考研不是人生的苦旅，它是我们心灵的乐途！
考研不是无奈的选择，它是我们梦想的起点！

科科佳书苑
Conqueror Books

涵盖全程复习所需全部视频

# 考研数学

潘正义 编著

DIYISHIPIN

# 第一视频

## (经济类)

供数学三考生专用

在你成功之前，我们不会成功！

在你满意之前，我们不会满意！

DVD

世界图书出版公司

科科佳书苑
Conqueror Books

◎ 节约近200小时的时间，节省上千元的报班费用！
◎ 可反复听，不用担心漏听、错记，实现了精准学习！
◎ 学习方式自由了，不再受时空限制！
◎ 135分，不再是奢求了！

第一视频，涨时代最给力的考研利器！

涵盖全程复习所需全部视频

# 考研数学
DIYISHIPIN
# 第一视频
## （经济类）

供数学三考生专用

在你成功之前，我们不会成功！

在你满意之前，我们不会满意！

潘正义　编著

DVD

世界图书出版公司

## 图书在版编目(CIP)数据

考研数学第一视频. 经济类 / 潘正义编著. 一北京：
世界图书出版公司北京公司，2010.4(2011.2 修订)
ISBN 978-7-5100-1947-0

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①潘… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入
学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 047252 号

**考研数学第一视频(经济类)**

---

**编　　著**：潘正义
**责任编辑**：王志平
**封面设计**：余曙敏

---

**出　　版**：世界图书出版公司北京公司
**发　　行**：世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 010－88861710　邮编 100089)
**销　　售**：各地新华书店
**印　　刷**：廊坊人民印刷厂

---

**开　　本**：787×1092 毫米　1/16
**印　　张**：30.5
**字　　数**：496 千字
**版　　次**：2010 年 4 月第 1 版　2011 年 2 月第 1 次修订　2011 年 2 月第 2 次印刷

---

**ISBN　978-7-5100-1947-0/G·395**　　**定价：158.00 元**

---

**服务热线**：010－88861710

# 写在前面的话

## —— 一套提升复习效率 50%—300%的最佳方案

如果你是一名正在准备考研的考生，请认真投入 10 分钟仔细阅读这份特殊的成功邀请函，必将为你接下来的考研学习避免难以估量的时间消耗、精力消耗和金钱消费，并创造看见、看不见的效率提升、成本节约及成功感觉。

***你是否还在困惑：***
*为什么一复习就手足无措，不知从何抓起？*
*为什么别人花时间少，复习进度还比我快？*
*为什么背了那么多公式、概念，一做题大脑就一片空白？*

***手足无措、惊慌、失望、揪心、孤独、无助……？***
*一切都只有一个原因：方法不对、效率低下！*
*那如何提升效率呢？你其实只需要：*
*一套业已证明有效的考研规划表；*
*一套最佳的高效时间管理方法；*
*一套温馨的考研保姆式服务；*
*一套有方法、有技巧、有效率的全程讲解课程；*
*一本由浅入深、能及时检验复习效果的全程辅导教材。*

***这就是考研数学第一视频！拥有它，你不仅可以获得以上全部内容，还可以得到：***
*(1)考研数学的 24 种解题思维模式，帮你走出思维困境；*
*(2)56 个重要结论——帮你提升解题速度；*
*(3)113 个数学题型——帮你全面掌握数学架构；*
*(4)116 个关键点——帮你解决做题过程中的卡壳问题；*
*(5)17 个综合点——帮你打开思路，纵横考场；*
*(6)563 个经典例题的详细讲解——帮你全面掌握考研所需的原理、概念、公式、技巧。*

拥有它，可以为你省下近 200 小时的时间，还可以节约上千元的听课投入。拥有它，还可以反复听，不用担心上课时的漏听、错记，实现了精准学习！拥有它，你的学习方式也自由了，不再受时空限制，可随心所欲，轻松学习！

***更重要的是本书在编写上突破常规，凸显了三大独特亮点：***

1. 从研究真题入手，近 25 年的真题命题规律全在其中。所有例题和习题均源自真题或参照真题标准进行选取，使考生熟悉本书后，在参加考试时对大部分试题有似曾相识的感觉。

2. 重视基础的导入和讲解，因为每年考试中有 60% 以上习题源自基本原理、概念等，通过对基础知识的系统归纳和反复讲解，从而有效解决了学生基础不扎实的问题。

3. 无技巧不成数学，本书高度重视基础知识与解题技巧的融会贯通。作者将毕生教学中见过或使用过的各种技巧都融入其中。如，二重积分中四种偏心圆的极坐标形式等。

一旦掌握并运用这些方法技巧、结论和关键点，你的复习效率将提升 **50%—300%**。

有一盏灯，为你在黑夜里照亮归途！

有一个声音，在你一次次跌倒时，告诉你要坚强！

有一种爱，给你无私的关怀与无穷的力量！

有一种力量，给你勇气实现光荣与梦想！

**这就是——考研数学第一视频**！

成功永远不会青睐只懂得埋头努力的人，只会眷顾那些努力学习并找对方法的人。而找方法最快的方式不是慢慢探索，而是学习并使用那些已经证明确实有效的理念、方法和策略！！

成功就是抢占先机，失败就是错失良机。我们人生的结果其实就在下决定的那一刻！

恭喜你做出了智慧的抉择！

编者于北京

# 目录

CONTENTS

## 第一篇　微积分

# 第二篇　线性代数

# 第三篇 概率论与数理统计

# 第一篇　微积分

# 第一章　函数·极限·连续

## §1.1　函数

### 一、基本概念

**定义 1.1**　$\forall x \in X$,按照某一确定的对应关系,有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应,则称 $f$ 是由 $X$ 到 $Y$ 的一个函数,记作 $y = f(x)$.

**定义 1.2**　若函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域,则对于 $\forall x \in X$ 有唯一确定的 $y = f[g(x)]$ 与之对应,称 $y = f[g(x)]$ 为 $g$ 与 $f$ 的复合函数.

关于函数的性质:

#### 1. 奇偶性

奇函数　函数 $y = f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$,称该函数为奇函数;

偶函数　函数 $y = f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$,称该函数为偶函数.

运算规则　(ⅰ) 奇函数 + 奇函数 = 奇函数;

(ⅱ) 偶函数 + 偶函数 = 偶函数;

(ⅲ) 奇函数 × 奇函数 = 偶函数;

(ⅳ) 偶函数 × 偶函数 = 偶函数;

(ⅴ) 奇函数 × 偶函数 = 奇函数;

(ⅵ) 若 $f(x)$ 是连续的奇函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(ⅶ) 若 $f(x)$ 是连续的偶函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$;

(ⅷ) 当 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,(ⅵ)、(ⅶ) 对 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也成立.

【注】(1) 常数 $C$ 是偶函数;

(2) 0 既是奇函数也是偶函数.

#### 2. 单调性

若 $\forall x_1 < x_2$ 有 $f(x_1) < f(x_2)$,称 $y = f(x)$ 是(严格)单增函数;

若 $\forall x_1 < x_2$ 有 $f(x_1) > f(x_2)$,称 $y = f(x)$ 是(严格)单减函数.

#### 3. 有界性

$y = f(x)$ 的定义域为 $X$,若 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leqslant M$,称 $y = f(x)$ 为有界函数,称 $M$ 为

$y=f(x)$ 的界.(应注意:若 $M$ 为 $f(x)$ 的界,则任何大于 $M$ 的数都是 $y=f(x)$ 的界.)

**定义 1.3** 设 $y=f(x)$ 是定义在 $X$ 上的函数,$Y$ 是该函数的值域,如果对于 $\forall y\in Y$ 有唯一确定的 $x\in X$ 与之对应,由这样对应关系确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

**定理 1.1** 在 $X$ 上(严格)单调的连续函数 $y=f(x)$ 一定存在(严格)单调的连续的反函数 $x=f^{-1}(y)$.

## 二、典型例题选讲

**【例 1.1】** 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$

求 $f[f(x)]$,$g[g(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

**【解】** 由 $g(x)$ 的表达式知 $g(x)\leqslant 0$,

$$f[f(x)]=\begin{cases}0 & f(x)\leqslant 0\\ f(x) & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}=f(x),$$

$$g[g(x)]=\begin{cases}0 & g(x)\leqslant 0\\ -g^2(x) & g(x)>0\end{cases}=0,$$

$$f[g(x)]=\begin{cases}0 & g(x)\leqslant 0\\ g(x) & g(x)>0\end{cases}=0,$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}0 & f(x)\leqslant 0\\ -f^2(x) & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}=g(x).$$

**【例 1.2】** 设 $f(x)=e^{\arcsin x}$ 且 $f[g(x)]=x-1$. 求 $g(x)$ 的表达式及定义域.

**【解】** $f[g(x)]=e^{\arcsin g(x)}=x-1$,

$\arcsin g(x)=\ln(x-1)$,

$g(x)=\sin[\ln(x-1)]$,

定义域:$\begin{cases}x-1>0\\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\ln(x-1)\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\ 1+e^{-\frac{\pi}{2}}\leqslant x\leqslant 1+e^{\frac{\pi}{2}}\end{cases}$

所以定义域为:$1+e^{-\frac{\pi}{2}}\leqslant x\leqslant 1+e^{\frac{\pi}{2}}$.

**【例 1.3】** (1) 求 $f(x)=\arccos\dfrac{x}{[x]}$ 的定义域,其中$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数;

(2) 设 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域($a>0$).

**【解】** (1)$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1\\ [x]\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0 \text{ 或 } x=\text{正整数}\\ x<0 \text{ 或 } x\geqslant 1\end{cases}$

所以定义域为 $x<0$,$x=1,2,3,\cdots\cdots$

(2)$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$

(ⅰ)$1-a<a$ 即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为空集;

(ⅱ)$1-a=a$ 即 $a=\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为 $x=\dfrac{1}{2}$;

(ⅲ)$1-a>a$ 即 $a<\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为$[a,1-a]$.

【例 1.4】设 $f(x)$ 为连续函数，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 即 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

证明:(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时 $F(x)$ 为偶函数;

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时 $F(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow C=0$.

【证明】考察 $F_1(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

$$(1)F_1(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令 u=-t}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F_1(x)$$

所以 $F_1(x)$ 为偶函数.

所以 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F_1(x)+C$ 为偶函数.

$$(2)F_1(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令 u=-t}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F_1(x)$$

所以 $F_1(x)$ 为奇函数.

所以 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F_1(x)+C$ 为非奇非偶函数，当且仅当 $C=0$ 时 $F(x)$ 是奇函数.

【注】设 $f(x)$ 的导数存在，有以下结论:

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数;若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数.

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 的一切原函数都是偶函数;若 $f(x)$ 是偶函数，则只有一个原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

(3) 若 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数.

(4) 若 $f(x)$ 是周期为 $T$ 的周期函数，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 $T$ 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$.

# §1.2 极限·连续

## 一、基本概念

**定义 1.4** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

**定义 1.5** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.

**定义 1.6** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.

**定义 1.7** $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.

**定义 1.8** $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.

**定义 1.9** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$.

**定义 1.10** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|>M$.

对于定义 1.6,1.9,1.10 也可定义单边极限作为练习，读者可自行阐述.

关于极限的几个性质:

**性质 1** (唯一性)任何情形下，如果极限存在，则极限值是唯一的.

**性质 2** （有界性）

（ⅰ）序列极限存在的有界性　如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$存在，则序列$\{x_n\}$有界；

（ⅱ）函数极限存在的局部有界性　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$存在，则存在$\delta>0$及$M>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\leqslant M$.

**性质 3** （有序性）

（ⅰ）如果存在$N$，当$n>N$时有$x_n\leqslant y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{x\to\infty}y_n=b$，则$a\leqslant b$；

（ⅱ）如果存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，则$a\leqslant b$.

**性质 4** （保号性）

（ⅰ）如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，则存在$N$，当$n>N$时，有$x_n>0$；

（ⅱ）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0$，则存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$.

**性质 5**　极限存在的充要条件

$\lim f(x)=a\Leftrightarrow f(x)=a+\alpha$，其中$\lim\alpha=0$.

**【注】**以上叙述的性质，对于$x\to\infty$及单边极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$都成立，希望读者自行阐述.

**定义 1.11**　连续性

（ⅰ）设$\Delta y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)$，如果$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\triangle y=\lim\limits_{\triangle x\to 0}[f(x_0+\triangle x)-f(x_0)]=0$，称函数在$x_0$连续；

（ⅱ）（等价于（ⅰ））如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，称函数在$x_0$连续；

（ⅲ）若$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$，称$f(x)$在$x_0$右连续；

（ⅳ）若$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$，称$f(x)$在$x_0$左连续；

（ⅴ）$f(x)$在$(a,b)$中的每一点都连续，称$f(x)$在$(a,b)$连续；

（ⅵ）$f(x)$在$(a,b)$连续，且在$a$右连续，在$b$左连续，称$f(x)$在$[a,b]$连续.

有以下结论：$f(x)$在$x_0$连续$\Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$.

应熟记以下极限计算的结果：

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty(a>1,n>0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}=\infty(n>0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1(k>0)$$

## 二、典型例题选讲

### 题型一 关于"抓大头"

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}\xlongequal{\text{抓大头}}\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ \infty & m>n\\ 0 & m<n\end{cases}$$

所谓"抓大头"即是抓取分子、分母的最高次幂,对于根式的情形可类似处理.

**【例 1.5】**计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(x+1)^{20}}{(x-1)^{50}}$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n-\sqrt{n+1}}-1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

**【解】**(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(x+1)^{20}}{(x-1)^{50}}\xlongequal{\text{抓大头}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{30}x^{30}x^{20}}{x^{50}}=2^{30}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n-\sqrt{n+1}}-1}\xlongequal{\text{抓大头}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=2$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}\xlongequal{\text{抓大头}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+n}=\dfrac{1}{2}$.

### 题型二 关于无穷小

**定义 1.12** (ⅰ)若 $\lim\alpha=0$,称 $\alpha$ 为该极限过程的无穷小量($\lim$ 可以是 $\lim\limits_{x\to x_0}$,$\lim\limits_{x\to\infty}$ 等各种类型的极限).

(ⅱ)若 $\lim\alpha=0$,$\lim\beta=0$,且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,称 $\alpha$ 为比 $\beta$ 高阶的无穷小,记作 $\alpha=o(\beta)$;

(ⅲ)若 $\lim\alpha=0$,$\lim\beta=0$ 且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k\neq0$,称 $\alpha$ 和 $\beta$ 为同阶无穷小;

(ⅳ)若 $\lim\alpha=0$,$\lim\beta=0$ 且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,称 $\alpha$ 和 $\beta$ 为等价无穷小量,记作 $\alpha\sim\beta$.

**定义 1.13** 若 $\lim\alpha=\infty$,称 $\alpha$ 为该极限过程的无穷大量.

有以下重要结论:

(ⅰ)$\lim\alpha=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha}$ 为相同极限过程的无穷大量;

(ⅱ)设 $\lim\alpha=\lim\alpha'=\lim\beta=\lim\beta'=0$ 且 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

以上第二个结论称为等价无穷小代换,应注意:对于极限表达式中的乘除项可用等价无穷小代换,对于加减项不能用等价无穷小代换.

下面列出当 $x\to0$ 时的常用等价无穷小代换:

$\sin x\sim x$　$\tan x\sim x$　$\arcsin x\sim x$　$\arctan x\sim x$　$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$　$e^x-1\sim x$,

$\ln(1+x)\sim x$　$(1+\alpha x)^\beta-1\sim\alpha\beta x$　$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$.

事实上，使用 $\sin x \sim x$ 可以完全替代重要极限：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

【例 1.6】当 $x\to 1$ 时无穷小 $1-x$ 和(1)$1-x^3$，(2) $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶？是否等价？

【解】(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}=\dfrac{1}{3}$，

所以 $1-x$ 和 $1-x^3$ 同阶不等价.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x)(1+x)}=1$，

所以 $1-x\sim\dfrac{1}{2}(1-x^2)(x\to 1)$.

【例 1.7】设 $f(x)=1-x\sin x$，则当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 是(　　).

(A) 无穷大　　(B) 无界变量，但非无穷大

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在　　(D) 有界变量，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在

【解】当 $x_n=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ 时 $f(x_n)\to\infty$，

当 $x_m=m\pi$ 时，$f(x_m)=1$.

所以 $f(x)$ 是无界变量，但非无穷大，(B) 为答案.

【例 1.8】当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量

① $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$　　② $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$

③ $x-(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos x)\sin x$　　④ $e^{x^4-x}-1$

从低阶到高阶的排列顺序为(　　).

(A)①②③④　　(B)③①②④

(C)④③②①　　(D)④②①③

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})x^3}=\dfrac{1}{4}.$

所以 ① 是 3 阶无穷小；

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}&=\left[1+\frac{1}{2}2x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(2x)^2+o(x^2)\right]\\&\quad-\left[1+\frac{1}{3}\cdot 3x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(3x)^2+o(x^2)\right]\\&=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

所以 ② 是 2 阶无穷小；

$x-(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos x)\sin x=x-[\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)][x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)]$

$=x-[1+\dfrac{x^2}{6}+o(x^3)][x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)]$

$= x - [x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)] = o(x^4)$.

所以 ③ 为高于 4 阶的无穷小；

$e^{x^4 - x} - 1 \sim x^4 - x = x(-1 + x^3)$ 为 1 阶无穷小.

所以无穷小量由低阶到高阶的次序为 ④②①③，(D) 为答案.

**【例 1.9】** 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}})$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}{x}$.

**【解】** (1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}\ln a} - 1)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n}\ln a = \ln a$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}}(3^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}}(e^{\frac{\ln 3}{x(x+1)}} - 1)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{\ln 3}{x(x+1)} = \ln 3$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{3}} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{2}{3}\ln(1+x)} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x}{x} = \frac{2}{3}$.

**【例 1.10】** 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\arcsin x)^3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{(\arcsin x)^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + x^3 \cos\frac{1}{x}}{(1 + \cos x)(e^{x^2} - 1)}$.

**【解】** (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\arcsin x)^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \tan x\cos x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{(\arcsin x)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin^2 x} - 1}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2(\sqrt{\cos x} + 1)} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}\sin^2 x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2(\sqrt{\cos x}+1)}-\frac{1}{3}=-\frac{7}{12}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+x^3\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)(e^{x^2}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+x^3\cos\frac{1}{x}}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos\frac{1}{x}}{2}=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}.$

**【例 1.11】**(1) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1}{a^x-1}=1,(a>0)$,求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$;

(2) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{e^{x^3}-1}=1$,且当$x\to 0$时

$f(x)\sim ax^b$,求 $a,b$.

**【解】**(1) 因为$\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1)=0$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin x=0$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1}{a^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}f(x)\sin x}{x\ln a}=1$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3\ln a$.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^3}-1)=0$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1)=0$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{e^{x^3}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\frac{f(x)}{x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}ax^b}{x^4}=1$,

所以 $b=4,a=2$.

**题型三　关于洛必达法则**

将等价无穷小代换与洛必达法则结合起来使用,可以使求极限问题解得又迅速又准确.洛必达法则只能解决“$\frac{0}{0}$”型及“$\frac{\infty}{\infty}$”型.对于“$\infty-\infty$”型必须通分转化成“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型;“$0\cdot\infty$”型也可转化成“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型;而“$0^0$”型、“$\infty^0$”型和“$1^\infty$”型都可用对数恒等式 $e^{\ln N}=N$ 后再用洛必达法则.

**【例 1.12】**求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(2^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}})$;　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1})$.

**【解】**(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(2^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}})\xlongequal{令x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{2^t-3^t}{t}$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{2^t\ln 2-3^t\ln 3}{1}=\ln\frac{2}{3}.$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right) \xlongequal{令\ x=\frac{1}{t}} \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{1+t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+t}\right)^2}\cdot\left[-\frac{1}{(1+t)^2}\right]}{1}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{(1+t)^2+1}=\frac{1}{2}.$$

**【例 1.13】**求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln\frac{x}{1+x}\right]$.

**【解】**(1) 本题为"$\infty-\infty$"型，所以应该先通分.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\ln(1+x^2)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\frac{2x}{1+x^2}}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin 2x-2x}{4x^3(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x-2x)+x^2\sin 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(-\frac{1}{2}4x^2\right)}{12x^2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

(2) $$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln\frac{x}{1+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln x+\ln(1+x)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\ln x\left[\frac{1}{(1+x)^2}-1\right]=\lim_{x\to 0^+}\ln x\,\frac{-2x-x^2}{(1+x)^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(2x+x^2)^{-1}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-(2x+x^2)^{-2}(2+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(2+x)^2}{x(2+2x)}=0.$$

**【例 1.14】**求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

**【解】** $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1+x\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x\cos x+\sin x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\cos x+\frac{2\sin x}{x}}=\frac{4}{3}.$$