

考研不是人生的苦旅，它是我们心灵的乐途！

考研不是无奈的选择，它是我们梦想的起点！

涵盖全程复习所需全部视频

考研数学

潘正义
编著



科科佳书苑
Conqueror Books



DIYISHIPIN

第一视频

(经济类)

供数学三考生专用

在你成功之前，我们不会成功！



在你满意之前，我们不会满意！

世界图书出版公司

- ◎ 节约近200小时的时间，节省上千元的报班费用！
- ◎ 可反复听，不用担心漏听、错记，实现了精准学习！
- ◎ 学习方式自由了，不再受时空限制！
- ◎ 135分，不再是奢求了！

第一视频，涨时代最给力的考研利器！



科科佳书苑
Conqueror Books

涵盖全程复习所需全部视频

考研数学



第一视频

(经济类)

供数学三考生专用

潘正义 编著



在你成功之前，我们不会成功！

在你满意之前，我们不会满意！

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学第一视频. 经济类 / 潘正义编著. — 北京:
世界图书出版公司北京公司, 2010.4(2011.2 修订)
ISBN 978-7-5100-1947-0

I. ①考… II. ①潘… III. ①高等数学 — 研究生 — 入
学考试 — 自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 047252 号

考研数学第一视频(经济类)

编 著: 潘正义
责任编辑: 王志平
封面设计: 余曙敏

出 版: 世界图书出版公司北京公司
发 行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号 电话 010-88861710 邮编 100089)
销 售: 各地新华书店
印 刷: 廊坊人民印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16
印 张: 30.5
字 数: 496 千字
版 次: 2010 年 4 月第 1 版 2011 年 2 月第 1 次修订 2011 年 2 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5100-1947-0/G · 395

定价: 158.00 元

服务热线: 010-88861710

写在前面的话

——一套提升复习效率 50%—300% 的最佳方案

如果你是一名正在准备考研的考生，请认真投入 10 分钟仔细阅读这份特殊的成功邀请函，必将为你接下来的考研学习避免难以估量的时间消耗、精力消耗和金钱消费，并创造看见、看不见的效率提升、成本节约及成功感觉。

你是否还在困惑：

为什么一复习就手足无措，不知从何抓起？

为什么别人花时间少，复习进度还比我快？

为什么背了那么多公式、概念，一做题大脑就一片空白？

手足无措、惊慌、失望、揪心、孤独、无助……？

一切都只有一个原因：方法不对、效率低下！

那如何提升效率呢？你其实只需要：

一套业已证明有效的考研规划表；

一套最佳的高效时间管理方法；

一套温馨的考研保姆式服务；

一套有方法、有技巧、有效率的全程讲解课程；

一本由浅入深、能及时检验复习效果的全程辅导教材。

这就是考研数学第一视频！拥有它，你不仅可以获得以上全部内容，还可以得到：

(1) 考研数学的 24 种解题思维模式，帮你走出思维困境；

(2) 56 个重要结论——帮你提升解题速度；

(3) 113 个数学题型——帮你全面掌握数学架构；

(4) 116 个关键点——帮你解决做题过程中的卡壳问题；

(5) 17 个综合点——帮你打开思路，纵横考场；

(6) 563 个经典例题的详细讲解——帮你全面掌握考研所需的原理、概念、公式、技巧。

拥有它，可以为你省下近 200 小时的时间，还可以节约上千元的听课投入。拥有它，还可以反复听，不用担心上课时的漏听、错记，实现了精准学习！拥有它，你的学习方式也自由了，不再受时空限制，可随心所欲，轻松学习！

更重要的是本书在编写上突破常规,凸显了三大独特亮点:

1. 从研究真题入手,近 25 年的真题命题规律全在其中。所有例题和习题均源自真题或参照真题标准进行选取,使考生熟悉本书后,在参加考试时对大部分试题有似曾相识的感觉。
2. 重视基础的导入和讲解,因为每年考试中有 60% 以上习题源自基本原理、概念等,通过对基础知识的系统归纳和反复讲解,从而有效解决了学生基础不扎实的问题。
3. 无技巧不成数学,本书高度重视基础知识与解题技巧的融会贯通。作者将毕生教学中见过或使用过的各种技巧都融入其中。如,二重积分中四种偏心圆的极坐标形式等。

一旦掌握并运用这些方法技巧、结论和关键点,你的复习效率将提升 **50%—300%**。

有一盏灯,为你在黑夜里照亮归途!

有一个声音,在你一次次跌倒时,告诉你要坚强!

有一种爱,给你无私的关怀与无穷的力量!

有一种力量,给你勇气实现光荣与梦想!

这就是——考研数学第一视频!

成功永远不会青睐只懂得埋头努力的人,只会眷顾那些努力学习并找对方法的人。而找方法最快的方式不是慢慢探索,而是学习并使用那些已经证明确实有效的理念、方法和策略!!

成功就是抢占先机,失败就是错失良机。我们人生的结果其实就在下决定的那一刻!

恭喜你做出了智慧的抉择!

编者于北京

目 录

CONTENTS

第一篇 微积分

第一章 函数·极限·连续 1

§ 1.1 函数 1

§ 1.2 极限·连续 3

题型一 关于“抓大头” 5

题型二 关于无穷小 5

题型三 关于洛必达法则 8

题型四 关于“ 1^∞ ”型极限 11

题型五 关于数列极限 13

题型六 关于夹逼定理 14

题型七 关于单调有界序列 16

题型八 关于用定积分求极限 18

题型九 关于左、右极限 19

题型十 求极限表达式中的未知参数 21

题型十一 利用拉格朗日中值定理或泰勒公式计算极限 22

题型十二 关于在 $x=x_0$ 的连续性及间断点 25

题型十三 关于重要定理的证明 27

习题一 28

第二章 导数与微分 32

§ 2.1 导数的定义 32

§ 2.2 基本求导公式及求导运算法则 38

题型一 分段函数求导 39

题型二 复合函数求导 41

题型三 隐函数求导及参数方程求导 43

题型四 反函数求导 45

题型五 对上限变量求导 46

§ 2.3 高阶导数 47

题型一 使用归纳法求高阶导数 48

题型二 间接法 49

题型三 利用莱布尼兹公式求高阶导数 50

题型四 利用幂级数展开(或泰勒公式)求 $f^{(n)}(0)$ 51

习题二 51

第三章 积 分 55

§ 3.1 不定积分 55

题型一 三角替换 66

题型二 指数代换及简单根式的不定积分 68

习题三(1) 74

§ 3.2 定积分 76

习题三(2) 96

§ 3.3 广义积分 99

习题三(3) 103

第四章 中值定理 104

§ 4.1 闭区间上连续函数的性质 104

§ 4.2 微分中值定理 108

题型一 验证中值定理正确性 108

题型二 利用罗尔定理证明零点的存在性 109

题型三 利用连续性、极值、单调性证明函数存在零点,并确定零点个数 112

题型四 证明二个中值 ξ, η 的等式及恒等式 114

§ 4.3 泰勒公式 116

题型一 将函数麦克劳林展开或泰勒展开 117

题型二 利用泰勒展开证明等式及不等式 119

§ 4.4 积分中值定理	122
§ 4.5 关于中值位置的讨论	124
§ 4.6 本章中重要定理的证明	126
习题四	128

第五章 一元微积分的应用

§ 5.1 导数与切线	131
§ 5.2 单调性、凹凸性	134
§ 5.3 渐近线、极值与最值	137
§ 5.4 不等式	142
题型一 利用单调性证明不等式	142
题型二 用中值定理证明不等式	145
题型三 用凹凸性证明不等式	146
题型四 用极值最值证明不等式	147
题型五 其他不等式	148
习题五(1)	152
§ 5.5 几何应用	155
§ 5.6 一元微积分在经济方面的应用	159
习题五(2)	162

第六章 常微分方程

§ 6.1 常微分方程的基本概念	166
§ 6.2 一阶微分方程	167
题型一 可分离变量方程	167
题型二 一阶齐次方程	167
题型三 一阶线性方程	169
题型四 将变上限积分方程转化成一阶微分方程	174
§ 6.3 常系数一阶线性差分方程	175
§ 6.4 二阶常系数线性微分方程	177
§ 6.5 常微分方程的应用	182
习题六	183

第七章 多元函数微分学

§ 7.1 函数、极限、连续	187
§ 7.2 偏导数与全微分	190
题型一 求多元复合函数的偏导数及全微分	193
题型二 隐函数求导	194
题型三 利用变量替换将方程变形	197
题型四 利用偏导数或全微分确定常数或函数	199

§ 7.3 极值与最值	200
题型一 无条件极值	201
题型二 条件极值	203
§ 7.4 本章中重要定理的证明	205
习题七	206

第八章 二重积分

题型一 交换积分次序	211
题型二 选择适当坐标系计算二重积分	213
题型三 对称性	215
题型四 分区域积分	219
题型五 其他	220
习题八	222

