hat{f}(\omega) = 0\}$$

并且$\{2^{\frac{n}{2}}\phi(2^n x-k), k \in \mathbf{Z}\} = \left\{2^{\frac{n}{2}}\dfrac{\sin\pi(2^n x-k)}{\pi(2^n x-k)}, k \in \mathbf{Z}\right\}$构成了$V_{2^n\pi}$的标准正交基。

由此，我们得到了一串$L^2(R)$的闭子空间$V_{2^n\pi}, n \in \mathbf{Z}$，并且有

$$V_{2^n\pi} \subset V_{2^{n+1}\pi}$$

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} V_{2^n\pi}} = L^2(R)$$

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} V_{2^n\pi}} = \{0\}$$

对于 $\forall f \in L^2(R)$，则有 $\hat{f}(\omega) \in L^2(R)$，令 $x_n = \begin{cases} 1 & |\omega| \leqslant 2^n\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，

则 $\hat{f}(\omega)$ 可以表示为

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n\in \mathbf{Z}} \hat{f}(\omega)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{n\in \mathbf{Z}} \hat{f}_n(\omega)$$

其中 $\hat{f}_n(\omega) = \hat{f}(\omega)(x_n - x_{n-1})$，当 $|\omega| \geqslant 2^n\pi$ 时 $\hat{f}_n(\omega) = 0$，所以 $f(x) = \sum_n f_n(x)$，$f_n \in V_{2^n\pi}$，从而有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\in \mathbf{Z}} f_n(x) \\ &= \sum_{n\in \mathbf{Z}} \sum_{k\in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k}{2^n}\right) 2^{\frac{n}{2}} \frac{\sin\pi(2^n x - k)}{\pi(2^n x - k)} \\ &= \sum_{n\in \mathbf{Z}} \sum_{k\in \mathbf{Z}} C_{n,k} 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n x - k) \end{aligned}$$

对于 $2^{\frac{n}{2}} \dfrac{\sin\pi(2^n x - k)}{\pi(2^n x - k)}$，$n$ 固定，k 变化，则该式构成了标准正交基；而 k 固定，n 变化，则该式并不构成标准正交基。所以 $\{2^{\frac{n}{2}}\phi(2^n x - k), n, k \in \mathbf{Z}\}$ 并不构成 $L^2(R)$ 上的标准正交基。因为 $V_{2^n\pi} \in V_{2^{n+1}\pi}$，且 $V_{2^n\pi}$ 和 $V_{2^{n+1}\pi}$ 二者不一定正交，用 $W_{2^n\pi}$ 表示 $V_{2^n\pi}$ 在 $V_{2^{n+1}\pi}$ 中的正交补空间。为了表述简洁，将 $V_{2^n\pi}$ 写成 V_n，将 $V_{2^{n+1}\pi}$ 写成 V_{n+1}，将 $V_{2\pi}$ 写成 V_1，将 V_π 写成 V_0，则 V_{n+1} 可以写成

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= W_n \oplus V_n = W_n \oplus W_{n-1} \oplus V_{n-1} \\ &= W_n \oplus W_{n-1} \oplus W_{n-2} \oplus V_{n-2} = \bigoplus_{j=-l}^{n} W_j \oplus V_{-l} \end{aligned}$$

因为 $\lim_{j\to\infty} t\, V_{-j} = \{0\}$，所以 $L^2 R = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$。

§1.2　多分辨率分析的基本性质

Schaulder 基定义

称 $\{S_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的 Schaulder 基，对 $\forall f \in H$，都存

在唯一的$\{C_k, k \in \mathbf{Z}\} \in L^2(Z)$，使得 $f = \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} C_k S_k$。

Riesz 基定义

称$\{r_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的 Riesz 基，如果

(1)$\{r_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 H 的 Schaulder 基。

(2) 对 $\forall \{C_k, k \in \mathbf{Z}\} \in L^2(Z)$ 都存在正的常数 $0 < A < B < +\infty$，使得

$$A \sum_{k \in \mathbf{Z}} |C_k|^2 \leqslant \left\| \sum_{k \in \mathbf{Z}} C_k r_k \right\|^2 \leqslant B \sum_{k \in \mathbf{Z}} |C_k|^2$$

