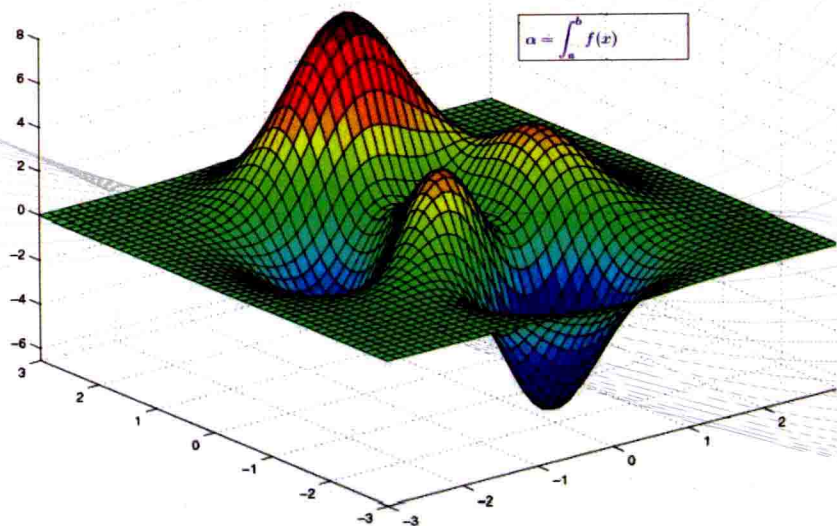


数学建模系列丛书



王积建 著

# 全国大学生

## 数学建模竞赛试题研究

### (下册)



国防工业出版社  
National Defense Industry Press

# 全国大学生数学建模 竞赛试题研究 (下册)

王积建 著



国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

从1999年至2013年,全国大学生数学建模竞赛专科组试题一共有30个,每年有C、D两题.本书针对每个赛题,按照竞赛要求完成了研究,以竞赛论文的形式体现,包含题目、摘要、关键词、问题重述、问题分析、模型假设、符号说明、模型的建立与求解、灵敏度分析、稳健性分析、模型优化或拓展、模型的评价和推广、参考文献等内容.

本书可供高等学校从事数学建模工作的教师与学生阅读,也可作为全国大学生数学建模竞赛培训教程使用.

### 图书在版编目(CIP)数据

全国大学生数学建模竞赛试题研究:全2册/王积建著. —北京:国防工业出版社,2015.5

ISBN 978-7-118-10214-7

I. ①全... II. ①王... III. ①高等数学—数学模型—竞赛题—研究 IV. ①O141.4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第125775号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

\*

开本 787×1092 1/16 印张 16 字数 400千字

2015年5月第1版第1次印刷 印数 1—3000册 总定价 68.00元  $\frac{35.00}{33.00}$ 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

## 前 言

全国大学生数学建模竞赛是由教育部高教司主办的、目前已成为全国高校规模最大的基础性学科竞赛,也是世界上规模最大的数学建模竞赛,其宗旨是培养大学生的创新意识和团队精神.它创办于1992年,每年一届,截至2014年,已经举办了23届.以2014年来说,全国33个省/市/自治区(包括香港和澳门特区)及新加坡、美国的1338所院校、25347个队(其中本科组22233队,占总数的88%;专科组3114队,占总数的12%)、7万多名大学生报名参加了竞赛.

全国大学生数学建模竞赛组委会主任,中国科学院院士李大潜教授在数学建模竞赛20周年庆典上曾指出:“数学建模现已成为发展现代应用数学的重要突破口和核心内容.今天,应用数学正处于迅速地从传统的应用数学进入现代应用数学的发展阶段,数学的应用范围空前扩展,从传统的力学、物理等领域拓展到化学、生物、经济、金融、信息、材料、环境、能源……等各个学科及种种高科技甚至社会领域.由于很多新领域的规律还在探索之中,有关的数学建模并非轻而易举,而是具有实质性的困难,至今仍是我们面临的严峻挑战.因此,数学建模不仅进一步凸现了它的重要性,而且已成为现代应用数学的一个重要组成部分,并为应用数学乃至整个数学科学的发展提供了进一步的机遇和广阔的前景.”他进一步指出“数学教育本质上是一种素质教育……学生通过参加数学建模的实践,亲自参加将数学应用于实际的尝试,亲自参加发现和创造的过程,可以取得在课堂里和书本上所无法获得的宝贵经验和亲身感受,必能启迪他们的数学心智,促使他们更好地应用数学、品味数学、理解数学和热爱数学.这样做,不仅融对知识、能力和素质之培养与考查三位一体,而且面向所有专业的大学生,得到越来越多同学的参与和欢迎,是对素质教育的重要贡献,有力地促进了创新型优秀人才的培养.”

好的赛题是竞赛成功的关键.每个赛题都要在全国范围内征集,再经过组委会的精心遴选和充分论证才能形成.竞赛只有3天时间,即使是获得全国一等奖的优秀论文,也存在很多不足和缺憾,有的甚至有明显的错误,使得赛题研究成果不能直接被利用.另外,从竞赛组织方来说,这种状况使得数学建模竞赛有虎头蛇尾之嫌,留下一些遗憾.为了解决这个问题,从2012年开始,竞赛组委会倡导广大竞赛指导教师开展“赛后继续研究”,于是《全国大学生数学建模竞赛试题研究》就成为著者的研究选题.

我国职业技术学院发展很快.从教育部网站可查得,截至2012年底,高职高专院校总数达到1297所,在校学生数335.56万人,占学生总数的58%,而本科院校为1145所,在校学生数247.55万人,占学生总数的42%.虽然高职高专院校的数量和学生数均已超过本科院校,但参赛学生数却远远低于本科院校(仅占参赛学生总数的12%).由于参赛学生是层层筛选来的,因此可以估计,参加数学建模普及教育的高职高专学生也占大学生总数的12%.换句话说,占学生总数58%的大学生,接受数学建模课程教育的学生仅有12%,比例严重失调!

可见,在数学建模课程受益面上,高职高专院校和本科院校的差距很大.造成这种状况的原因之一,是在数学建模教学中,高职高专院校普遍缺乏全国一等奖的优秀论文范本,即正确

无误的、完整无缺的、符合竞赛规范的研究论文。由于缺乏全国一等奖的优秀论文范本供教师或学生学习时使用,所以高职高专院校学生普遍欠缺驾驭大型问题的能力,即解决竞赛试题的能力。从2010年开始,全国组委会在每年竞赛结束后都要召开全国性赛题分析会议,在会议上经常听到高职高专院校指导教师提出,能否把获得全国一等奖的论文的原版提供给他们作为参考和培训材料。可见,广大教师对获奖优秀论文的需求是多么强烈!正因为数学建模普及教学中忽略了真实赛题的实战训练,使得当参赛学生面对真实赛题的时候屡屡失败而放弃比赛,严重挫伤了学生的自信心和积极性。因此,作者将专科组赛题作为研究对象。

从1999年开始,全国大学生数学建模竞赛将本科组和专科组分开进行,专科组试题每年有2个,截至2013年,一共30个。我们将30个赛题的研究论文结集出版,共分上、下册。本书具有以下特点:

(1) 系统而全面。包含了从1999年以来的所有专科组赛题,具有一定的收藏价值。

(2) 论文写作的范本。每篇论文都按照竞赛论文的写作要求,包含题目、摘要、关键词、问题重述、问题分析、模型假设、符号说明、模型的建立与求解、灵敏度分析、稳健性分析、模型优化或拓展、模型的评价和推广、参考文献、附录等内容。

(3) 研究过程和结果无差错。每一个赛题的研究水平高于全国获奖的优秀论文。事实上,全国获奖的优秀论文或多或少存在不足或错误之处。

(4) 博采众长。每一个赛题的研究过程参考借鉴了同一个题目的所有公开发表的论文。

(5) 方法简单。适合高职高专院校教师和学生数学建模培训中使用。

以上特点也是作者在研究过程中努力追求的目标。在赛题研究过程中,得到了组委会副主任陈叔平教授和组委会秘书长谢金星教授的鼓励和支持,也得到了组委会专家叶其孝教授、鲁习文教授、吴孟达教授和浙江省大学生数学建模竞赛组委会委员陈笑缘教授的鼓励和支持,特别是吴孟达教授亲自指导作者开展赛题研究,在此一并表示衷心的感谢。

没有最好,只有更好!在赛题研究过程中,作者深切感到,随着研究和思考的不断深入,需要进一步研究探索的问题越来越多,希望本研究能够起到抛砖引玉的作用,也希望越来越多的同行们加入到数学建模竞赛的后续研究队伍中来。由于作者水平和能力有限,书中难免存在不足甚至错误之处,欢迎广大读者不吝指正,作者的电子邮件地址是:wang-jijian@163.com。

作者  
2015年3月

# 目 录

第 1 章	2007C	手机“套餐”优惠几何	1
第 2 章	2007D	体能测试时间安排	24
第 3 章	2008C	地面搜索	40
第 4 章	2008D	NBA 赛程的分析与评价	51
第 5 章	2009C	卫星或飞船的跟踪测控	70
第 6 章	2009D	会议筹备	82
第 7 章	2010C	输油管的布置	98
第 8 章	2010D	对学生宿舍设计方案的评价	116
第 9 章	2011C	企业退休职工养老金制度的改革	129
第 10 章	2011D	天然肠衣搭配问题	145
第 11 章	2012C	脑卒中发病环境因素分析及干预	160
第 12 章	2012D	机器人避障问题	181
第 13 章	2013C	古塔的变形	200
第 14 章	2013D	公共自行车服务系统	218
附录	2007—2013	年专科组赛题	237

# 第 1 章 2007C 手机“套餐”优惠几何

## 摘要

本文针对手机套餐话费的计算、套餐评价、改造和设计问题进行了研究。

对于问题(1),建立了现行套餐方案的月话费计算公式,公式里包含了所有明码标价的收费项目.以此为基础,将北京“畅听 99 套餐”里与现行套餐不同的收费项目进行特殊处理,就得到了北京“畅听 99 套餐”的月话费计算公式.同理,上海“全球通 68 套餐”的月话费计算公式也这样处理.将用户划分为确定性用户与风险型用户,分别给出了北京、上海确定性用户与风险型用户选择话费最省套餐的标准.

对于问题(2),使用数据包络分析法对各个套餐的相对有效性进行评价,建立了  $C^2R$  模型.具体来说,就是从投入产出效率上分析各个套餐是否 DEA 有效,对于非 DEA 有效的套餐通过改造成为 DEA 有效的套餐.

使用  $C^2R$  模型对北京“畅听 99 套餐”进行评价,结果显示,99 套餐和 299 套餐是 DEA 有效的,而 139 套餐和 199 套餐是非 DEA 有效的,于是对它们进行了改造,改造后没有降低移动公司的收入.

使用  $C^2R$  模型对上海“全球通 68 套餐”进行评价,结果显示,188 套餐是 DEA 有效的,而 68 套餐和 128 套餐是非 DEA 有效的,于是对它们进行了改造,改造后没有降低移动公司的收入.

对于问题(3),从定性分析和定量分析的角度对“被叫全免费计划”套餐进行了评价.定性分析结果表明,“被叫全免费计划”套餐有利于移动公司而不利于用户,但对接听通话量很大的用户,如老人、儿童等,还是划算的.

定量分析仍然使用数据包络分析法.建立了与问题(2)不同的  $C^2R$  模型.评价结果显示,“被叫全免费计划”套餐是非 DEA 有效的.改造后,移动公司收入降低率为 9.92%.

对于问题(4),使用数据包络分析法,为北京用户设计了一款“88 单向收费”套餐,为上海用户设计了一款“66 单向收费”套餐.

北京“88 单向收费”套餐,包括“88、188、288、388”4 个套餐.上海“66 单向收费”套餐,包括“66、166、266”3 个套餐.这两款套餐都是 DEA 有效的,而且移动公司的收入降低率不超过 10%.

对参数灵敏性分析结果显示,本地主叫通话资费对本地通话费的影响很小,但包含本地主叫分钟数对通话费的影响较大.

稳健性分析结果显示,改造后的套餐对于用户选择套餐的盲目性是非常稳健的.

在模型拓展阶段,在  $C^2R$  模型中引入了移动公司收入降低率的约束条件,可以起到有目的地调节移动公司和用户双方利益的作用,从而得到了更一般的  $C^2R$  模型.

最后对建立的模型进行了评价和推广.

本文使用 MATLAB 软件、LINGO 软件进行计算.

**关键词:**数据包络分析法; $C^2R$  模型;确定性用户;风险型用户;套餐设计

## 1.1 问题重述

手机资费一直是人们关心的热点. 市场上出现的“单向收费”套餐让人眼花缭乱, 人们不禁要问: 手机“套餐”究竟优惠几何?

请参照中国移动公司现行的资费标准和北京的全球通“畅听 99 套餐”、上海的“全球通 68 套餐”方案, 建立数学模型分析研究下列问题:

(1) 给出北京、上海各“套餐”方案的资费计算方法, 并针对不同(通话量)需求的用户, 给出选择套餐的标准.

(2) 提出对各种资费方案的评价准则和方法, 据此对北京、上海推出的“套餐”方案与现行的资费标准作出评价.

(3) 针对全球通“被叫全免费计划”方案进行评价.

(4) 结合北京、上海的实际情况, 在较现有“套餐”方案运营商的收入降低不超过 10% 的条件下, 设计一个合理的套餐方案.

## 1.2 问题分析

### 1.2.1 研究现状综述

邱华等<sup>[1]</sup>在建立套餐月话费计算公式上考虑的收费项目不全面, 给出的关于各种套餐分别适用哪类用户的标准不尽合理. 在评价套餐时使用了边际分析法、“纳特—伯特兰均衡”模型. 在对“被叫全免费计划”套餐分析评价时只是作了定性分析, 而没有建立明确的数学模型. 在设计新套餐时, 在原有套餐的基础上通过建立线性规划模型进行了设计.

李蓬蓬等<sup>[2]</sup>建立了比较详细的套餐话费计算公式, 但给出的关于各种套餐分别适用哪类用户的标准不尽合理. 给出了 6 个评价套餐的标准, 但评价方法有不尽合理之处. 在对“被叫全免费计划”套餐分析评价时只是作了泛泛地分析, 而没有建立明确的数学模型. 在设计新套餐时, 引入了吸引力函数, 建立线性规划模型进行了设计, 但吸引力函数的合理性还值得再考虑.

韩中庚<sup>[3]</sup>建立了很详细的手机话费计算公式, 建立了手机套餐的加权综合评价模型, 并对北京“畅听 99 套餐”、上海“全球通 68 套餐”“被叫全免费计划”套餐进行了评价. 在评价模型的基础上, 结合北京“畅听 99 套餐”和上海“全球通 68 套餐”, 分别建立了线性规划模型, 对原套餐进行了改进. 最后对竞赛论文进行了评述.

徐思等<sup>[4]</sup>分别用层次分析法和模糊综合评判法建立数学模型, 对各个套餐进行评价, 从而得到了各类用户适合的套餐类型, 但使用层次分析法是否得当值得商榷.

杨徐昕等<sup>[5]</sup>在建立套餐月话费计算公式上考虑的收费项目不全面. 在评价套餐时仅仅从用户利益最大的角度出发是不妥的. 建立了优化递推模型来设计新套餐.

张男男等<sup>[6]</sup>在建立套餐月话费计算公式上忽略次要因素, 只考虑主要因素, 故考虑的收



费项目不全面. 在设计新套餐时引入了用户数分布函数.

朱月珍等<sup>[7]</sup>仅仅解决了问题(1), 而且在建立套餐月话费计算公式上考虑的收费项目不全面.

刘广会等<sup>[8]</sup>也是只讨论了问题(1), 使用分段函数和比例方法建立了手机套餐优惠程度的模型, 针对不同套餐确定了适用北京和上海用户主叫通话量的平衡点.

总之, 现有文献在解决问题(1)时有的存在收费项目不全面的缺陷. 在评价套餐时有的方法欠妥, 多数论文是从套餐的功能和适用性上入手的. 在设计套餐时多数论文建立了线性规划模型.

### 1.2.2 本文研究思路

本文使用数据包络分析法(简称 DEA 方法), 对各个套餐的相对有效性进行分析. 具体来说, 从套餐内部各个指标的匹配性角度分析, 从投入产出效率上比较分析, 重点考查套餐是否 DEA 有效, 即投入指标是否存在闲置浪费现象, 而产出指标是否存在一定的不足现象. 对于非 DEA 有效的套餐通过改造成为 DEA 有效的套餐. 最后使用 DEA 方法设计一款全新的手机套餐.

针对问题(1), 将所有手机收费项目引入计算公式中, 建立详尽的计算公式. 对于用户选择话费最省套餐的标准, 将用户区分为确定型用户与风险型用户, 分别给出北京、上海确定型用户与风险型用户的选择标准.

针对问题(2), 使用 DEA 方法建立评价模型, 对北京“畅听 99 套餐”、上海“全球通 68 套餐”的各个套餐的相对有效性进行评价, 找出哪些套餐是 DEA 有效的, 哪些套餐是非 DEA 有效的. 将非 DEA 有效的套餐改造成为 DEA 有效的套餐.

针对问题(3), 通过定性分析和定量分析对“被叫全免费计划”套餐进行评价, 在定量分析中使用 DEA 方法, 并将它改造成为 DEA 有效的套餐.

针对问题(4), 使用 DEA 方法, 分别为北京、上海用户设计一款全新的单向收费套餐. 最后对参数进行灵敏度分析, 对模型进行稳健性分析, 以及对模型进行适度的拓展. 本文解题路径如图 1-1 所示.

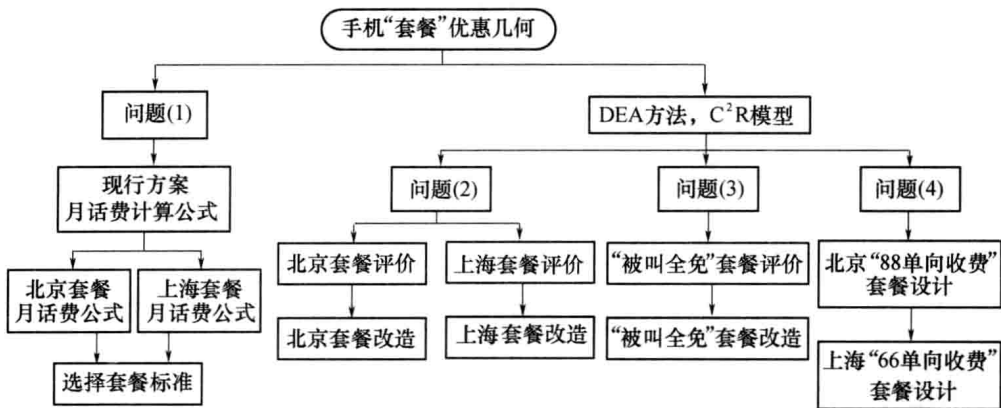


图 1-1 本文解题路径

## 1.3 符号说明

$y_0$ :月租费(元)	$y_1$ :本地通话费(元)
$y_2$ :漫游通话费(元)	$y_3$ :国内短信费(元)
$y_4$ :国际短信费(元)	$y$ :月话费(元)
$x$ :投入指标向量	$z$ :产出指标向量
$\rho$ :移动公司收入降低率	$\theta$ :产出投入比
$p$ :现行套餐 IP 国内长途资费(元/min)	$a$ :IP 国内长途通话量(min)
[c]:对 c 向上取整	

## 1.4 模型假设

为了简化问题,作如下假设:

- (1) 以 1 个月为话费结算周期.
- (2) 国际漫游资费忽略不计.
- (3) 国际短信费仅包括在中国大陆地区发送国际短信至中国大陆以外地区运营用户的资费,其余短信费忽略不计.
- (4) 北京“畅听 99 套餐”除了题目里的规定外,其他方面与现行套餐相同.
- (5) 呼叫转移状态下网内 0.1 元/min,网外 0.2 元/min,网内与网外通话量相等.
- (6) 上海“全球通 68 套餐”除了题目里的规定外,其他方面与现行套餐相同.
- (7) 风险型用户本地主叫与被叫通话量相等.
- (8) 评价套餐的指标:月租费(元/月)、包含本地主叫分钟数(min)、套餐内本地主叫资费优惠量(元/min)、套餐外本地主叫资费优惠量(元/min)、IP 国内长途资费优惠量(元/min). 各个指标的定义如下:

套餐内本地主叫资费优惠量 = 现行套餐的本地主叫资费 - 新套餐的套餐内本地主叫资费

套餐外本地主叫资费优惠量 = 现行套餐的本地主叫资费 - 新套餐的套餐外本地主叫资费

IP 国内长途资费优惠量 = 现行套餐 IP 国内长途资费 - 新套餐的 IP 国内长途资费

- (9) 用户能够根据自己的历史经验选择适合自己的套餐. 也就是说,用户的本地主叫通话量不超过包含本地主叫分钟数.
- (10) 北京“88 单向收费”套餐除了明确的规定外,其他方面与现行套餐相同.
- (11) 上海“66 单向收费”套餐除了明确的规定外,其他方面与现行套餐相同.

## 1.5 模型的建立与求解

### 1.5.1 问题(1)的解决

建模思路:该问题包括 2 个小问题. 第 1 个小问题要求建立北京“畅听 99 套餐”、上海“全球通 68 套餐”的资费计算公式. 第 2 个小问题要求为不同通话量用户给出选择合适套餐的标

准,只要将新套餐与现行套餐的月话费比较大小,通过寻找最低月话费对应的通话量区间,就给出了不同通话量用户的话费最省套餐标准.

### 1. 现行套餐的资费计算公式

根据假设(1)~(3),将月话费分为月租费  $y_0$ 、本地通话费  $y_1$ 、漫游通话费  $y_2$ 、国内短信费  $y_3$ 、国际短信费  $y_4$ ,则月话费为

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \quad (1-1)$$

#### 1) 本地通话费 $y_1$

将本地通话费  $y_1$  分为主叫当地通话费  $y_{11}$ 、直拨国内长途通话费  $y_{12}$ 、直拨国际长途通话费  $y_{13}$ 、拨中国移动 IP (国内、国际) 通话费  $y_{14}$ 、被叫通话费  $y_{15}$ , 对应的通话量分别为  $t_{11}$ 、 $t_{12}$ 、 $t_{13}$ 、 $t_{14}$ 、 $t_{15}$ , 则

$$y_1 = y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} \quad (1-2)$$

$$y_{11} = 0.4t_{11} \quad (1-3)$$

$$y_{12} = \begin{cases} 0.4t_{12} + 0.04 \left\lceil \frac{60t_{12}}{6} \right\rceil, & 0:00 \sim 7:00 \\ 0.4t_{12} + 0.07 \left\lceil \frac{60t_{12}}{6} \right\rceil, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-4)$$

$$y_{13} = \begin{cases} 0.4t_{13} + 0.2 \left\lceil \frac{60t_{13}}{6} \right\rceil, & \text{港澳台} \\ 0.4t_{13} + 0.8 \left\lceil \frac{60t_{13}}{6} \right\rceil, & \text{其他国家} \end{cases} \quad (1-5)$$

$$y_{14} = \begin{cases} (0.4 + 0.3)t_{14}, & \text{国内} \\ (0.4 + 1.5)t_{14}, & \text{港澳台} \\ (0.4 + 2.4)t_{14}, & \text{加拿大、美国} \\ (0.4 + 3.6)t_{14}, & \text{英法等 13 国家} \\ (0.4 + 4.6)t_{14}, & \text{其他国家} \end{cases} \quad (1-6)$$

$$y_{15} = 0.4t_{15} \quad (1-7)$$

#### 2) 漫游通话费 $y_2$

将漫游通话费  $y_2$  分为主叫漫游地当地通话费  $y_{21}$ 、直拨国内国际长途通话费  $y_{22}$ 、拨中国移动 IP (国内、国际) 通话费  $y_{23}$ 、作被叫接听漫游地当地通话费  $y_{24}$ 、作被叫接听漫游地以外电话通话费  $y_{25}$ , 对应的通话量分别为  $t_{21}$ 、 $t_{22}$ 、 $t_{23}$ 、 $t_{24}$ 、 $t_{25}$ , 则

$$y_2 = y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + y_{25} \quad (1-8)$$

$$y_{21} = 0.6t_{21} \quad (1-9)$$

$$y_{22} = \begin{cases} 0.6t_{22} + 0.04 \left\lceil \frac{60t_{22}}{6} \right\rceil, & 0:00 \sim 7:00 \\ 0.6t_{22} + 0.07 \left\lceil \frac{60t_{22}}{6} \right\rceil, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-10)$$

$$y_{23} = \begin{cases} (0.6 + 0.3)t_{23}, & \text{国内} \\ (0.6 + 1.5)t_{23}, & \text{港澳台} \\ (0.6 + 2.4)t_{23}, & \text{加拿大、美国} \\ (0.6 + 3.6)t_{23}, & \text{英、法等 13 国家} \\ (0.6 + 4.6)t_{23}, & \text{其他国家} \end{cases} \quad (1-11)$$

$$y_{24} = 0.6t_{24} \quad (1-12)$$

$$y_{25} = \begin{cases} 0.6t_{25} + 0.04 \left\lceil \frac{60t_{25}}{6} \right\rceil, & 0:00 \sim 7:00 \\ 0.6t_{25} + 0.07 \left\lceil \frac{60t_{25}}{6} \right\rceil, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-13)$$

### 3) 国内短信费 $y_3$

将国内短信费  $y_3$  分为中国移动手机短信费  $y_{31}$ 、中国网通、联通及固定电话的网间电话短信费  $y_{32}$ ，对应的短信数量分别为  $t_{31}$ 、 $t_{32}$ （条），则

$$y_3 = y_{31} + y_{32} = 0.1t_{31} + 0.15t_{32} \quad (1-14)$$

### 4) 国际短信费 $y_4$

国际短信费  $y_4$  仅为在中国大陆地区发送国际短信至中国大陆以外地区运营用户的资费  $y_{41}$ 、对应的短信数量为  $t_{41}$ （条），则

$$y_4 = y_{41} = 1 \times t_{41} \quad (1-15)$$

**【例 1】** 移动公司某全球通电话用户某月的通信信息如下。

本地通话：主叫当地通话 54min。直拨国内长途通话 0:00 ~ 7:00 是 5min，其他时段 6min。直拨国际长途通话港澳台 7min，其他国家 4min。拨中国移动 IP（国内、国际）通话，国内 5min，港澳台 4min，加拿大、美国 3min，英、法等 13 国 2min，其他国家 1min。被叫通话 54min。

漫游通话：主叫漫游地当地通话 8min。直拨国内国际长途通话 0:00 ~ 7:00 是 7min，其他时段 6min。拨中国移动 IP（国内、国际）通话，国内 5min，港澳台 4min，加拿大、美国 3min，英、法等 13 国 2min，其他国家 1min。作为被叫接听漫游地当地通话 9min。作为被叫接听漫游地以外电话通话，0:00 ~ 7:00 是 13min，其他时段 14min。

国内短信：中国移动手机短信 28 条。中国网通、联通及固定电话的网间电话短信 30 条。

国际短信：在中国大陆地区发送国际短信至中国大陆以外地区运营用户的短信数量 5 条。

根据式(1-1)计算，该用户的话费为 266.70 元。

## 2. 北京“畅听 99 套餐”的资费计算公式

北京“畅听 99 套餐”的规定有：

(1) 北京“畅听 99 套餐”所包含的免费被叫通话是指北京全球通用户在本地接听的所有来话（接听 12590 \*、12586 \*、13800100600 的通话除外），用户漫游至外地的被叫不包含在内。

(2) 北京“畅听 99 套餐”所包含的本地主叫通话是指北京全球通用户在北京地区的所有基本通话和所有长途/IP 长途电话的基本通话部分，用户漫游至外地的主叫不包含在内。

(3) 拨打 12590 \*、12586 \*、12588、12530、13800100600、12121 的通话分钟数，不计入主叫免费时间内。

(4) 在呼叫转移状态下,按呼叫转移的资费标准收费.

(5) 各档套餐包含的本地主叫免费通话时间当月有效,不累计到下月.

根据以上规定,北京“畅听 99 套餐”继续保持了 3 个收费项目:一是接听 12590 \*、12586 \*、13800100600 的通话费;二是拨打 12590 \*、12586 \*、12588、12530、13800100600、12121 的通话费(简称 A 项);三是呼叫转移状态下的通话费(简称 B 项).在现行套餐的基础上还增加了 3 个收费项目:数据业务费、彩信费、17951 国内 IP 长途费(简称 C 项).

根据假设(4),在现行套餐话费计算公式的基础上,进行相应的修改,即

$$y_0 = (99, 139, 199, 299)$$

令  $t = t_{11} + t_{12} + t_{13} + t_{14}$ , 则  $t$  在现行套餐里表示本地主叫通话量,在北京“畅听 99 套餐”里表示不含保持或新增的 A 项、B 项、C 项的本地主叫通话量.将式(1-1)里的  $y_1$  定义为

$$y_1 = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \alpha_i \\ k_i(t - \alpha_i), & t \geq \alpha_i \end{cases}, i = 1, 2, \dots, 4 \quad (1-16)$$

其中

$$\alpha = (280, 560, 1000, 2000)$$

$$k = (0.35, 0.25, 0.2, 0.15)$$

被叫通话费  $y_{15}$  定义为只包括接听 12590 \*、12586 \*、13800100600 的通话费,相应的通话量为  $t_{15}$ , 即

$$y_{15} = \begin{cases} 0.4t_{15} + 0.04 \left\lceil \frac{60t_{15}}{6} \right\rceil, & 0:00 \sim 7:00 \\ 0.4t_{15} + 0.07 \left\lceil \frac{60t_{15}}{6} \right\rceil, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-17)$$

通话费  $y_{16}$  定义为拨打 12590 \*、12586 \*、12588、12530、13800100600、12121 的通话费,相应的通话量为  $t_{16}$ , 即

$$y_{16} = \begin{cases} 0.4t_{16} + 0.04 \left\lceil \frac{60t_{16}}{6} \right\rceil, & 0:00 \sim 7:00 \\ 0.4t_{16} + 0.07 \left\lceil \frac{60t_{16}}{6} \right\rceil, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-18)$$

$y_{17}$  定义为呼叫转移状态下的通话费,相应的通话量为  $t_{17}$ , 根据假设(5), 有

$$y_{17} = 0.15t_{17} \quad (1-19)$$

数据流量费为

$$y_{18} = 1.024(s - \gamma_i) \quad (1-20)$$

式中  $s$ ——数据流量(MB), 单价为 1.024(元/MB);

$$\gamma = (10, 10, 50, 50)$$

彩信费为

$$y_{19} = 0.5(u - \phi_i). \quad (1-21)$$

式中  $u$ ——彩信数量(条), 单价为 0.5(元/条);

$$\phi = (0, 25, 0, 0).$$

$y_{1,20}$  定义为 17951 国内 IP 长途费,相应的通话量为  $t_{20}$ ,则

$$y_{1,20} = 0.1t_{20} \quad (1-22)$$

北京“畅听 99 套餐”的月话费计算公式为

$$y = y_0 + y_1 + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{1,20} + y_2 + y_3 + y_4 \quad (1-23)$$

**【例 2】** 北京移动公司某全球通电话用户购买了“99 套餐”,其某月的通信信息如下。

本地通话:主叫 91min,被叫 54min. 接听 12590 \*、12586 \*、13800100600 的通话,0:00 ~ 7:00 是 6min,其他时段 7min. 拨打 12590 \*、12586 \*、12588、12530、13800100600、12121 的通话,0:00 ~ 7:00 是 13min,其他时段 16min. 呼叫转移状态下的通话 17min. 数据流量 20MB. 彩信数量 12 条. 17951 国内 IP 长途通话 11min.

漫游通话:主叫漫游地当地通话 8min. 直拨国内国际长途通话 0:00 ~ 7:00 是 7min,其他时段 6min. 拨中国移动 IP(国内、国际)通话,国内 5min,港澳台 4min,加拿大、美国 3min,英、法等 13 国 2min,其他国家 1min. 作为被叫接听漫游地当地通话 9min. 作为被叫接听漫游地以外电话通话,0:00 ~ 7:00 是 13min,其他时段 14min.

国内短信:中国移动手机短信 28 条. 中国网通、联通及固定电话的网间电话短信 30 条.

国际短信:在中国大陆地区发送国际短信至中国大陆以外地区运营商用户的短信数量 5 条.

根据式(1-23)计算,该用户的话费为 263.39 元.

