21世纪高等学校
经济管理类规划教材 高校系列

实用运筹学

案例、方法及应用

◎ 邢光军 主编
◎ 孙建敏 巩永华 刘长贤 张冲 副主编

PRACTICAL OPERATIONS RESEARCH

CASE, METHODS AND APPLICATIONS

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

21世纪高等学校
经济管理类规划教材 高校系列

实用运筹学

案例、方法及应用

◎ 邢光军 主编

◎ 孙建敏 巩永华 刘长贤 张冲 副主编

PRACTICAL OPERATIONS RESEARCH

CASE, METHOD AND APPLICATIONS

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

实用运筹学 ：案例、方法及应用 / 邢光军主编. -- 北京 ：人民邮电出版社，2015.6
21世纪高等学校经济管理类规划教材. 高校系列
ISBN 978-7-115-39022-6

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①邢… Ⅲ. ①运筹学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第073075号

内容提要

本书主要介绍在管理决策优化中常用的运筹学原理、模型和方法，其内容包括线性规划与单纯形法、对偶理论与灵敏度分析、运输问题、整数规划、动态规划、图与网络分析、存储论、排队论。在理论介绍中，本书注重企业管理决策的具体应用背景，并结合计算机应用的实现，强调实用性，做到容易理解和掌握运筹学的基本原理和方法，并且能够运用于实践。

本书可作为管理类、经济类本科生、工商管理硕士（MBA）和工程硕士运筹学课程教材和教学参考书，也可供企业经营管理、公共事业管理等人员参考。

◆ 主　　编　邢光军
副 主 编　孙建敏　巩永华　刘长贤　张　冲
责任编辑　武恩玉
责任印制　沈　蓉　彭志环
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京圣夫亚美印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
印张：13.75　　2015 年 6 月第 1 版
字数：315 千字　　2015 年 6 月北京第 1 次印刷

定价：35.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言 FOREWORD

目前，运筹学理论已在企业经营管理、公共事务管理等多方面得到广泛的应用。运筹学课程一般作为管理类、经济类等学科的专业基础课。课程的特点是将经济与管理领域中提出的问题建立合理的运筹学模型，选择恰当的方法进行计算求解，并对结果加以分析评价，从而为决策提供定量依据。课程教学注重培养学生模型构建的创造性思维能力，特别是综合运用运筹学理论解决实际问题的能力，同时，为进一步学习专业课程打下坚实的理论基础。

本书定位切合管理类、经济类专业培养目标、培养要求；精选教学内容，积极引入案例教学，力求深入浅出，提高学习效果；倡导通过案例教学，加深对运筹学概念与理论的理解与掌握；案例密切联系实际应用问题，因势利导，使读者对该课程有更为深刻的认识，并启发读者的思维，锻炼并提高读者创新能力。本书注重加强实践环节，提高读者应用能力的培养。运筹学主要用于解决复杂系统的各种最优化问题，涉及的变量非常多，约束条件非常复杂，实际的运筹学模型往往也非常庞大，必须借助于计算机才能够完成问题的求解。本书推荐使用 Microsoft Excel 等软件来计算运筹学问题，鼓励读者努力尝试新方法。

本书的参考学时为 72～84 学时，建议采用理论与实践相结合的教学模式。课程主要内容和学时分配见课程学时分配表。

课程学时分配表

课程内容 \ 时数 \ 教学环节	讲课	实验上机	小计
第 1 章 线性规划与单纯形法	8～10	2	10～12
第 2 章 对偶理论与灵敏度分析	8～10		8～10
第 3 章 运输问题	6～7	2	8～9
第 4 章 整数规划	8～9	2	10～11
第 5 章 动态规划	8～10		8～10
第 6 章 图与网络分析	8～10	2	10～12
第 7 章 存储论	8～9	2	10～11
第 8 章 排队论	6～7	2	8～9
总　计	60～72	12	72～84

运筹学内容丰富，涉及领域广泛。本书介绍了线性规划、运输问题、整数规划、动态规划、图与网络分析、存储论、排队论等内容，供管理类、经济类专业运筹学课程教学选用。各章节的撰写分工为：第 1 章、第 2 章由邢光军撰写，第 3 章、第 4 章由刘长贤撰写，第 5 章由孙建敏撰写，第 6 章由巩永华撰写，第 7 章、第 8 章由张冲撰写，全书由邢光军统稿、定稿。

由于作者水平有限，书中的错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2015 年 2 月

目 录 CONTENTS

第 1 章 线性规划与单纯形法

学习目标

- 线性规划的概念与模型构建
- 图解法
- 单纯形法
- 人工变量求解法
- 计算机软件求解线性规划

开篇案例

某昼夜服务的电信客户服务中心，每天各时间段内所需客户服务人员数如表 1-1 所示：

表 1-1 时间分段及人数需求

班次	时间	所需人数
1	6：00 — 10：00	60
2	10：00 — 14：00	70
3	14：00 — 18：00	60
4	18：00 — 22：00	50
5	22：00 — 2：00	20
6	2：00 — 6：00	30

设客户服务中心客户服务人员分别在各时间段一开始时上班，并连续工作八小时，问该客户服务中心怎样安排客户服务人员，既能满足工作需要，又只需配备最少客户服务人员？

解：设 x_i 表示第 i 班次时开始上班的客户服务人员数，建立如下求解模型。

目标函数： $\min f(x)=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$

约束条件：s.t. $x_1+x_6 \geqslant 60$

$$x_1+x_2 \geqslant 70$$

$$x_2+x_3 \geqslant 60$$

$$x_3+x_4 \geqslant 50$$

$$x_4+x_5 \geqslant 20$$

$$x_5+x_6 \geqslant 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

且 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 为整数

该模型可以利用 Excel 来求解。求解得到，该客户服务中心 6 个班次开始上班的客户服务人员数分别为 45 人、25 人、35 人、15 人、15 人、15 人，既能满足工作需要，又只需配备最少的客户服务人员，配备最少客户服务人员数为 150 人。

线性规划是运筹学的一个重要分支。1939 年，前苏联学者康托罗维奇提出了生产组织和计划中的类似线性规划模型。1947 年，美国学者丹捷格（George B.Dantzig）提出了求解一般线性规划问题的单纯形法。此后，线性规划理论日趋成熟，应用也日益广泛和深入。线性规划在工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和生产经营等领域有着广泛的应用，并取得了良好的经济效益。

1.1 线性规划问题的提出及其数学模型

线性规划是应用数学模型对所研究问题的一种数学模型描述。线性是指模型中数学表达式的形式，规划是计划的意思。因此，线性规划是指用线性的数学模型来描述管理活动的计划。线性规划研究的问题是在一定的资源制约条件下，找出管理活动的最佳资源利用组合，以产生最大的经济和社会效益。线性规划主要解决这样的问题：如何分配利用有限的资源，以最好地达到组织目标。

1.1.1 线性规划问题的提出

例 1-1 生产计划问题

某工厂用 3 种原料 M_1, M_2, M_3 生产 3 种产品 N_1, N_2, N_3。已知单位产品所需原料数量及原料的可用量见表 1-2，试制订出使该工厂利润最大的生产计划。

表 1-2 生产单位产品原料消耗量和原料可用量表

单位产品所需原料数量（kg） 产品 / 原料	N_1	N_2	N_3	原料可用量
M_1	2	3	0.6	1500
M_2	1	2	4	800
M_3	3	2	5	2000
单位产品的利润（千元）	3	5	4	

解：设产品 N_j 的产量为 x_j 个单位，$j=1,2,3$，首先，它们不能取负值，即必须有 $x_j \geq 0, j=1,2,3$；其次，根据题设，3 种原料的消耗量分别不能超过它们的可用量，即它们又必须满足：

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+0.6x_3 \leqslant 1500 \\ x_1+2x_2+4x_3 \leqslant 800 \\ 3x_1+2x_2+5x_3 \leqslant 2000 \end{cases}$$

在以上约束条件下，求出 x_1,x_2,x_3，使总利润 $z=3x_1+5x_2+4x_3$ 达到最大，故求解该问题的数学模型为：

$$\max z=3x_1+5x_2+4x_3$$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2+0.6x_3\leqslant 1500\\ x_1+2x_2+4x_3\leqslant 800\\ 3x_1+2x_2+5x_3\leqslant 2000\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3\end{cases}$$

例 1-2　混合配料问题

某饲养厂每天需要 1000 千克饲料，其中至少要含 7000 克蛋白质、300 克矿物质、1000 毫克维生素。现有 5 种饲料可供选用，各种饲料每千克营养含量及价格见表 1-3：

表 1-3　配料问题数据表

饲料	蛋白质(克)	矿物质(克)	维生素(毫克)	价格(元)
1	3	1.0	0.5	0.2
2	6	0.5	1.0	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	2	2.0	2.0	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

试制订费用最为节省的饲料混合方案。

解：设每天各种饲料的选用量分别为：x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 千克

根据问题求解目标和资源约束，可以写出以下数学模型：

$$\min z=0.2x_1+0.7x_2+0.4x_3+0.3x_4+0.8x_5$$
$$\begin{cases}3x_1+6x_2+x_3+2x_4+18x_5\geqslant 7000\\ x_1+0.5x_2+0.2x_3+2x_4+0.5x_5\geqslant 300\\ 0.5x_1+x_2+0.2x_3+2x_4+0.8x_5\geqslant 1000\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\geqslant 1000\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

1.1.2　线性规划问题的数学模型

上面建立了 2 个案例的数学模型，虽然问题各不相同，但是它们的数学模型却有相同的特征：

（1）问题中都有一组变量（决策变量），这组变量的一组定值就代表一个问题的具体方案；

（2）存在一定的限制条件（约束条件），这些限制条件可以用一组线性等式或不等式来表示，表示约束条件的数学式子都是线性等式或线性不等式；

（3）有一个目标要求（目标函数），可以表示为决策变量的线性函数，并且要求这个目标函数达到最优（最大或最小），表示问题最优化指标的目标函数都是线性函数。

满足上述 3 个条件的数学模型称为线性规划的数学模型，一个线性规划问题的数学模型包括三部分：目标函数、约束条件和决策变量。

线性规划问题数学模型的一般形式为：

$$\text{目标函数}\quad \max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\text{满足的约束条件：}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_m \quad (1\text{-}2) \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \quad (1\text{-}3) \end{cases}$$

其中，式（1-1）称为目标函数，式（1-2）称为约束条件，式（1-3）称为非负约束条件。式中，z 称为目标函数，$x_j(j=1,2,\cdots,n)$称为决策变量，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$称为价值系数或目标函数系数，$b_j=(j=1,2,\cdots,m)$称为限额系数或右端系数，$a_{ij}=(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 称为技术系数，由技术系数 $a_{ij}=(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$组成的矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ 称为技术系数矩阵。这里，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$均为常数。

可行解：将满足线性规划约束条件式（1-2）和式（1-3）的解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为线性规划问题的可行解，由所有可行解组成的集合称为可行域。

最优解：称使目标函数取到最优值的可行解为最优解。最优解对应的目标函数值称为最优值。

1.2 线性规划图解法

图解法是在直角坐标系中用作图的方法来求线性规划问题的解，它适用于仅含两个决策变量的线性规划问题的数学模型求解。虽然这种方法的应用范围受到很大的限制，但这种方法简单、直观，特别是有助于理解线性规划问题单纯形法求解的基本原理。

例 1-3　用图解法求解线性规划问题。

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 8 & ① \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 20 & ② \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 & ③ \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：

（1）绘制平面直角坐标系 x_1Ox_2 。

（2）由约束条件①、②、③所确定的可行域为多边形 $OABCD$ 中任意一点（包括其边界点），见图 1-1 中阴影部分。

（3）绘制法向量。因为我们只关心其方向而不关心其长度，所以将法向量延长。

（4）画一条垂直于法向量的等值线 l。因为目标函数为求最大值，所以让直线 l 沿法向量方向平移，直到移到直线 BC 上为止。

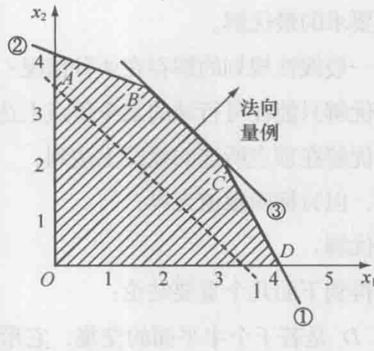

图 1-1　法向量分析的图解法

此时，线段 BC 上任意一点均为最优解。解出点 B、C 的坐标值，分别为 $B\left(\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$，$C(3,2)$，所以最优解为点 B、C 以及线段 BC 内的点。

对应的最优值为 $z^*=5$。

例 1-4　用图解法求解线性规划问题。

$$\min z = x_1 - x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + \ \ x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：可行区域 D 如图 1-2 所示。在区域 $OA_1A_2A_3A_4O$ 的内部及边界上的每一个点都是可行点，目标函数的等值线 $z=-x_1+x_2$（z 取定某一个常值)的法线方向（梯度方向）(-1,1）是函数值增加最快的方向（负梯度方向是函数值减小最快的方向）。

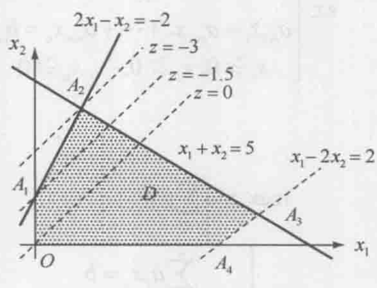

图 1-2　等值线分析的图解法

沿着函数的负梯度方向移动，函数值会减小，当移动到点 $A_2=$（1,4）时，再继续移动就离开区域 D 了。于是 A_2 点就是最优解，而最优值为 $z^*=-3$。

图解法步骤可以总结为：

（1）求可行域。在平面直角坐标系中，可行域是各约束条件所表示的半平面的公共部分。

（2）求最优解。将目标函数 z 看成参数，做出等值线，然后根据原问题求最大值（或最小值）的要求，令等值线沿 z 值增加（或减少）方向在可行域内平行移动，直到找到等值线与可

行域最后相交的一点，即为所要求的最优解。

由图解法可以看出，对于一般线性规划的解存在 4 种情况：

（1）唯一最优解，则此最优解只能在可行域的某个顶点上达到；

（2）无穷多最优解，则最优解在顶点所连的线段上达到；

（3）无界解，存在可行解，但目标函数值无界；

（4）无可行解，因而无最优解。

从图解法的几何直观容易得到下面几个重要结论：

（1）线性规划的可行区域 D 是若干个半平面的交集，它形成了一个多面凸集（也可能是空集）。如果可行域无界，线性规划问题的目标函数可能出现无界的情况。

（2）对于给定的线性规划问题，如果它有最优解，最优解总可以在可行域的某个顶点上达到，在这种情况下还包含两种情况：有唯一最优解和有无穷多最优解。因此，寻求线性规划问题的最优解，只需沿着可行域的边界搜索，后面介绍的单纯形法正是循着这个思路来求解线性规划问题最优解的。

1.3 线性规划问题的单纯形法

1.3.1 线性规划问题的标准形式

线性规划问题的标准形式如下：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-4}$$

或简写成

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1-5}$$

令

$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，

$a_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}\right)^{\mathrm{T}}$，

$C = \left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right)$，

$b = \left(b_1, b_2, \cdots, b_m\right)^{\mathrm{T}}$，

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，

则上述标准线性规划问题可以用矩阵形式表示：

$$\max z = CX$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} AX=b \\ X\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-6}$$

非标准形式的线性规划问题，可以通过一些简单代换化为标准线性规划问题。

1．最小值问题

目标函数为最小值问题，如 $\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$，可以等价地化为最大值问题，因为 $\min\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=-\left(\max\left(-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\right)\right)$。

2．不等式约束问题

形如 $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n\leqslant b_j$ 的不等式约束，可以通过引入所谓“松弛变量 x_{n+1}”化为等式约束 $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n+x_{n+1}=b_j$（其中 $x_{n+1}\geqslant 0$）；而形如 $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n\geqslant b_j$ 的不等式约束，可以通过引入所谓“剩余变量 x_{n+2}”化为等式约束 $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n-x_{n+2}=b_j$（其中 $x_{n+2}\geqslant 0$）。

3．变量无符号限制问题

变量 x_j 无非负约束条件问题，可以定义 $x_j=x_j^{(1)}-x_j^{(2)}$，其中 $x_j^{(1)}\geqslant 0, x_j^{(2)}\geqslant 0$，从而化为非负约束。

例 1-5　将以下线性规划问题转化为标准形式。

$$\min z=2x_1-3x_2+x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1-x_2+2x_3\leqslant 3 \\ 2x_1+3x_2-x_3\geqslant 5 \\ x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1,x_3\geqslant 0,\ x_2\text{ 无符号限制} \end{cases}$$

解：令 $z'=-z$，引进松弛变量 $x_4\geqslant 0$，引进剩余变量 $x_5\geqslant 0$，并令 $x_2=x_2'-x_2''$，其中，$x_2'\geqslant 0$，$x_2''\geqslant 0$

得到以下等价的标准形式：

$$\max z'=-2x_1+3x_2'-3x_2''-x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1-x_2'+x_2''+2x_3+x_4=3 \\ 2x_1+3x_2'-3x_2''-x_3-x_5=5 \\ x_1+x_2'-x_2''+x_3=4 \\ x_1,\ x_2',\ x_2'',\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

1.3.2　线性规划解的概念

对于线性规划的标准型：

$$\max z = CX$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

设 $r(A_{m\times n}) = m<n$，将 A 按列分块，记为 $A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$。有以下几个线性规划问题的基与解的概念。

（1）**基、基变量、非基变量** A 的任一非奇异 m 阶子矩阵 B 均称为线性规划的一个基；设 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$，则称 P_j（$j=1,2,\cdots,m$）为基向量；称与其相对应的变量 x_j（$j=1,2,\cdots,m$）为基变量；其余的变量称为非基变量。

（2）**基（本）解、基（本）可行解、最优解** 设 B 是线性规划的一个基，在 $AX=b$ 中，令非基变量取零时由 $AX=b$ 求出的解称为线性规划对应于基 B 的基（本）解，记为 X_B；若 $X_B\geqslant 0$，则称 X_B 为基（本）可行解，且基 B 为可行基；使目标函数取到最大值的基（本）可行解称为最优解。

（3）**退化的基本解** 若基本解中有基变量值为 0，则称之为退化的基（本）解。类似地，有退化的基本可行解和退化的基本最优解。

1.3.3 单纯形法的基本思想

线性规划的有效算法是单纯形法（Simplex Method），它是由美国运筹学家丹捷格于 1947 年首创的。若线性规划问题存在最优解，则必存在某一个基本可行解为最优解，所以对于给定的线性规划问题，其求解思路为：从可行域中的一个基可行解出发，判别它是否是最优解，如果不是，寻找下一个基可行解，并且努力使目标函数得到改进；如此迭代下去，直到找到最优解或判定问题无解为止。

1.3.4 最优性检验与解的判别

对标准型的一般线性规划问题，经过变换、迭代，可将线性规划约束条件中非基变量移至方程右边，得出如下形式

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_1' - a_{1,m+1}'x_{m+1} - \cdots - a_{1n}'x_n \\
x_2 &= b_2' - a_{2,m+1}'x_{m+1} - \cdots - a_{2n}'x_n \\
&\vdots \\
x_m &= b_m' - a_{m,m+1}'x_{m+1} - \cdots - a_{mn}'x_n
\end{aligned}$$

即

$$x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}'x_j \quad i=1,2,\cdots,m \tag{1-7}$$

将式（1-7）代入目标函数式中，整理得

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i' + \sum_{j=m+1}^{n}\left[c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}'\right]x_j \tag{1-8}$$

令 $z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i', z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}', j=m+1,\cdots,n$，于是