

数 学 分 析

题 解

(下 册)

泰 安 师 专 数 学 系 主 编

这本《习题解答》是泰安、临沂、济宁、昌潍、青岛、烟台、枣庄、菏泽、聊城、德州、淄博等师范专科学校和昌潍教师进修学院所编写的《数学分析》上、中、下三册的习题解答，在解答过程中，叙述比较详细，可供使用《数学分析》者参考，也可供中等学校的数学教师参考。本《习题解答》分上、下两册装订。

参加《习题解答》下册编演、绘图、审稿工作的有泰安师范专科学校王成新、刘宅城同志，参加编演工作的还有济宁师范专科学校侯宪章等同志。由于我们水平有限，书中错误和不妥之处定然不少，请读者批评指正。

— 编 演 者

一九八一年九月

目 录

第四篇 无穷级数

第八章 数项级数

习题一	(1)
习题二	(9)
习题三	(18)

第九章 函数项级数

习题四	(26)
习题五	(35)
习题六	(54)

第五篇 多元函数微积分、广义积分与 含参变量积分

第十章 多元函数微分学

习题一	(75)
习题二	(79)
习题三	(87)
习题四	(95)
习题五	(101)
习题六	(107)
习题七	(112)

习题八.....	(124)
----------	-------

第十一章 重积分

习题九.....	(131)
习题十.....	(136)
习题十一.....	(152)
习题十二.....	(162)

第十二章 线、面积分与场论初步

习题十三.....	(172)
习题十四.....	(188)
习题十五.....	(196)

第十三章 广义积分与含参变量积分

习题十六.....	(209)
习题十七.....	(216)

第四篇 无穷级数

第八章 数项级数

习 题 一

1 根据级数收敛、发散的定义,判断下列级数哪些收敛?哪些发散?如果收敛,和等于多少?

$$(1) 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$(2) \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} + \dots$$

$$(3) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \dots \\ + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \dots$$

$$(4) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$$

$$(5) 1 + \ln 3 + \ln^2 3 + \dots + \ln^{n-1} 3 + \dots$$

解 (1) 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 的前 n 项部分和

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

所以 S 不存在极限,即此级数发散。

$$(2) \quad \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} + \dots$$

$$\text{由} \quad s_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n}$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n$$

$$= \ln(n+1)$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, 所以此级数 发散。

$$(3) \quad \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \dots$$

$$\text{由} \quad s_n = \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$$

$$= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \dots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right)$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = \frac{1}{5}$,

所以此级数收敛, 且和 $s = \frac{1}{5}$

$$(4) \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$$

$$\text{因为 } s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = \frac{3}{2},$$

所以此级数收敛, 且和 $s = \frac{3}{2}$

$$(5) \quad 1 + \ln 3 + \ln^2 3 + \cdots + \ln^{n-1} 3 + \cdots$$

$$\text{因为 } s_n = 1 + \ln 3 + \ln^2 3 + \cdots + \ln^{n-1} 3$$

$$= \frac{1 - (\ln 3)^n}{1 - \ln 3}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\ln 3)^n}{1 - \ln 3} = \infty, \text{ 所以此级数发散。}$$

2 求下列级数的和

$$(1) \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \cdots$$

$$(2) \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$$

$$(3) \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}
s_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)
\end{aligned}$$

所以 $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \right] = \frac{3}{2}$

(2) 因为

设 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$, 从而

$$1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)$$

由此可得 $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$, 所以

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

于是

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{K} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{K+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{K+2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(3) 因为 $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right), \text{ 则}$$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) \right]$$

$$+ \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)]$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right)$$

所以

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}$$

3 研究下列级数的敛、散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n(n+1)}$$

$$(4) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

因为 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, 当 $n=2K$ 时, 则

$$\lim_{K \rightarrow \infty} u_{2k} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt[2k]{2K}} = 1$$

当 $n=2K+1$ 时, 则

$$\lim_{K \rightarrow \infty} u_{2k+1} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{\sqrt[2k+1]{2K+1}} = -1$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$$

根据定理 1, 故所给级数发散。

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$$

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

由级数收敛的柯西准则知：对于任给定的 $\varepsilon > 0$ ，总存在自然数 N ，当 $n > N$ 时，对任意自然数 p ，则有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} \right| < \varepsilon.$$

但

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos K}{2^k} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left| \frac{\cos K}{2^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$ 收敛。

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n(n+1)}$$

解 因为 $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{K(K+1)}$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} \right) \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛。由级数收敛的柯西准则知：对于

任给定的 $\varepsilon > 0$, 总有自然数 N , 当 $n > N$ 时, 对任意自然数 p , 则有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{K(K+1)} \right| < \varepsilon.$$

但

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin K}{K(K+1)} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left| \frac{\sin K}{K(K+1)} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{K(K+1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n(n+1)}$ 收敛。

$$(4) \quad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

解 因为

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{3K-2} + \frac{1}{3K-1} - \frac{1}{3K} \right) > \\ &\sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{3K} - \frac{1}{3K} \right) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{3K} = \frac{1}{3} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的，所以对于任给定的 $\varepsilon > 0$ ，则不论

N 取得如何大，当 $n > N$ 时，对于任意自然数 p ，

有 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{K} > 3\varepsilon$ ，即有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{3K-2} + \frac{1}{3K-1} - \frac{1}{3K} \right) > \varepsilon$$

根据级数收敛的柯西准则，所以所给级数不收敛。

习 题 二

1 运用比较、比值、根值和积分判别法，研究下列级数的敛、散性：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n} \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+r^n} \quad (r > 0)$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \quad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n}$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (10) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$(12) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$$

$$(14) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

因为对所有的 n , $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$. 已知级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散。

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

因为 $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ($n=1, 2, \dots$), 已知

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ($p=\frac{3}{2} > 1$) 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

收敛。

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

因为当 n 足够大时, $\left| \sin \frac{\pi}{2^n} \right| \leq \frac{\pi}{2^n}$, 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$

收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 收敛

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+r^n} (r>0)$$

分两种情况来讨论:

$$1^\circ \text{ 当 } 0 < r \leq 1 \text{ 时, 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+r^n} \neq 0,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+r^n} (0 < r \leq 1)$ 发散;

2° 当 $r > 1$ 时, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+r^{n+1}}}{\frac{1}{1+r^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^n}{1+r^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n} + 1}{\frac{1}{r^n} + r} = \frac{1}{r} < 1, \end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+r^n} (r > 1)$ 收敛。

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ 收敛。

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= e > 1 \end{aligned}$$

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 发散。

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \\ &= \frac{2}{e} < 1 \end{aligned}$$

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛。

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1 \end{aligned}$$

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ 发散。

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{4} < 1 \end{aligned}$$

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛。