高等数学习题与辅导

GAODENG SHUXUE XITI YU FUDAO

钟　韬◎主编

西南交通大學出版社

高等数学习题与辅导

主　编　钟　韬
副主编　王　洋　薛　菲
　　　　喻无瑕　潘　蕊
参　编　李　敏　方卫东
　　　　高敏静

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题与辅导 / 钟韬主编. —成都：西南交通大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-5643-4145-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①钟… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 194433 号

高等数学习题与辅导
主编　钟韬

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http://www.xnjdcbs.com
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印　　张	11.5
字　　数	284 千
版　　次	2015 年 8 月第 1 版
印　　次	2015 年 8 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-4145-9
定　　价	25.00 元

课件咨询电话：028-8700533
图书如有印装质量问题　本社负责退换

前　言

高等数学是一门非常重要的基础课程，它内容丰富，应用广泛，不仅为后继课程学习和进一步扩大知识面奠定必要的基础，而且在培养学生的逻辑推理能力、分析问题和解决问题的能力、自主学习能力和创新能力方面也具有非常重要的作用.

高等数学习题与辅导是《高等数学》的配套教材，主要为了解决学生课后学习资料缺乏、课后练习不足的问题而编写的. 本书主要有以下三个特点：

（1）每章内容开始，简明扼要地归纳了本章的重要知识点. 这部分既可以让初学者对各章内容有一个概括的了解，也可以当作一个高效的期末复习资料使用.

（2）习题数量和难度适中. 在习题的编写上区别于本科教材，这更符合高职院校的实际情况，既减少了理论推理部分的较高要求，又侧重于实用性与应用性.

（3）辅之以习题解答. 习题解答部分既提供了所有题目的最终答案，又对重要知识点的典型题目提供了详细的解答过程，这能帮助学生减少课后练习中遇到的疑惑与困难.

本书在教学内容的深度和广度方面强调“必要、够用”的特点，重点加强学生计算能力和应用能力的培养，力求做到易学、易懂，减少学生在课后学习中遇到的困难. 本书由四川交通职业技术学院的钟韬编写，参与教材编写的有四川交通职业技术学院：王洋、方卫东、薛菲、喻无暇、潘蕊.

由于作者编写经验和水平所限，书中难免出现不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

2015 年 3 月

目　录

第一章　函数与极限

【本章知识结构图】

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义
    - 性质
    - 基本初等函数
    - 复合函数
    - 初等函数
  - 极限
    - 定义与基本性质
      - 数列极限的定义
      - 函数极限的定义
      - 函数极限存在的充要条件
    - 求极限的重要方法
      - 极限的运算法则
      - 两个重要极限
    - 无穷小与无穷大
      - 定义
      - 运算性质
      - 无穷小的比较
  - 连续
    - 定义
    - 连续的充要条件
    - 间断点的分类
    - 基本初等函数的连续性与初等函数的连续性
    - 闭区间上连续函数的性质

第一节　函　数

【本节知识要点】

1. 函数的定义.

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域. 当 $x_0 \in D$ 时，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值.

2. 函数的性质：（1）有界性；（2）单调性；（3）奇偶性；（4）周期性.

3. 基本初等函数：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数叫做基本初等函数.

4. 复合函数.

若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，当 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空时，称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 u 称为中间变量.

5. 初等函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算得到的用一个式子表示的函数，称为初等函数.

习题 1-1

1. 若 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x>1 \\ 3x-1, x\leqslant 1 \end{cases}$，求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(2)$.

2. 求下列函数的定义域.

（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x^2-9}$；

（2）$f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$；

（3）$f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}-\cos x$.

3. 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,8]$，求 $f(x^2-1)$ 的定义域.

4. 判断下列函数的奇偶性.

（1） $y=2x-3x^3$；

（2） $y=\tan x+x^4$；

（3） $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$；

（4） $y=\dfrac{x^2\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. $y=1+\cos\dfrac{x}{2}$ 是周期函数吗？如果是，请给出它的周期.

6. 分解下列复合函数.

（1） $y=3^{x^2}$；

（2） $y=\tan\sqrt{3x-1}$；

（3） $y=\ln\left(\sin\frac{1}{x}\right)$.

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ 是否为初等函数？

8. 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x$， $\varphi(x)=\sin\frac{x}{2}$，求 $f(x)$.

9. 某公共汽车路线全长为 30 km，票价规定如下：乘坐 5 km 以下（包括 5 km）者收费 1 元；超过 5 km 但在 15 km 以下（包括 15 km）者收费 2 元；其余收费 2 元 5 角. 试将票价表示为路程的函数，并作出函数的图形.

10. 要建造一个容积为 V 的无盖长方体水池，它的底为正方形. 如果池底的单位面积造价为侧面积造价的 2 倍，试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

11. 我国最新实施的个人所得税税率表中规定，月收入超过 3 500 元为应纳税所得额（见表一）.

表一　个人所得税税率（工资、薪金所得适用）

级数	全月应纳税所得额	税率（%）
1	不超过 1 500 元的	3
2	超过 1 500 元至 4 500 元的部分	10
3	超过 4 500 元至 9 000 元的部分	20
4	超过 9 000 元至 35 000 元的部分	25
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35
7	超过 80 000 元的部分	45

个人所得税一般在工资中直接扣除. 若某单位所有人的月收入都不超过 9 000 元，请建立月收入与纳税金额之间的函数关系.

第二节　极限的概念

【本节知识要点】

1. 数列极限的定义.

如果当 n 无限增大时（记为 $n\to\infty$），数列无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 x_n 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 或 $x_n \to A(n\to\infty)$. 如果一个数列有极限 A，就称这个数列是收敛数列，也称这个数列收敛于 A；否则就称它是发散数列.

2. 函数极限的定义.

（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义，如果当 x 的绝对值无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$.

（2）设 $f(x)$ 在点 x_0 的左右近旁有定义（在点 x_0 处，$f(x)$ 可以不必有定义），如果当 x 无限接近于定值 x_0，即 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$.

3. 函数极限存在的充要条件：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A .$$

习题 1-2

1. 用观察法指出下列数列是收敛还是发散，若收敛，说明其极限.

（1）$\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$；

（2）$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$；

（3）$\{(-1)^n n\}$；

（4）$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$，讨论 $\lim_{x \to 0} f(x)$.

3. 讨论函数 $f(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x \to 0$ 时的极限.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x \leqslant 0 \\ x^2+1, & 0<x \leqslant 1 \\ \frac{2}{x}, & x>1 \end{cases}$，求极限 $\lim_{x \to 0} f(x)$，$\lim_{x \to 1} f(x)$.

5. 求证数列 $\{\cos n\pi\}$ 的极限不存在.

第三节　极限的四则运算法则

【本节知识要点】

1. 极限的四则运算法则:

设 $\lim f(x)=A$ ，$\lim g(x)=B$ (A,B 为常数)，则

（1） $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

（2） $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

（3） $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

2. 两个推论:

（1）设 $\lim f(x)$ 存在，C 为常数，则 $\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)$.

（2）设 $\lim f(x)$ 存在，n 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

习题 1-3

1. 求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+5)$;

（2） $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{x^2+1}$;

（3） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

（4） $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4}{2x^2-1}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+1}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{20}(3x+4)^{30}}{(6x-5)^{50}}$.

4. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-k}{x-3}=4$，求 k 值.

6. 假定某种疾病流行 t 天后，感染的人数 N 由下式给出：

$$N=\frac{1000000}{1+5000e^{-0.1t}}$$

（1）从长远考虑，将有多少人染上这种病？

（2）有可能某天会有 100 多万人染上病吗？50 万人呢？25 万人呢？（注：不必求出到底哪天发生这样的情形.）

第四节　两个重要极限

【本节知识要点】

两个重要极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

习题 1-4

1. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{5x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^2-x-6}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 2x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\tan x}{x^2}$；

（7）$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；