高职高专公共基础课程规划教材

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　郝艳莉　田长申
主审　霍本瑶

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

郑州大学出版社

高职高专公共基础课程规划教材

# 高等数学

GAODENG SHUXUE


主编　郝艳莉　田长申

主审　霍本瑶



郑州大学出版社

郑州

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学/郝艳莉,田长申主编. —郑州:郑州大学出版社,2015.9
ISBN 978-7-5645-2531-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郝…②田… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 206675 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:张功员　　发行电话:0371-66966070
全国新华书店经销
河南安泰彩印有限公司印制
开本:787 mm×1 092 mm　1/16
印张:19.5
字数:465 千字
版次:2015 年 9 月第 1 版　　印次:2015 年 9 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-2531-6　　定价:33.00 元

# 前 言 PREFACE

为了适应高职高专教育发展的需要，满足高职高专教育应用型人才培养目标的要求，进一步提高基础性课程的教学质量，我们根据高职高专教育中数学课程教学基本要求，借鉴同类学校的教改成果，结合高职高专院校的教学特点、现状以及当前教学改革实际编写了本书。本书内容精简扼要、条理清楚、深入浅出、通俗易懂，例题、习题难易适度。

编者力求贯彻“应用为主、够用为度、学有所用、用有所学”的原则，使本书具有以下特点：

一、重视概念导入的实例背景，遵循实例—抽象—概念的形成过程。

二、淡化逻辑推理，内容中涉及性质与定理的内容，以图形描述或文字说明加以适当解释。

三、内容结构的安排上，以一元函数微积分为基础，面向不同专业的需求，设置了无穷级数、常微分方程、多元函数微积分、线性代数初步等模块，可根据不同专业需要及教学时数进行适当取舍。

本书由霍本瑶担任主审，郝艳莉、田长申任主编，王春香、徐东方、张彦周、马秋香任副主编。第 1 章由张彦周编写，第 2 章、第 8 章由郝艳莉编写，第 3 章由王春香编写，第 4 章、第 6 章由田长申编写，第 5 章由徐东方编写，第 7 章由马秋香编写。

本书在编写过程中，得到了学院领导及诸多同志的大力支持与协作，在此谨致以深切谢意。

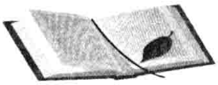
由于编者水平有限，且对高职高专教育数学课程和教学内容改革的研究还需深入，本教材如有不妥之处，恳请广大读者不吝赐教，批评指正。

编者

2015 年 5 月

# 目 录 CONTENTS

# 第一章



## 函数的极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象,它用来描述事物变化过程中变量之间的依赖关系.极限是贯穿高等数学的一个非常重要的基本概念,连续是函数的重要特性,连续函数是高等数学主要讨论的函数类型.本章将介绍函数、极限及连续的概念,为后续知识的学习奠定坚实的基础.

## 第一节　初等函数与分段函数

### 一、邻域

设 $a$ 与 $\delta$ 是两个实数,且 $\delta > 0$,集合 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,或简记为 $U(a)$.点 $a$ 称为邻域的中心,$\delta$ 称为邻域的半径.

$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$,即 $(a-\delta,a+\delta)$.

集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 $a$ 的空心邻域,记作 $U^0(a,\delta)$ 或简记为 $U^0(a)$.这里 $0 < |x-a|$ 表示 $x \neq a$.显然,$U^0(a,\delta)$ 是两个开区间的并集,即

$$(a-\delta,a) \cup (a,a+\delta).$$

例如,4 的 0.01 邻域为

$$U(4,0.01) = \{x \mid |x-4| < 0.01\};$$

4 的 0.01 空心邻域为

$$U^0(4,0.01) = \{x \mid 0 < |x-4| < 0.01\}.$$

### 二、函数概念

**1. 函数的定义**

在某一自然现象或社会现象中,往往同时存在几个变量,这些变量并不是孤立变化

的,而是相互联系并遵循一定的规律.

例如,圆的面积 $S$ 与半径 $r$ 有关系式:$S=\pi r^2$,如图 1.1.

不难看出,上面例子中 $S$ 与 $r$ 存在着确定的对应关系,函数就是描述变量之间相互关系的一个法则.