1.2.1 多分辨率分析 MRA 定义

MRA 定义

空间 $L^2(R)$ 的多分辨率分析是指满足下列性质的一系列闭子空间$\{V_j, j \in \mathbf{Z}\}$。

(1) 一致单调性 $\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$

(2) 渐进完全性 $\bigcap\limits_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup\limits_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(R)$

(3) 伸缩规则性 $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbf{Z}$

(4) 平移不变性 $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0, \forall k \in \mathbf{Z}$

(5) Riesz 基存在性 存在 $r(x) \in V_0$，使得$\{r(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的 Riesz 基，称 $r(x)$ 为“多尺度分析的生成元”。

定理：设$\{r(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 构成了 V_0 的 Riesz 基，则 $\exists \phi(x) \in V_0$，使得$\{\phi(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 构成了 V_0 的标准正交基。

证明：

令 $\phi(x) = \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} C_k r(x-k)$

只要 $\phi(x)$ 满足

$$\int_R \phi(x-k) \overline{\phi(x-l)} dx = \delta_{kl}$$

则$\{\phi(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 构成了 V_0 的标准正交基。

将 $\phi(x)$ 进行 Fourier 变换，得

$$\hat{\phi}(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} C_k e^{-ik\omega} \hat{r}(\omega) = m(\omega) \hat{r}(\omega)$$

其中 $m(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}C_k e^{-ik\omega}$，显然 $m(\omega)$ 是以 2π 为周期的函数，下面来求 $m(\omega)$ 的表达式：

$$\int_R \phi(x-k)\overline{\phi(x-l)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\phi}(\omega)e^{-ik\omega}\overline{\hat{\phi}(\omega)}e^{il\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R |m(\omega)|^2|\hat{r}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega}d\omega$$

$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}|m(\omega)|^2|\hat{r}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega}d\omega$（将 R 上的积分变成分段积分再求和）

$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi}|m(v+2n\pi)|^2|\hat{r}(v+2n\pi)|^2|e^{-i(k-l)(v+2n\pi)}dv$（$\omega=v+2n\pi$）

$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi}|m(v)|^2|\hat{r}(v+2n\pi)|^2|e^{-i(k-l)(v+2n\pi)}dv$［$m(\omega)$ 是以 2π 为周期的函数］

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|m(v)|^2\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{r}(v+2n\pi)|^2|e^{-i(k-l)v}dv$$

因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(k-l)v}dv=\delta_{kl}$$

所以只要取 $m(\omega)=(\sum_{n\in\mathbf{Z}}|\hat{r}(\omega+2n\pi)|^2)^{-\frac{1}{2}}$，则 $\int_R\phi(x-k)\overline{\phi(x-l)}dx=\delta_{kl}$，这样有

$$\hat{\phi}(\omega)=(\sum_{n\in\mathbf{Z}}|\hat{r}(\omega+2n\pi)|^2)^{-\frac{1}{2}}\hat{r}(\omega)$$

如此构造的 $\phi(x)$ 及其整平移构成了 V_0 空间的标准正交基。

尺度函数定义

因为 $\hat{\phi}(\omega)=m(\omega)\hat{r}(\omega)$，所以 $\hat{r}(\omega)$ 可以表示为

$$\hat{r}(\omega)=m(\omega)^{-1}\phi(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}b_k e^{-ik\omega}\hat{\phi}(\omega)$$

对上式取 Fourier 反变换，得

$$r(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}b_k\phi(x-k)$$

我们称满足下式的 $\phi(x)$ 为 V_0 空间的尺度函数。

$$\begin{cases}\hat{\phi}(\omega)=\left[\sum_{n\in\mathbf{Z}}|\hat{r}(\omega+2n\pi)|^2\right]^{-\frac{1}{2}}\hat{r}(\omega)\\ r(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}b_k\phi(x-k)\end{cases}$$

1.2.2 两尺度关系及性质

$\phi(x)\in V_0,\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right)\in V_{-1}\subset V_0$，则 $\exists\{h_k,k\in\mathbf{Z}\}\in L^2(R)$，使得

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_k h_k\phi(x-k)$$

上式等价于

$$\hat{\phi}(2\omega)=\sum_k h_k e^{-ik\omega}\hat{\phi}(\omega)=H(\omega)\hat{\phi}(\omega)$$