第九章 级数

§ 9.1 数项级数	225
§ 9.2 幂级数	235
题型一 收敛半径与收敛区域	236
题型二 函数展开成幂级数	239
题型三 用逐项求导、逐项求积分方法求幂级数的和函数	243
题型四 幂级数与微分方程	244
题型五 数项级数求和	246
习题九	249

第二篇 线性代数

第一章 行列式

题型一 低阶行列式的计算	256
题型二 n 阶行列式的计算	260
题型三 应用行列式与方阵相关性质计算行列式	266
题型四 克莱姆法则	271
习题一	272

第二章 矩阵

题型一 矩阵的基本运算	280
题型二 求方阵的高次幂	285
题型三 初等变换与初等矩阵	287
题型四 逆矩阵	289
题型五 矩阵方程	294
习题二	297

第三章 向量..... 302

 题型一 向量组的线性表示 304

 题型二 向量组的极大线性无关组,向量组的秩与矩阵的秩 311

习题三 315

第四章 线性方程组 318

 题型一 有关解的性质及结构 319

 题型二 求解线性方程组 321

 题型三 求方程组中的参数 326

 题型四 二个方程组的公共解 329

 题型五 证明题 332

习题四 334

第五章 相似矩阵与二次型..... 340

 题型一 矩阵的特征值与特征向量 344

 题型二 相似矩阵 350

 题型三 可相似对角化问题 354

 题型四 实对称矩阵相似对角化问题 357

 题型五 相似对角化对于矩阵高次幂的应用 360

 题型六 二次型化标准型 362

 题型七 正定二次型与正定矩阵 369

习题五 372

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率 378

 题型一 事件的运算与概率的性质 381

 题型二 古典概型与几何概型的计算 382

 题型三 条件概率、乘法公式与事件的独立性 385

 题型四 全概公式与贝叶斯公式 390

 题型五 n 重贝努利试验 392

习题一 394

第二章 随机变量..... 398

 § 2.1 一维随机变量 398

 题型一 分布函数、概率密度及离散型随机变量的分布律 401

 题型二 利用重要分布求概率 407

 题型三 随机变量函数的分布 412

 § 2.2 二维随机变量 418

 题型一 二维随机变量的联合分布、边缘分布、条件分布及独立性 422

 题型二 二维随机变量函数的分布 427

习题二 432

第三章 随机变量的数字特征 438

 题型一 一维随机变量的数字特征 440

 题型二 二维随机变量函数数学期望与方差 448

 题型三 协方差、相关系数及独立性 451

 题型四 应用题 455

习题三 458

第四章 大数定律及中心极限定理 461

 题型一 关于切比雪夫不等式 462

 题型二 关于中心极限定理 463

习题四 464

第五章 数理统计..... 466

 § 5.1 数理统计基本概念 466

 § 5.2 点估计 473

 题型一 矩估计与最大似然估计 473

习题五 476

第一篇 微积分

第一章 函数·极限·连续

§ 1.1 函数

一、基本概念

定义 1.1 $\forall x \in X$, 按照某一确定的对应关系, 有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 是由 X 到 Y 的一个函数, 记作 $y = f(x)$.

定义 1.2 若函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域, 则对于 $\forall x \in X$ 有唯一确定的 $y = f[g(x)]$ 与之对应, 称 $y = f[g(x)]$ 为 g 与 f 的复合函数.

关于函数的性质:

1. 奇偶性

奇函数 函数 $y = f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 称该函数为奇函数;

偶函数 函数 $y = f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 称该函数为偶函数.

运算规则 (i) 奇函数 + 奇函数 = 奇函数;

(ii) 偶函数 + 偶函数 = 偶函数;

(iii) 奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数;

(iv) 偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数;

(v) 奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数;

(vi) 若 $f(x)$ 是连续的奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

(vii) 若 $f(x)$ 是连续的偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;

(viii) 当 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛时, (vi)、(vii) 对 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 也成立.

【注】(1) 常数 C 是偶函数;

(2) 0 既是奇函数也是偶函数.

2. 单调性

若 $\forall x_1 < x_2$ 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $y = f(x)$ 是(严格)单增函数;

若 $\forall x_1 < x_2$ 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $y = f(x)$ 是(严格)单减函数.

3. 有界性

$y = f(x)$ 的定义域为 X , 若 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leq M$, 称 $y = f(x)$ 为有界函数, 称 M 为

$y = f(x)$ 的界. (应注意: 若 M 为 $f(x)$ 的界, 则任何大于 M 的数都是 $y = f(x)$ 的界.)