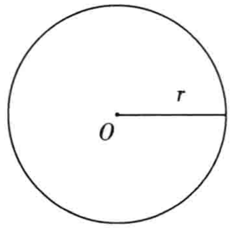


图 1.1

**定义 1.1** 设在某一变化过程中有两个变量 $x$ 和 $y$,变量 $x$ 的取值范围为非空集合 $D$,若存在一个对应法则 $f$,使得对于 $D$ 中的每个 $x$,按照对应法则 $f$ 都有唯一确定的 $y$ 值与之对应,则称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数,记作 $y=f(x)$,$x\in D$. $x$ 称为自变量,$y$ 称为因变量. $x$ 的变化范围 $D$ 称为函数的定义域.

当自变量在定义域 $D$ 中取定某一数值 $x_0$ 时,与之对应的 $y$ 值称为 $x_0$ 所对应的函数值,记为 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合称为函数的值域,记为 $M$.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的,若不考虑所讨论问题的实际意义,函数的定义域就是使表达式有意义的一切实数.

确定定义域应注意以下几点:

(1)分式的分母不能为零;

(2)偶次根式的被开方式大于等于零;

(3)对数函数的真数大于零;

(4)具体问题具体分析,如 $y=\arcsin x$,其定义域为 $[-1,1]$.

例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$,要使它有意义,自变量 $x$ 应满足不等式组 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}$,所以其定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

由函数的定义可知,定义域和对应规则是函数的两个重要因素. 两个函数相同,当且仅当它们的定义域相同,对应法则一样. 例如函数 $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $y=x\sqrt[3]{x-1}$,它们的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,而且对应关系也相同,因此,这两个函数是相同的;函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 是不同的函数关系,因为两者的定义域不同.

最常见的函数表示方法有以下三种:

(1)解析法. 将自变量与因变量之间的关系用数学式子表示的方法,称为解析法,也称为公式法.

(2)表格法. 利用表格表示函数关系的方法,称为表格法.

(3)图像法. 在坐标系中用图形来表示函数的关系的方法,称为图像法.

**2. 反函数**

**定义 1.2** 已知函数 $y=f(x)$,定义域为 $D$,值域为 $M$;若对于每一个 $y\in M$,通过 $y=f(x)$ 总有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应,则称由此所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数. 同时把 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由于习惯用 $x$ 表示自变量,用 $y$ 表示因变量,因此常常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$

写成 $y = f^{-1}(x)$ . $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数，易知，在直角坐标系下原函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像是关于 $y = x$ 对称的.

**例 1** 求函数 $y = 6x + 1$ 的反函数.

**解** 从 $y = 6x + 1$ 中解得 $x = \frac{1}{6}(y - 1)$ ,

将 $x$ 和 $y$ 互换，得到反函数为：$y = \frac{1}{6}(x - 1)$ .

**3. 函数的特性**

(1) 单调性

设函数 $f(x)$ 在 $I$ 上有定义，任取 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上是单调增加的；若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上是单调减少的. 单调增加与单调减少的函数统称为单调函数. 区间 $I$ 叫作单调区间.

例如，函数 $y = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加；函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少. 如图 1.2，图 1.3 所示.

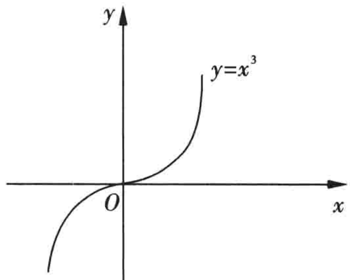



**图** 1.2

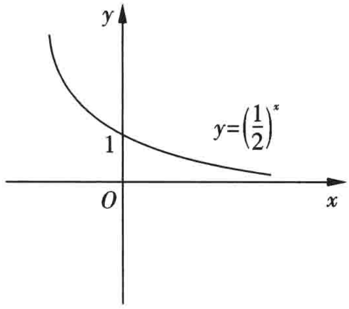



**图** 1.3

需要指出的是，函数的单调性是依赖于区间的，同一函数在定义域的不同范围内单调性可能不同，例如 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调减少，而在区间 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

(2) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上有定义，对于每一个 $x \in (-l, l)$，若有 $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；若有 $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数. 不是奇函数也不是偶函数的函数，称为非奇非偶函数.