### 3. 上海“全球通 68 套餐”的资费计算公式

根据假设(6),在现行套餐月话费计算公式的基础上,进行相应的修改,即

$$y_0 = (68, 128, 188)$$

同样令  $t = t_{11} + t_{12} + t_{13} + t_{14}$ ,则  $t$  在上海“全球通 68 套餐”里表示本地主叫通话量. 将式(1-1)里的  $y_1$  定义为

$$y_1 = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \alpha_i \\ k_i(t - \alpha_i), & t \geq \alpha_i \end{cases}, i = 1, 2, 3 \quad (1-24)$$

其中

$$\alpha = (360, 800, 1200)$$

$$k = (0.18, 0.16, 0.13)$$

被叫通话费  $y_{15} = 0$ .

于是上海“全球通 68 套餐”的月话费计算公式为

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \quad (1-25)$$

**【例 3】** 上海移动公司某全球通电话用户购买了“68 套餐”,某月的通信信息如下。

本地通话:主叫 91min. 被叫通话不计.

漫游通话:主叫漫游地当地通话 8min. 直拨国内国际长途通话 0:00 ~ 7:00 是 7min,其他时段 6min. 拨中国移动 IP(国内、国际)通话,国内 5min,港澳台 4min,加拿大、美国 3min,英、法等 13 国 2min,其他国家 1min. 作为被叫接听漫游地当地通话 9min. 作为被叫接听漫游地以外电话通话,0:00 ~ 7:00 是 13min,其他时段 14min.

国内短信:中国移动手机短信 28 条. 中国网通、联通及固定电话的网间电话短信 30 条.

国际短信:在中国大陆地区发送国际短信至中国大陆以外地区运营商用户的短信数量

5 条.

根据式(1-25)计算,该用户的话费为 172.00 元.

#### 4. 建立用户选择话费最省套餐的标准

不论是北京“畅听 99 套餐”还是上海“全球通 68 套餐”,与现行套餐相比,最大的吸引力是“单向收费”,且未超出包含本地主叫通话量的通话时间不收费,因为这部分费用已经包含在月租费里了.

在实际购买套餐中,有的用户非常有把握能够确定自己的通话时间不会超过包含本地主叫通话量,如业务量较少的老人、儿童、学生等,这里把他们称为确定型用户. 而有的用户没有把握确定自己的通话时间是否会超过包含本地主叫通话量,如业务量较多的白领等,这里称为风险型用户. 在为用户建立话费最省套餐的标准时,要将确定型用户和风险型用户区分对待.

##### 1) 确定型用户话费最省套餐

对于确定型用户,由于他的通话时间不会超过包含本地主叫通话量,所以在现行套餐和新套餐里究竟选择哪个较好,取决于月租费  $y_0$  承担的本地主叫通话量. 只有当用户的本地主叫通话量处于月租费  $y_0$  承担的本地主叫通话量之内时,该套餐才是话费最省套餐.

设新套餐第  $i$  个套餐的月租费为  $y_{0i}, i=1, 2, \dots, n$ . 如果按照现行套餐的收费方式,本地通话资费为  $p_0$  (元/min),则第  $i$  个套餐的月租费承担的通话量为  $\frac{y_{0i}}{p_0}$ , 于是用户选择话费最省套餐的标准如表 1-1 所示.

表 1-1 用户选择话费最省套餐的标准

本地主叫通话量	$[0, \frac{y_{01}}{p_0})$	$[\frac{y_{01}}{p_0}, \frac{y_{02}}{p_0})$	$[\frac{y_{02}}{p_0}, \frac{y_{03}}{p_0})$	...	$[\frac{y_{0n}}{p_0}, +\infty)$
套餐	现行套餐	新套餐 1	新套餐 2	...	新套餐 $n$

根据表 1-1,北京用户选择话费最省套餐的标准如表 1-2 所示.

表 1-2 北京用户选择话费最省套餐的标准

本地主叫通话量	$[0, 247.5)$	$[247.5, 347.5)$	$[347.5, 497.5)$	$[497.5, 747.5)$	$[747.5, +\infty)$
套餐	现行套餐	99 套餐	139 套餐	199 套餐	299 套餐

根据表 1-1,上海用户选择话费最省套餐的标准如表 1-3 所示.

表 1-3 上海用户选择话费最省套餐的标准

本地主叫通话量	$[0, 170)$	$[170, 320)$	$[320, 470)$	$[470, +\infty)$
套餐	现行套餐	68 套餐	128 套餐	188 套餐

##### 2) 风险型用户话费最省套餐

对于风险型用户,由于他的通话时间极有可能超过包含本地主叫通话量,所以在现行套餐和新套餐里究竟选择哪个较好,取决于月租费  $y_0 + y_1$  最省,只有当用户选择了  $y_0 + y_1$  最省的套餐时,该套餐才是话费最省套餐.

设本地主叫通话量为  $t$  (min),根据假设(7),风险型用户本地主叫与被叫通话量相等,则现行方案的月话费为

$$y_0 + y_1 = y_0 + 2k_0t, t \geq 0$$

设新套餐组合有  $n$  个套餐, 记作  $A_i, i=1, 2, \dots, n$ , 各个套餐的月话费为

$$y_{0i} + y_{1i} = \begin{cases} y_{0i}, 0 \leq t < \alpha_i \\ y_{0i} + k_i(t - \alpha_i), t \geq \alpha_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

解方程组

$$\begin{cases} y_0 + y_1(t) = y_{0i} \\ y_{1i} = y_{0,i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

得到  $n$  个解, 分别为  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty$ , 这些方程的解将  $[0, +\infty)$  划分为  $n+1$  个区间  $[0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_n, +\infty)$ , 如果某客户的通话量  $t \in [t_{j-1}, t_j)$  ( $j=1, 2, \dots, n, n+1$ ), 那么其话费最小值为

$$y_{i^*} = \min_{1 \leq i \leq n} \{y_0 + y_1, y_{0i} + y_{1i}\}$$

于是  $y_{i^*}$  所对应的套餐  $A_{i^*}$  就是该客户的话费最省套餐.

对于北京风险型用户来说, 画出  $y_0 + y_1, y_{0i} + y_{1i}$  的图像, 如图 1-2 所示.

从图 1-2 可知, 用户通话量的分界点有 4 个, 分别为  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , 其中  $t_1$  是  $y_0 + y_1(t) = 99$  的解, 解得  $t_1 = 61.25$ . 类似地, 可以求得其他 3 个方程的解.

于是, 北京风险型用户的话费最省套餐如表 1-4 所示.

表 1-4 北京风险型用户的话费最省套餐

本地主叫通话量	$[0, 61.25)$	$[61.25, 394.3)$	$[394.3, 800)$	$[800, 1500)$	$[1500, +\infty)$
套餐	现行套餐	99 套餐	139 套餐	199 套餐	299 套餐

对于上海风险型用户来说, 画出  $y_0 + y_1, y_{0i} + y_{1i}$  的图像, 如图 1-3 所示. 话费最省套餐如表 1-5 所示.

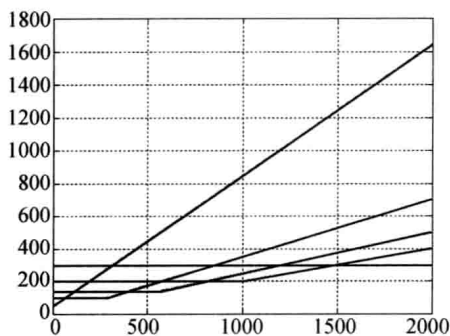


图 1-2 北京风险型用户图像

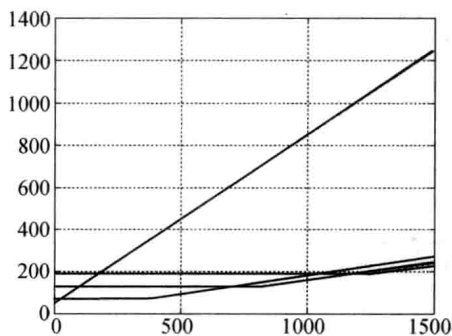


图 1-3 上海风险型用户图像

表 1-5 上海风险型用户的话费最省套餐

本地主叫通话量	$[0, 22.5)$	$[22.5, 693.3)$	$[693.3, 1175)$	$[1175, +\infty)$
套餐	现行套餐	68 套餐	128 套餐	188 套餐



### 1.5.2 问题(2)的解决

建模思路:本问题是一个综合评价问题,需要对新套餐的各个套餐进行综合评价.这里选择 DEA 方法里的  $C^2R$  模型进行评价<sup>[9]</sup>.

DEA 方法是对相同类型的、具有多指标投入和多指标产出的对象进行相对有效性评价的一种方法,哪个对象的投入较少而产出较大,哪个对象的评价就较大.

#### 1. 建立评价指标体系

根据假设(8),评价套餐的指标有月租费(元/月)、包含本地主叫分钟数(min)、套餐内主叫资费优惠量(元/min)、套餐外主叫资费优惠量(元/min)、IP 国内长途资费优惠量(元/min).

北京“畅听 99 套餐”的各个指标的数据如表 1-6 所示.上海“全球通 68 套餐”的各个指标的数据如表 1-7 所示.

表 1-6 北京“畅听 99 套餐”的指标数据

套餐			99 套餐	139 套餐	199 套餐	299 套餐
月租费/(元/月)	效益型	$z_1$	99	139	199	299
包含本地主叫分钟数/min	效益型	$z_2$	280	560	1000	2000
套餐内本地主叫资费/(元/min)	—	—	0.35	0.25	0.2	0.15
套餐外本地主叫资费/(元/min)	—	—	0.35	0.25	0.2	0.15
IP 国内长途资费/(元/min)	—	—	0.45	0.35	0.3	0.25
套餐内主叫资费优惠量/(元/min)	成本型	$x_1$	0.05	0.15	0.2	0.25
套餐外主叫资费优惠量/(元/min)	成本型	$x_2$	0.05	0.15	0.2	0.25
IP 国内长途资费优惠量/(元/min)	成本型	$x_3$	0.65	0.75	0.8	0.85

表 1-7 上海“全球通 68 套餐”的指标数据

套餐			68 套餐	128 套餐	188 套餐
月租费/元	效益型	$z_1$	68	128	188
包含本地主叫分钟数/min	效益型	$z_2$	360	800	1200
套餐内本地主叫资费/(元/min)	—	—	0.19	0.16	0.16
套餐外本地主叫资费/(元/min)	—	—	0.18	0.16	0.13
IP 国内长途资费/(元/min)	—	—	1.1	1.1	1.1
套餐内主叫资费优惠量/(元/min)	成本型	$x_1$	0.21	0.24	0.24
套餐外主叫资费优惠量/(元/min)	成本型	$x_2$	0.22	0.24	0.27
IP 国内长途资费优惠量/(元/min)	成本型	$x_3$	0	0	0

#### 2. 建立评价模型

设新套餐有  $n$  个套餐,每个套餐都有  $m$  个投入指标和  $p$  个产出指标,投入指标是成本型指标(越小越好),产出指标是效益型指标(越大越好),第  $j$  个套餐的投入指标记为  $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T > 0$ ,产出指标记为  $\mathbf{z}_j = (z_{1j}, z_{2j}, \dots, z_{pj})^T > 0$ ,这样,由  $n$  个套餐构成了一个评价系统.