定义 1.3 设 $y = f(x)$ 是定义在 X 上的函数, Y 是该函数的值域, 如果对于 $\forall y \in Y$ 有唯一确定的 $x \in X$ 与之对应, 由这样对应关系确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数.

定理 1.1 在 X 上(严格)单调的连续函数 $y = f(x)$ 一定存在(严格)单调的连续的反函数 $x = f^{-1}(y)$.

二、典型例题选讲

【例 1.1】 设 $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$

求 $f[f(x)], g[g(x)], f[g(x)], g[f(x)]$.

【解】 由 $g(x)$ 的表达式知 $g(x) \leq 0$,

$$f[f(x)] = \begin{cases} 0 & f(x) \leq 0 \\ f(x) & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} = f(x),$$

$$g[g(x)] = \begin{cases} 0 & g(x) \leq 0 \\ -g^2(x) & g(x) > 0 \end{cases} = 0,$$

$$f[g(x)] = \begin{cases} 0 & g(x) \leq 0 \\ g(x) & g(x) > 0 \end{cases} = 0,$$

$$g[f(x)] = \begin{cases} 0 & f(x) \leq 0 \\ -f^2(x) & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases} = g(x).$$

【例 1.2】 设 $f(x) = e^{\arcsin x}$ 且 $f[g(x)] = x - 1$. 求 $g(x)$ 的表达式及定义域.

【解】 $f[g(x)] = e^{\arcsin g(x)} = x - 1$,

$$\arcsin g(x) = \ln(x - 1),$$

$$g(x) = \sin[\ln(x - 1)],$$

$$\text{定义域: } \begin{cases} x - 1 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \ln(x - 1) \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} \leq x \leq 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

所以定义域为: $1 + e^{-\frac{\pi}{2}} \leq x \leq 1 + e^{\frac{\pi}{2}}$.

【例 1.3】 (1) 求 $f(x) = \arccos \frac{x}{[x]}$ 的定义域, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数;

(2) 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域 ($a > 0$).

【解】 (1) $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{[x]} \leq 1 \\ [x] \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ 或 } x = \text{正整数} \\ x < 0 \text{ 或 } x \geq 1 \end{cases}$

所以定义域为 $x < 0, x = 1, 2, 3, \dots$

$$(2) \begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1 \\ 0 \leq x-a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq 1-a \\ a \leq x \leq 1+a \end{cases}$$

(i) $1-a < a$ 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 定义域为空集;

(ii) $1-a = a$ 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 定义域为 $x = \frac{1}{2}$;

(iii) $1-a > a$ 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, 定义域为 $[a, 1-a]$.

【例 1.4】 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ 即 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

证明: (1) 当 $f(x)$ 为奇函数时 $F(x)$ 为偶函数;

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时 $F(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow C = 0$.

【证明】 考察 $F_1(x) = \int_0^x f(t)dt$.

$$(1) F_1(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{\text{令 } u=-t} \int_0^x f(-u)(-du) = \int_0^x f(u)du = F_1(x)$$

所以 $F_1(x)$ 为偶函数.

所以 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C = F_1(x) + C$ 为偶函数.

$$(2) F_1(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{\text{令 } u=-t} \int_0^x f(-u)(-du) = -\int_0^x f(u)du = -F_1(x)$$

所以 $F_1(x)$ 为奇函数.

所以 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C = F_1(x) + C$ 为非奇非偶函数, 当且仅当 $C = 0$ 时 $F(x)$ 是奇函数.

【注】 设 $f(x)$ 的导数存在, 有以下结论:

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数; 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数.

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 的一切原函数都是偶函数; 若 $f(x)$ 是偶函数, 则只有一个原函数 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

(3) 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期函数.

(4) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数, 则 $\int_a^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow \int_0^T f(t)dt = 0$.

§ 1.2 极限·连续

一、基本概念

定义 1.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$.

定义 1.5 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - a| < \epsilon$.

定义 1.6 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - a| < \epsilon$.

定义 1.7 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $|f(x) - a| < \epsilon$.

定义 1.8 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 有 $|f(x) - a| < \epsilon$.

定义 1.9 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

定义 1.10 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

对于定义 1.6, 1.9, 1.10 也可定义单边极限作为练习, 读者可自行阐述.

关于极限的几个性质:

性质 1 (唯一性) 任何情形下, 如果极限存在, 则极限值是唯一的.

性质 2 (有界性)

(i) 序列极限存在的有界性 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在, 则序列 $\{x_n\}$ 有界;

(ii) 函数极限存在的局部有界性 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 存在, 则存在 $\delta > 0$ 及 $M > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

性质 3 (有序性)

(i) 如果存在 N , 当 $n > N$ 时有 $x_n \leq y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则 $a \leq b$;

(ii) 如果存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$,

则 $a \leq b$.

性质 4 (保号性)

(i) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 则存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$;

(ii) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$.

性质 5 极限存在的充要条件

$\lim f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha$, 其中 $\lim \alpha = 0$.

【注】以上叙述的性质, 对于 $x \rightarrow \infty$ 及单侧极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 都成立, 希望读者自行阐述.

定义 1.11 连续性

(i) 设 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 称函数在 x_0 连续;

(ii) (等价于 (i)) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 称函数在 x_0 连续;

(iii) 若 $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 右连续;

(iv) 若 $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 左连续;

(v) $f(x)$ 在 (a, b) 中的每一点都连续, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 连续;

(vi) $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且在 a 右连续, 在 b 左连续, 称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

有以下结论: $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

应熟记以下极限计算的结果:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty (a > 1, n > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty (n > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1 (k > 0)$$

二、典型例题选讲

题型一 关于“抓大头”

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n} \xrightarrow{\text{抓大头}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & m = n \\ \infty & m > n \\ 0 & m < n \end{cases}$$

所谓“抓大头”即是抓取分子、分母的最高次幂,对于根式的情形可类似处理.

【例 1.5】计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{30}(x+1)^{20}}{(x-1)^{50}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n-\sqrt{n+1}}-1};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1}-n).$$

【解】(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{30}(x+1)^{20}}{(x-1)^{50}} \xrightarrow{\text{抓大头}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{30} x^{30} x^{20}}{x^{50}} = 2^{30};$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n-\sqrt{n+1}}-1} \xrightarrow{\text{抓大头}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \xrightarrow{\text{抓大头}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

题型二 关于无穷小

定义 1.12 (i) 若 $\lim \alpha = 0$, 称 α 为该极限过程的无穷小量 ($\lim$ 可以是 $\lim_{x \rightarrow x_0}$, $\lim_{x \rightarrow \infty}$ 等各种类型的极限).

(ii) 若 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$, 且 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 称 α 为比 β 高阶的无穷小, 记作 $\alpha = o(\beta)$;

(iii) 若 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$ 且 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = k \neq 0$, 称 α 和 β 为同阶无穷小;

(iv) 若 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$ 且 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 称 α 和 β 为等价无穷小量, 记作 $\alpha \sim \beta$.

定义 1.13 若 $\lim \alpha = \infty$, 称 α 为该极限过程的无穷大量.

有以下重要结论:

(i) $\lim \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}$ 为相同极限过程的无穷大量;

(ii) 设 $\lim \alpha = \lim \alpha' = \lim \beta = \lim \beta' = 0$ 且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \frac{\beta'}{\alpha}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

以上第二个结论称为等价无穷小代换, 应注意: 对于极限表达式中的乘除项可用等价无穷小代换, 对于加减项不能用等价无穷小代换.

下面列出当 $x \rightarrow 0$ 时的常用等价无穷小代换:

$$\sin x \sim x \quad \tan x \sim x \quad \arcsin x \sim x \quad \arctan x \sim x \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad e^x - 1 \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad (1+\alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha \beta x \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

事实上,使用 $\sin x \sim x$ 可以完全替代重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

【例 1.6】当 $x \rightarrow 1$ 时无穷小 $1-x$ 和 (1) $1-x^3$, (2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等价?

【解】(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{3},$

所以 $1-x$ 和 $1-x^3$ 同阶不等价.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x)(1+x)} = 1,$

所以 $1-x \sim \frac{1}{2}(1-x^2) (x \rightarrow 1).$

【例 1.7】设 $f(x) = 1 - x \sin x$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 是().

- (A) 无穷大 (B) 无界变量, 但非无穷大
(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在 (D) 有界变量, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在

【解】当 $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 时 $f(x_n) \rightarrow \infty,$

当 $x_m = m\pi$ 时, $f(x_m) = 1.$

所以 $f(x)$ 是无界变量, 但非无穷大, (B) 为答案.

【例 1.8】当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量

- ① $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}$ ② $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$
③ $x - (\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x)\sin x$ ④ $e^{x^4-x} - 1$

从低阶到高阶的排列顺序为().