例如 $y = \sin x$ , $y = x^3$ 是奇函数；$y = \cos x$ , $y = x^2$ 是偶函数；而 $y = x^2 - 2x + 2$ 是非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 $y$ 轴对称.

(3) 周期性

对于给定的函数 $f(x)$，若存在常数 $T \neq 0$，使得对于其定义域内的每一个 $x$，都有 $f(x + T) = f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数. $T$ 称为 $f(x)$ 的周期，通常称使得上式

成立的最小正数为$f(x)$ 的周期.

例如 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数.

(4)有界性

设函数$f(x)$ 在 $I$ 上有定义,如果存在一个常数 $M > 0$,使得对于每一个 $x \in I$ ,都有 $|f(x)| \leq M$ ,则称函数$f(x)$ 在 $I$ 上有界,否则称$f(x)$ 无界.

例如 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,因为对任意实数 $x$ ,恒有 $|\sin x| \leq 1$;而 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的; $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有下界而无上界.

## 三、初等函数

### 1. 基本初等函数

通常我们把常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六种函数称为基本初等函数.

(1)常量函数

形如 $y = c$ ( $c$ 是常数)的函数叫作常量函数. 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ,它的图像是经过点 $(0,c)$ 且与 $x$ 轴平行的直线,如图 1.4 所示.

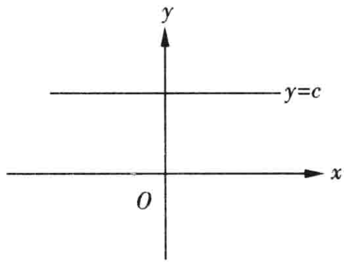



图 1.4

(2)幂函数

形如 $y = x^{\alpha}$ ( $\alpha$ 是任意实数)的函数叫作幂函数. 其定义域随指数 $\alpha$ 而定. 但无论 $\alpha$ 取何值,幂函数在 $(0, +\infty)$ 内总有定义. 图 1.5、图 1.6 和图 1.7 是常见的几个幂函数的图像.

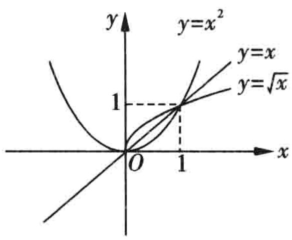



图 1.5

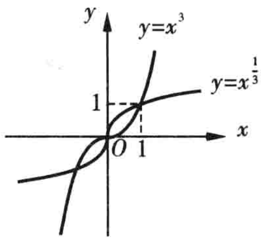



图 1.6

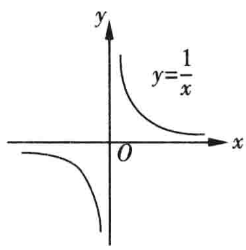



图 1.7

(3)指数函数

形如 $y = a^x$ ( $a > 0, a \neq 1$)的函数叫作指数函数. 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ,图像如图 1.8 所示.

(4)对数函数

形如 $y = \log_a x$ ( $a > 0, a \neq 1$)的函数叫作对数函数. 它是指数函数 $y = a^x$ 的反函数,其定义域为 $(0, +\infty)$ .

对数函数的图像如图 1.9 所示.

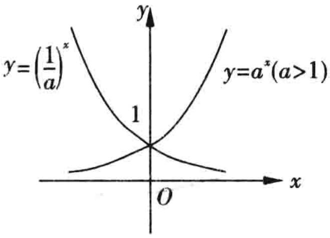



图 1.8

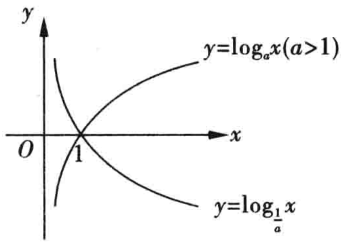



图 1.9

以 e 为底的对数称为自然对数,记作 $y = \ln x$ ;以 10 为底的对数称为常用对数,记作 $y = \lg x$ .

(5)三角函数

三角函数包括:正弦函数 $y = \sin x$ ,余弦函数 $y = \cos x$ ,正切函数 $y = \tan x$ ,余切函数 $y = \cot x$ ,正割函数 $y = \sec x$ ,余割函数 $y = \csc x$ .

$y = \sin x$ 及 $y = \cos x$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$ . 它们的图像分别如图 1.10 和图 1.11所示.

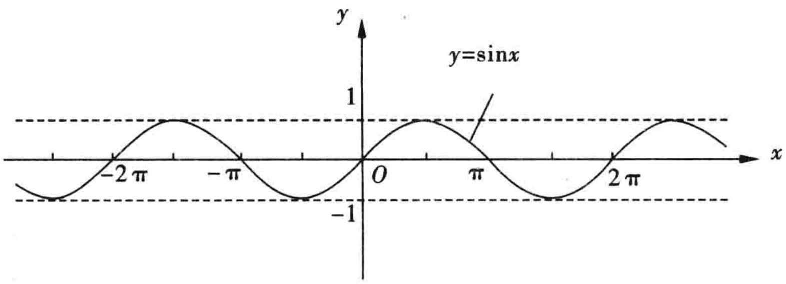



图 1.10

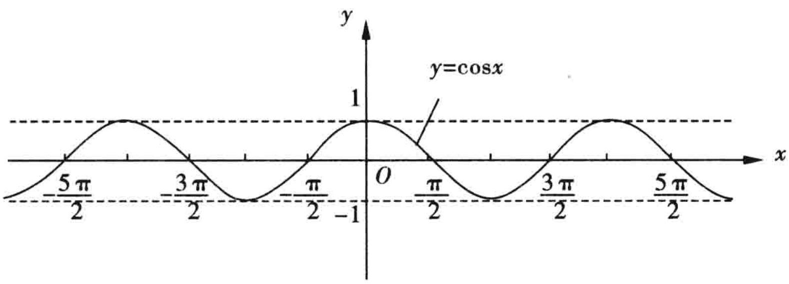



图 1.11

$y = \tan x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ , $y = \cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ . 它们的图像分别如图 1.12 和图 1.13 所示.

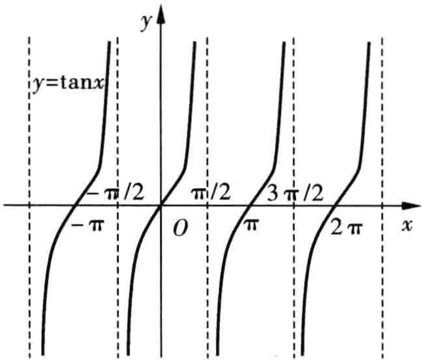



图 1.12

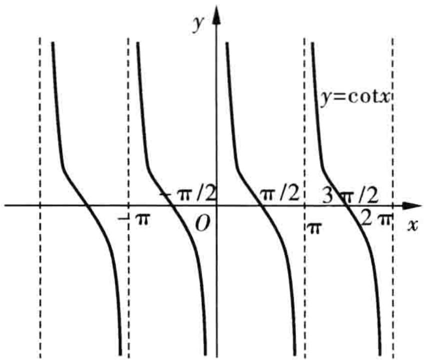



图 1.13

正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$，余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

(6)反三角函数

三角函数在给定区间上的反函数称为反三角函数. 常用反三角函数包括:反正弦函数 $y = \arcsin x$，反余弦函数 $y = \arccos x$，反正切函数 $y = \arctan x$，反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$.

$y = \arcsin x$ 和 $y = \arccos x$ 的定义域都是闭区间 $[-1,1]$，它们的图像分别如图 1.14 和图 1.15 所示.