其中，$H(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k e^{-ik\omega}$，通常称 $H(\omega)$ 为“低通滤波器”或“两尺度符号”，$H(\omega)$ 是以 2π 为周期的函数，所以两尺度关系也可以理解成两个空间 V_{-1} 或 V_0 基底之间的关系。

定理：尺度函数 $\phi(x)$、低通滤波器 $H(\omega)$ 具有如下性质：

(1) $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2=1$

(2) $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1$

(3) $H(0)=1$

证明：

(1) 因为 $\hat{\phi}(\omega)=\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{r}(\omega+2k\pi)|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\hat{r}(\omega)$

所以

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2\\=&\sum_{k\in\mathbf{Z}}|m(\omega+2k\pi)\hat{r}(\omega+2k\pi)|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left| m(\omega)\hat{r}(\omega+2k\pi) \right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left| m(\omega) \right|^2 \left| \hat{r}(\omega+2k\pi) \right|^2 \\
&= \left| m(\omega) \right|^2 \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left| \hat{r}(\omega+2k\pi) \right|^2 \\
&= \Big[\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left| \hat{r}(\omega+2k\pi) \right|^2\Big]^{-1} \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left| \hat{r}(\omega+2k\pi \right|^2) \\
&\quad \Big(m(\omega) = \Big[\sum_{n\in\mathbf{Z}} \left| \hat{r}(\omega+2n\pi) \right|^2\Big]^{-\frac{1}{2}}\Big) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

在以上证明中，用到了 $m(\omega+2k\pi)=m(\omega)$，因为 $m(\omega)$ 是以 2π 为周期的函数，所以 $m(\omega)$ 吸收了 $2k\pi$。

以上证明还可以采用下述方法：

$$\int_R \phi(x-k)\overline{\phi(x-l)}dx = \delta_{kl}$$

这样：

$$
\begin{aligned}
&\int_R \left| \phi(x) \right|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_R \left| \hat{\phi}(\omega) \right|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left| \hat{\phi}(\omega) \right|^2 d\omega \quad (\text{令 } \omega = \omega - 2k\pi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi} \left| \hat{\phi}(\omega+2k\pi) \right|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left| \hat{\phi}(\omega+2k\pi) \right|^2 d\omega
\end{aligned}
$$

由于 $\int_R \left| \phi(x) \right|^2 dx = 1$，所以 $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left| \hat{\phi}(\omega+2k\pi) \right|^2 = 1$。

(2) 因为　$\hat{\phi}(2\omega) = \sum_k h_k e^{-ik\omega}\hat{\phi}(\omega) = H(\omega)\hat{\phi}(\omega)$

有　$\hat{\phi}(2\omega+2k\pi) = H(\omega+k\pi)\hat{\phi}(\omega+k\pi)$

所以

$$1=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(2\omega+2k\pi)|^2$$
$$=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2|H(\omega+k\pi)|^2$$
$$=\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\omega+2l\pi)|^2|H(\omega+2l\pi)|^2+\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}[\omega+(2l+1)\pi]|^2|H[\omega+(2l+1)\pi]|^2$$
$$=\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\omega+2l\pi)|^2|H(\omega)|^2+\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}[\omega+(2l+1)\pi]|^2|H(\omega+\pi)|^2$$
$$=|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2$$

(3) $$\hat{\phi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\phi}(\omega)$$
$$=H(\omega)H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$=H(\omega)H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{4}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$
$$=\prod_{j=p}^{0}H(\omega 2^{-p})\hat{\phi}(\omega 2^{-p})$$
$$=\prod_{j=\infty}^{0}H(\omega 2^{-j})\hat{\phi}(0)$$

若 $\hat{\phi}(0)=0$,则可以导出对于所有的 $\hat{\phi}(\omega)$ 都将等于 0,这是矛盾的,所以 $\hat{\phi}(0)\neq 0$。

因此,有 $\hat{\phi}(0)=H(0)\hat{\phi}(0)$

故 $H(0)=1$

证毕。

设小波函数 $\Psi(x)\in W_0\subset V_0$, $\frac{1}{2}\Psi\left(\frac{x}{2}\right)\in W_{-1}\subset V_0$, $\exists\{g_k,k\in\mathbf{Z}\}\in L^2(Z)$,使得

$$\frac{1}{2}\Psi\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k\phi(x-k)$$

上式左边的 Fourier 变换: