普通高等院校“十二五”立项教材

数学建模

SHU XUE J I AN MO

主编◎赵翌

吉林大学出版社

数学建模

SHUXUE JIANMO

普通高等院校“十二五”立项教材

数学建模

主　编　赵　翌
副主编　唐干武　刘　剑
　　　　张　红

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模 / 赵翌主编. —— 长春 : 吉林大学出版社，2014.11

ISBN 978－7－5677－2637－6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①数学模型 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 280682 号

书　名:数学建模

作　者:赵翌　主编

责任编辑、责任校对:卢婵

吉林大学出版社出版、发行

开本:787×1092　毫米　　1/16

印张:11.5　　字数:170 千字

ISBN 978－7－5677－2637－6

封面设计:可可工作室

北京明兴印务有限公司　印刷

2014 年 12 月　第 1 版

2014 年 12 月　第 1 次印刷

定价:25.00 元

社址:长春市明德路 501 号　邮编:130021

发行部电话:0431－89580028/29

网址:http://www.jlup.com.cn

E－mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前 言

《数学建模》课程是大学数学课程的重要组成部分，20 世纪 70 年代率先在英、美等国高校开设。我国自 20 世纪 80 年代中期起，相继在部分理工科院校与综合大学的研究生或本科生中开设。其目的是使其毕业生未来能更好地运用数学为其从事本专业的研究与工作服务。理工科院校或综合大学的数学建模任课教师在其教学实践与理论研究的基础上相继编著出版了诸多版本的数学建模教材，并积累了一套富有成效的教学方法与经验，取得了较好的教学效果。不过，目前国内很少有专门针对专科学生的数学建模教材。在教学过程中，由于学生基础等原因，我们发现一些不相适应的问题，如一些教学内容偏难、缺少模型求解过程的示例等。这部分教学内容仅对一些优秀的学生有吸引力，多数基础较差的学生对这门课程仍是信心不足，学习的积极性不高。因此有必要编写一本难度适中，面向专科学生的教材。

本教材获桂林师范高等专科学校重点教材项目资助，由学校指导学生参加数学建模竞赛的一线教师参与编写，分为绪论，初等模型、优化模型、离散模型、线性规划模型、微分方程模型及数学建模论文写作几个模块，多数案例为编者自己的研究成果，注重案例的趣味性、代表性与实用性。设计的教学学时为 60 学时左右。

本教材编写的主要指导思想是：

1. 前沿理念，衔接自然。遵循“十二五”职业教育教材建设的总体思路，贯彻高职院校教材改革新理念，突出教材的基础性、实用性。本教材所引用的资料与数据准确可靠，将最近五年的全国大学生数学建模竞赛优秀论文纳入教材，使教材内容与全国大学生数学建模竞赛有效衔接。

2. 案例新颖，理论适度。在教材案例上，遵循“教师为主导、学生为主体、提高能力为宗旨”的编写思想，坚持理论适度原则，采用“模块与案例”相结合方式，慎重选择六大模块，力求将理论知识简单化、重点知识系统化、难点知识分解化。

3. 注重实践，主动学习。本教材设计了相应的数学实验内容，主要包括数学软件基本操作、数值模拟、数学建模论文写作等一些最常用的解决实际问题的典型的实例，从而达到充分利用计算机技术提供的有利条件，让学生动手、动眼、动脑，更有效、更主动地提高“用数学”的能力。

4. 语言通俗，可读性强。针对高职学生的知识水平，本教材的文字表述力求通俗易懂，增强教材的可读性与趣味性，有助于提高学生的学习兴趣。

本教材第一、五、六章由赵翌编写，第二、四章由刘剑编写，第三章由唐干武，张红编写。由于作者水平有限，不足之处请读者批评指正。

编者

2014.8 于桂林

目　录

第一章 绪 论

随着社会的发展，数学越来越广泛地应用于社会各个领域. 它已成为关系到国民经济技术基础与国家安全，关系到国家实力的重要学科. 而运用数学方法建立数学模型解决实际问题的数学建模方法正是实现与发挥数学应用功能的重要手段与途径.

根据研究目的，对所研究的过程和现象(称为现实原型或原型)的主要特征、主要关系，采用形式化的数学语言，概括地、近似地表达出来的一种结构. 所谓"数学化"，指的就是构造数学模型. 建造数学模型的过程就是数学建模. 通过研究事物的数学模型来认识事物的方法，称为数学模型方法，简称为 MM 方法.

我们来看一个简单的数学题.

例 1 两地相距 3600 米，甲乙两人从两地同时出发相向而行，乙的速度是甲的 2 倍，两人 20 分钟后相遇，甲乙两人速度各是多少?

解：设甲乙两人速度各为 x，y，则有

$20(x+y)=3600$，$y=2x$，

解得 $x=60$ 米/分钟，$y=120$ 米/分钟.

答：甲的速度为 60 米/分钟，乙的速度为 120 米/分钟.

这个例子包含了建立数学模型的基本步骤：

1. 作出简化假设(甲乙两人的速度为常数)；

2. 用符号表示有关量(x，y 表示甲乙两人的速度)；

3. 用物理定律(匀速运动的距离等于速度乘以时间)列出数学式子(二元一次方程)；

4. 求解得到数学解答($x=60$ 米/分钟，$y=120$ 米/分钟)；

5. 回答原问题(甲的速度为 60 米/分钟，乙的速度为 120 米/分钟).

真正的数学模型要复杂得多，本章将通过一些简单、实用的例子来说明数学

建模的方法和步骤.

§1.1 建模示例

1.1.1 建模示例一:椅子能在不平的地面上放稳吗

问题提出 问题来源于生活中的一件事实:把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳,然而只需挪动几次,就可以放稳了.这个看来与数学无关的现象能用数学语言描述出来,并加以证明吗?

这个问题涉及到三个方面:一是不平的地面,二是椅子,三是放稳的条件.我们可以作出以下合理的转换和假定.

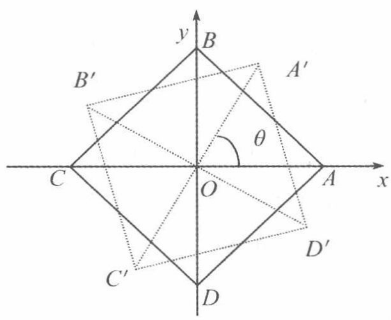

图 1-1 椅子四条腿连线图

模型假设

1. 椅子四条腿一样长,椅脚与地面接触处可视为一定点,四脚的连线呈正方形 $ABCD$(如图 1-1);

2. 地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),即地面可视为数学上的连续曲面;

3. 对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子的任何位置至少有三只脚同时着地.

模型构成 用 θ 表示椅子绕中心点 O 旋转角度,$f(\theta)$ 表示 A,B 两脚与地面距

离之和，$g(\theta)$ 表示 C,D 两脚与地面距离之和. 由假设 1，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 都是连续函数，由假设 3，椅子在任何位置至少有三只脚同时着地意味着：对任意 θ，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为 0. 当 $\theta=0$ 时，不妨设 $f(0)>0$，$g(0)=0$.

在这样的转化之下，我们去掉了原问题中非本质属性的概念：椅子和地面，抽象出如下的纯粹的数学命题：

已知 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 是 θ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的连续函数，对任意 θ，有 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，且 $f(0)>0$，$g(0)=0$. 证明：存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$，使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$.

模型求解　这个问题可以通过根的存在性定理进行证明.

将椅子旋转 $180°(\pi)$，边 AB 与 CD 互换. 由 $f(0)>0$ 和 $g(0)=0$ 可知，$f(\pi)=0$，$g(\pi)>0$.

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则有 $h(0)=f(0)-g(0)>0$ 和 $h(\pi)=f(\pi)-g(\pi)<0$，由 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 的连续性知 $h(\theta)$ 也是连续函数. 根据根的存在性定理可知，必存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$，使得 $h(\theta_0)=f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$.

模型评价　这个模型用一元变量 θ 表示椅子的位置，用 θ 的两个函数表示椅子四脚与地面的距离，并找出隐藏的数学信息即连续曲面，将原问题与数学中的连续函数及其性质联系起来，从而建立数学模型.

模型的证明方法不是唯一的，条件“四脚的连线呈正方形”也不是本质的. 读者可以考虑四脚的连线呈长方形的情况.