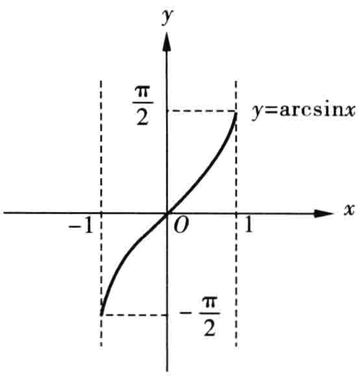



图 1.14

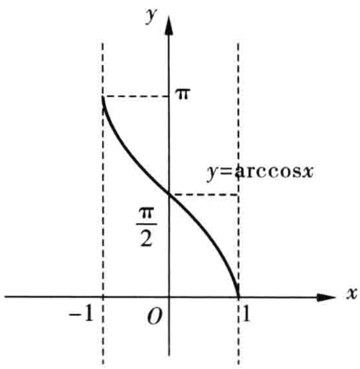



图 1.15

$y = \arctan x$ 和 $y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$，图像分别如图 1.16 和图 1.17 所示.

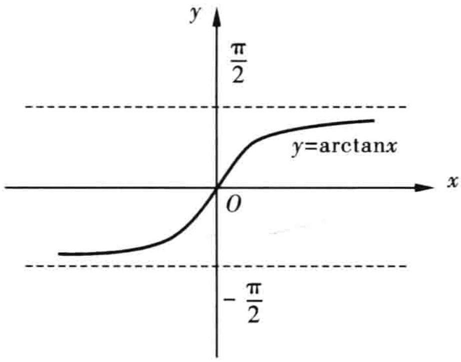



图 1.16

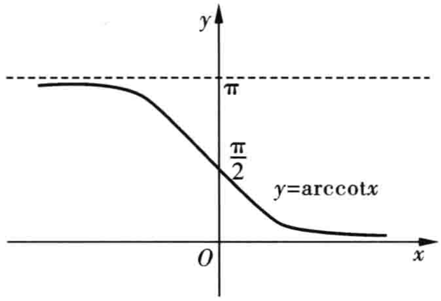



图 1.17

### 2. 复合函数

**定义** 1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D$，$u=\varphi(x)$ 的值域为 $M$，若 $D\cap M$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数. $x$ 为自变量，$y$ 为因变量，$u$ 称为中间变量.

例如，函数 $y=\sin u$ 和 $u=3x$ 可以构成复合函数 $y=\sin 3x$；函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 可以构成复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ . 复合函数的中间变量可以不止一个，例如，$y=\sin u$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{x}$，通过两个中间变量 $u$ 和 $v$ 可以构成复合函数 $y=\sin\ln\sqrt{x}$，其定义域为 $(0,+\infty)$.

相对于复合函数，我们称由基本初等函数经过有限次的四则运算所得到的函数为简单函数. 例如 $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$，$y=x\sin x+1$ 等都是简单函数.

**例 2** 指出下列函数分别是由哪几个简单函数复合而成的.

(1) $y=e^{\cos x}$；　(2) $y=5^{\ln\sin x}$；　(3) $y=\tan 2^{x^2+1}$.

**解** (1) $y=e^{\cos x}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=\cos x$ 两个函数复合而成的；

(2) $y=5^{\ln\sin x}$ 是由 $y=5^u$，$u=\ln v$，$v=\sin x$ 三个函数复合而成的；

(3) $y=\tan 2^{x^2+1}$ 是由 $y=\tan u$，$u=2^v$，$v=x^2+1$ 三个函数复合而成的.

**例 3** 求下列复合函数的定义域.

(1) $y=\arcsin 2x$；　(2) $y=\sqrt{\ln x}$.

**解** (1) $y=\arcsin 2x$ 是由 $y=\arcsin u$ 和 $u=2x$ 复合成的，在 $y=\arcsin u$ 中，要求 $-1\leqslant u\leqslant 1$，所以必须 $-1\leqslant 2x\leqslant 1$，即 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$，从而 $y=\arcsin 2x$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

(2) $y=\sqrt{\ln x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\ln x$ 复合成的，在 $y=\sqrt{u}$ 中，要求 $u\geqslant 0$，所以须有 $\ln x\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1$，从而 $y=\sqrt{\ln x}$ 的定义域为 $[1,+\infty)$.

**特别指出**：并非任意两个函数都可以构成一个复合函数，例如，$y=\sqrt{u}$ 和 $u=-x^2-1$ 就不能构成一个复合函数，这是因为 $u=-x^2-1$ 的值域为 $(-\infty,-1]$，$y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，两者的交集为空集. 这就是在定义 1.3 中要求 $D\cap M$ 非空的原因.