- (A) ①②③④ (B) ③①②④
(C) ④③②① (D) ④②①③

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})x^3} = \frac{1}{4}.$

所以 ① 是 3 阶无穷小;

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x} &= \left[1 + \frac{1}{2}2x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(2x)^2 + o(x^2) \right] \\ &\quad - \left[1 + \frac{1}{3} \cdot 3x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}(3x)^2 + o(x^2) \right] \\ &= \frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

所以 ② 是 2 阶无穷小;

$$\begin{aligned} x - (\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x)\sin x &= x - [\frac{4}{3} - \frac{1}{3}(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))][x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)] \\ &= x - [1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)][x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)] \end{aligned}$$

$$= x - \left[x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right] = o(x^4).$$

所以 ③ 为高于 4 阶的无穷小;

$e^{x^4-x} - 1 \sim x^4 - x = x(-1 + x^3)$ 为 1 阶无穷小.

所以无穷小量由低阶到高阶的次序为 ④②①③, (D) 为答案.

【例 1.9】求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1); \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}{x}.$$

【解】 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n} \ln a = \ln a.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}} (3^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}} (e^{\frac{\ln 3}{x(x+1)}} - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{\ln 3}{x(x+1)} = \ln 3.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{3}} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{3} \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} \ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} x}{x} = \frac{2}{3}.$$

【例 1.10】求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\arcsin x)^3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{(\arcsin x)^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x)(e^{x^2} - 1)}.$$

【解】 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\arcsin x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan x \cos x}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{(\arcsin x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin^2 x} - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2 (\sqrt{\cos x} + 1)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \sin^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2(\sqrt{\cos x} + 1)} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{12}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x)(e^{x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

【例 1.11】(1) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x} - 1}{a^x - 1} = 1, (a > 0)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

$$(2) \text{ 设 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}} - 1}{e^{x^3} - 1} = 1, \text{ 且当 } x \rightarrow 0 \text{ 时}$$

$$f(x) \sim ax^b, \text{ 求 } a, b.$$

【解】(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (a^x - 1) = 0$,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{1+f(x)\sin x} - 1) = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)\sin x = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x} - 1}{a^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}f(x)\sin x}{x \ln a} = 1,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \ln a.$$

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^3} - 1) = 0$,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}} - 1) = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}} - 1}{e^{x^3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \frac{f(x)}{x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} ax^b}{x^4} = 1,$$

$$\text{所以 } b = 4, a = 2.$$

题型三 关于洛必达法则

将等价无穷小代换与洛必达法则结合起来使用,可以使求极限问题解得又迅速又准确. 洛必达法则只能解决“ $\frac{0}{0}$ ”型及“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型. 对于“ $\infty - \infty$ ”型必须通分转化成“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型; “ $0 \cdot \infty$ ”型也可转化成“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型; 而“ 0^0 ”型、“ ∞^0 ”型和“ 1^∞ ”型都可用对数恒等式 $e^{\ln N} = N$ 后再用洛必达法则.

【例 1.12】求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x}}); \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1}).$$

$$\begin{aligned} \text{【解】}(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x}}) & \stackrel{\text{令 } x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2^t - 3^t}{t} \\ & = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2^t \ln 2 - 3^t \ln 3}{1} = \ln \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right) & \stackrel{\text{令 } x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{1+t}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{1 + (\frac{1}{1+t})^2} \cdot \left[-\frac{1}{(1+t)^2} \right]}{1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+t)^2 + 1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

【例 1.13】求下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x} \right];$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln x}{(1+x)^2} - \ln \frac{x}{1+x} \right].$$

【解】(1) 本题为“ $\infty - \infty$ ”型，所以应该先通分。

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2) \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \frac{2x}{1+x^2}}{4x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) \sin 2x - 2x}{4x^3(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x - 2x) + x^2 \sin 2x}{4x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{4x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 2x}{4x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 2}{12x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 2x}{4x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(-\frac{1}{2} 4x^2)}{12x^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln x}{(1+x)^2} - \ln \frac{x}{1+x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln x}{(1+x)^2} - \ln x + \ln(1+x) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \left[\frac{1}{(1+x)^2} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \frac{-2x - x^2}{(1+x)^2} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(2x + x^2)^{-1}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(2x + x^2)^{-2}(2 + 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2(2+x)^2}{x(2+2x)} = 0.
 \end{aligned}$$

【例 1.14】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1+x \sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x \cos x + \sin x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\cos x + \frac{2 \sin x}{x}} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$