1.1.2　建模示例二：存在满足条件的地点吗？

问题提出　某甲早上 8:00 从山下旅店出发，沿一条路径上山，下午 5:00 到达山顶并留宿. 次日早上 8:00 沿同一路径下山，下午 5:00 回到旅店. 甲是否能在两天中的同一时刻经过路径的同一地点？为什么？

这是一道要求快速回答的智力题. 按一般的思维模式，会认为问题的条件不充分. 因为问题中并没有提供甲在上下山时的速度，也无法计算甲在任意时刻的位置，从而不能给出确切的答案. 不过，如果将问题设想为两人在同一天分别从山下旅店、山顶相向而行，两人必相遇. 结论的正确性是显然的，但能不能从数学的角度加以证实呢？下面，我们将用数学语言来描述这个问题，并给出严格的数学

证明.

模型假设 为了便于问题的解决,我们首先对问题作出以下假设.

1.将山下旅店与山顶看作两个定点 A 和 B,将甲看作一动点 C,即甲从山下旅店出发,到达山顶及从山顶出发,到达山下旅店的过程可看作动点 C 沿一定路径在两个定点 A 和 B 之间的移动过程;

2.设山下旅店到山顶的路径是连续的,即路径可看作是一条连续的空间曲线 $\overset{\frown}{AB}$,其长度为常数 L;

3.动点 C 在两个定点 A 和 B 之间移动时,时间初值为 t_1,终值为 t_2.

模型构成 设甲上山的速度为 $v_1(t)$,下山的速度为 $v_2(t)$,因为路径是连续的,所以 $v_1(t)$,$v_2(t)$ 为时间 t 的连续函数.从而上山时,t 时刻甲到山下旅店的总路程即为曲线 $\overset{\frown}{AC}$ 的长度,可以表示为 $f(t)=\int_{t_1}^{t} v_1(t)\mathrm{d}t$,则 $f(t_1)=0$,$f(t_2)=L$;下山时,t 时刻甲到山顶的总路程为曲线 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度,可以表示为 $h(t)=\int_{t_1}^{t} v_2(t)\mathrm{d}t$,不妨记 $g(t)=L-h(t)$,则 $g(t_1)=L$,$g(t_2)=0$.由问题的实际意义可知 $f(t)$ 与 $g(t)$ 为连续函数,于是甲是否能在两天中的同一时刻经过路径的同一地点这个问题可转化为以下数学问题:

已知 $f(t)$ 与 $g(t)$ 为区间 $[t_1,t_2]$ 上的连续函数,且 $f(t_1)=0$,$f(t_2)=L$;$g(t_1)=L$,$g(t_2)=0$.是否存在 $t_0\in[t_1,t_2]$,使得 $f(t_0)=g(t_0)$?

模型求解 对这个问题的证明是很简单的.不妨设 $F(t)=f(t)-g(t)$.由于 $f(t)$ 与 $g(t)$ 为区间 $[t_1,t_2]$ 上的连续函数,则 $F(t)$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 上连续;且 $F(t_1)=f(t_1)-g(t_1)=L$,$F(t_2)=f(t_2)-g(t_2)=-L$,$F(t_1)\cdot F(t_2)<0$.根据根的存在定理可知,存在 $t_0\in[t_1,t_2]$,使得 $F(t_0)=0$,即 $f(t_0)=g(t_0)$.从而可知存在 $t_0\in[t_1,t_2]$,使得甲在两天中的同一时刻 t_0 经过路径的同一地点 C_0,C_0 到山下旅店的总路程为 $f(t_0)=\int_{t_1}^{t_0} v_1(t)\mathrm{d}t$.

模型评价 这个模型用一元变量 t 的两个函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 分别表示甲在两天内上下山时,t 时刻的位置,进而把模型假设和同一时刻经过路径的同一地点的结论用数学语言表达出来,构成了这个实际问题的数学模型.整个问题的关键在于甲上下山的路径是同一路径,这是甲在两天中的同一时刻经过路径的同一地点

的基本条件. 对于这个问题还可以作进一步的思考,即甲动身的时间区间并不需要一致. 这个问题的证明留给读者来完成.

在上述的两个例子中,两个实际问题是完全不一样的,但却可以用同一个数学模型来描述并加以证明. 它们的共同点是都强调某个点的存在性,但不需要把这个点精确地指出来,这与根的存在性定理的结论是一致的. 连续的条件是人为加上的,这说明任何一个模型都有其适用范围和局限性.

1.1.3 建模示例三:商人过河问题

问题提出 三名商人各带一名随从乘船过河,小船最多只能容纳 2 人,由他们自己划行. 随从们密约,在河的任一岸,一旦随从的人数比商人多,就杀人越货. 但乘船渡河的方案由商人决定,商人们怎样才能安全过河呢?

模型假设

1. 假设过河的过程中不会发生意外事故.
2. 假设当随从人数多过商人时,不会改变杀人越货计划.
3. 假设所有人最终都必须到达河对岸.

符号说明

M:表示商人的数量

N:表示随从的数量

Z:表示河的此岸和彼岸

K:表示小船的容量

m:表示此岸的商人数量

n:表示此岸的随从数量

u:表示彼岸的商人数量

v:表示彼岸的随从数量

模型分析 本题针对商人们能否安全过河问题,需要选择一种合理的过河方案. 对该问题可视为一个多步决策模型,通过对每一次过河的方案的筛选优化,最终得到商人们全部安全过到河对岸的最优决策方案. 对于每一次的过河过程都看成一个随机决策状态量,商人们能够安全到达彼岸或此岸我们可以看成目标决策允许的状态量,通过对允许的状态量的层层筛选,从而得到过河的目标.

模型建立 本题为多步决策模型，每一次过河都是状态量的转移过程.

可以用三维向量表示：(m,n,Z)，

m 的取值范围：$\{0,1,2,3\}$，

n 的取值范围：$\{0,1,2,3\}$，

$$Z=\begin{cases}1,\text{表示划船到河的彼岸},\\0,\text{表示划船到河的此岸},\end{cases}$$

那么允许状态量(即两岸同时必须满足($m\geqslant n$))可以表示为

(1)当 $m=0$ 或 3，$n=\{0,1,2,3\}$，

(2)当 $m=1$ 或 2，$m=n$，

或用三维向量表示允许状态量，如表 1-1 所示.

表 1-1 过河安全状态量表

(3,3,1)	(3,2,1)	(3,2,0)	(3,1,0)	(3,1,1)	(3,0,1)
(3,0,0)	(2,2,1)	(2,2,0)	(1,1,1)	(1,1,0)	(0,2,0)
(0,2,1)	(0,3,1)	(0,1,1)	(0,3,0)	(0,1,0)	(0,0,0)

模型求解 模型要求从(3,3,1)开始经过对每次过河的安全状态量的选择最终安全到达(0,0,0).

根据题意状态转移必须满足以下规则：

(1)Z 从 1 变 0 或 0 变 1 交替进行.

(2)Z 从 1 变为 0 即从河的此岸到彼岸，此岸的人数减少 1 或 2；即$(m,n,1)\to(u,v,0)$时，两岸的人数满足 $m\geqslant n$ 且 $u\geqslant v$，且 $m+n-1=u+v$ 或 $m+n-2=u+v$.

(3)Z 从 0 变为 1 时，即从河的彼岸到此岸，则此岸的人数增加 1 或 2；即$(u,v,0)\to(m,n,1)$时，两岸的人数满足 $m\geqslant n,u\geqslant v,m+n+1=u+v$ 或 $m+n+2=u+v$.

(4)对重复出现过的状态不计入安全状态，如$(3,3,1)\to(3,2,0)\to(3,3,1)$

按照以上的规则方法可得到整个过河过程的状态量. 可表示为如图 1-2 所示.

从(3,3,1)对每步出现的状态量进行层层选取安全状态量，最终得到所有的答案.

- (3,3,1)→
  - (3,2,0)→(3,3,1)
  - (2,2,0)→
    - (3,2,1)→
    - (3,0,0)→
      - (3,1,1)→
        - (1,1,0)→(2,2,1)→
        - (0,2,0)→(0,1,0)→
          - (0,2,1)
          - (1,1,1)
          - →(0,0,0)
        - (2,2,0)×
        - (2,1,0)×
        - (3,0,0)→
          - (3,1,1)重复
          - (3,2,1)→(2,2,0)→(3,2,1)重复
      - (3,2,1)重复
    - (3,3,1)重复
    - (2,3,0)×
  - (3,1,0)→
    - (3,2,1)→
      - (2,2,0)→(3,2,1)重复
      - (3,0,0)→(3,1,1)
        - (1,3,1)×
        - (2,2,1)→(0,2,0)→
        - (0,3,0)→(0,1,1)→
          - (1,1,0)
          - (0,2,0)
          - →(0,0,0)
      - →(1,1,0)
      - (3,1,0)重复
    - (3,3,1)重复

图 1-2 过河过程的状态图

最终我们得到商人们安全渡河的方案有四种如下：

第一种方案：

(3,3,1)→(2,2,0)→(3,2,1)→(3,0,0)→(3,1,1)→(1,1,0)→(2,2,1)→(0,2,0)→(0,3,0)→(0,1,0)→(1,1,1)→(0,0,0)

第二种方案：

(3,3,1)→(2,2,0)→(3,2,1)→(3,0,0)→(3,1,1)→(1,1,0)→(2,2,1)→(0,2,0)→(0,3,0)→(0,1,0)→(0,2,1)→(0,0,0)

第三种方案：

(3,3,1)→(3,1,0)→(3,2,1)→(3,0,0)→(3,1,1)→(1,1,0)→(2,2,1)→(0,2,0)→(0,3,0)→(0,1,1)→(1,1,0)→(0,0,0)

第四种方案：

(3,3,1)→(3,1,0)→(3,2,1)→(3,0,0)→(3,1,1)→(1,1,0)→(2,2,1)→(0,2,0)→(0,3,0)→(0,1,1)→(0,2,0)→(0,0,0)

模型评价 本模型采用多步决策的建模方法,好处是不会遗漏可能的过河方式,可以将其全部罗列出来而且直观易懂.模型的缺点也很明显,就是解决过程复杂繁琐,只适合解决过河的人少时的过河方案,在人多的情况下并不适合.如果需要将模型推广至 m 名商人带 m 名随从过河的问题,则应根据建模思路,运用合适的软件编写程序解决.

1.1.4 建模示例四:如何将油二等分?

问题提出 有三个无刻度的容器 A、B、C,容量分别为 10 升、7 升 、3 升.现容器 A 中装满 10 升油,B、C 均空,如何利用三个容器将 10 升油二等分?

这是一道古老的分油益智问题.对于这样的智力游戏,经过一番逻辑思索后,可以求出结果.例如,由 A 倒向 B, B 倒向 C,C 倒向 A,B 倒向 C ,C 倒向 A, B 倒向 C, A 倒向 B,B 倒向 C.各容器内油量的变化过程如表 1-2 所示.

表 1-2 各容器油量的变化过程表

具体操作	A(升)	B(升)	C(升)
A	10	0	0
$A\to B$	3	7	0
$B\to C$	3	4	3
$C\to A$	6	4	0
$B\to C$	6	1	3
$C\to A$	9	1	0
$B\to C$	9	0	1
$A\to B$	2	7	1
$B\to C$	2	5	3

除了以上所提的逻辑思维方法外,我们还可以通过建立动态规划模型迅速地找到问题的解,并从中获得更多的信息.

模型构成 分油问题可视作一个多步决策过程.记第 k 次倒油时,B 容器内的油量为 x_k,C 容器内的油量为 y_k,将二维向量 $s_k=(x_k,y_k)$ 定义为状态.我们用有序数组(x,y)的变化来表示整个倒油的过程.集合

$$S'=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 7,0\leqslant y\leqslant 3\} \tag{1}$$

(1)式称为状态集合. 由于每一次倒油都意味着某一个容器被灌满或被倒空，故允许状态集合为

$$S=\{(x,y)\mid y=0,0\leqslant x\leqslant 7;\ y=3,0\leqslant x\leqslant 7;\ y=1,x=0,7;y=2,x=0,7\} \tag{2}$$

记第 k 次倒油时，B 容器内油的改变量为 u_k，C 容器内油的改变量为 v_k. 将二维向量 $d_k=(u_k,v_k)$定义为决策，则允许决策集合为 D，由各容器的容量可知

$$D=\{(u,v)\mid\ |u|\leqslant 7,|v|\leqslant 3\} \tag{3}$$

状态随决策变化的规律是

$$s_{k+1}=s_k+d_k \tag{4}$$

(4)式称为状态转移律. 则制定分油方案归结为如下的多步决策问题：

求决策 $d_k\in D$，使状态 $s_k\in S$ 按照状态转移律(4)，由初始状态 $s_0=(0,0)$经有限步 n 到状态 $s_n=(5,0)$.

模型求解 我们可以通过编写一段程序，利用计算机进行求解，也可以用图解法来处理这个问题. 如图 1-3 所示，所有的操作应该在矩形 $OABC$ 的边界上进行. 决策变量 d_k 沿方格线左右平移 7 格表示由 B 向 A 倒空油或 A 向 B 倒满油；d_k 沿方格线上下平移 3 格，表示由 A 向 C 倒满油或 C 向 A 倒空油；d_k沿方格线左上方 135°移过 k 行，表示 B 向 C 倒 k 升油；d_k 沿方格线右下方 $-45°$移过 k 行，表示 C 向 B 倒 k 升油.

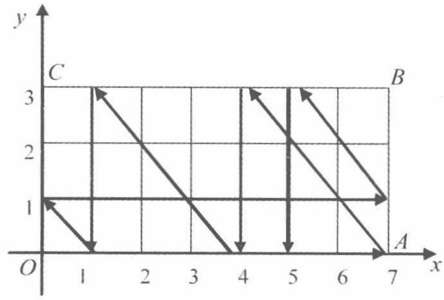

图 1-3 分油问题方案 1

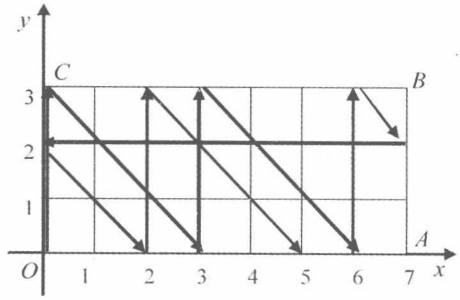

图 1-4 分油问题方案 2

寻求决策方案的过程即是在上述规定下，将坐标点从(0,0)移至(5,0)的过程. 图 1-3 所给的方案也是表 1-2 的结果. 根据这个模型，我们还可以很快地找到

问题的另外一组解，如图 1-4.

结果分析 将图 1-3、图 1-4 画在同一坐标上，如图 1-5（虚线为图 1-3 方案，实线为图 1-4 方案），可看到 x 轴上坐标 1，2，3，4，5，6，7 都曾被某个箭头所指，从而可知，利用这三个容器可分出 1，2，3，4，5，6，7 升油. 这里并不要求容器 A 的容量一定是 10 升.

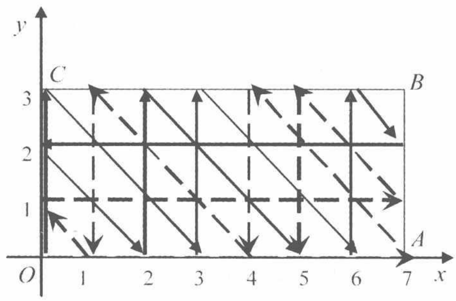

图 1-5 分油结果

模型推广 对于这个分油问题，我们可拓展思路，提出疑问. 即三个容器 A、B、C 的容量分别为 a 升、b 升、c 升，$a>b>c$，$a=b+c$；现容器 A 中装满 a 升油，B、C 均空. 如何利用三个容器将 a 升油二等分？

当 $c=1$ 时，自然可以将油分出 1 至 b 升，我们对 $c>1$ 的情形进行讨论. 通过图 1-5，我们发现分油的步骤是有规律的，即规定：

(1) B 中若空，则从 A 倒向 B；

(2) 若 B 不空，则从 B 倒向 C；

(3) 若 C 满了，方把 C 倒向 A.

B 中油量 x 的变化与倒油的操作有关，不妨记为 $r=b \bmod c$，即 $r=b-Kc$（$K\in\mathbf{N}$，$r<c$）. 我们将按以上规定对 B 中油量 x 作如下具体分析：

①由 A 灌满 B 后，B 中的油量为 $x=b$ 升；

②由 B 向 C 倒 i 次油后（$i\in\mathbf{N}$），B 中的油量为 $x=b-i\times c$ 升，当 i 足够大时，B 中油量为 $x=r$ 升；

③将 B 中的 x 升油倒向 C，此时 C 中有油 $y=r$ 升；

④重复①②，B 中油量 $x=b+r-i\times c$，即 $x=2b-(i+K)\times c$ 升，当 i 足够大时，B 中油量为 $x=2b \bmod c$ 升，重复③，此时 C 中有油 $y=2b \bmod c$ 升.