考研直通车 考研数学系列丛书

线性代数考研选讲

Linear Algebra

主编 于增海

国防工业出版社
National Defense Industry Press

线性代数考研选讲

主　编　于增海
副主编　张艳敏　董连红

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

“线性代数”是公修数学考研的必考课程，本书就线性代数考研的相关问题有选择地进行了讲解. 本书共分6章，分别为行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量、二次型. 每章若干节，每节分四部分，分别为考试要求、基础知识概述、题型与方法、阅读与欣赏.

本书可作为“线性代数选讲”课程的教材，同时，还可以作为“线性代数”“高等代数”等课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数考研选讲 / 于增海主编. —北京:国防工业出版社,2015.6

ISBN 978-7-118-10246-8

Ⅰ. ①线...　Ⅱ. ①于...　Ⅲ. ①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 145622 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 9½　**字数** 216 千字

2015 年 7 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—4000 册　**定价** 29.00 元

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

前 言

编者长期从事代数学教学，看到相当一部分本科生有考研的要求，但是他们的数学基础不是很好. 为在较短的时间内使他们有较大地突破，编者进行了一些教学探索，取得了一定的经验，在教案的基础上编写了此书.

本书有下列特点：

1. 细化考试要求

“全国硕士研究生招生考试数学考试大纲”界定了考试性质、考试内容、考试要求等，本书依据考试大纲，考虑到学生的实际情况，参考了考研的经验教训，对考试要求进行了细化.

2. 强化基础知识概述

本书不假设读者的线性代数基础达到了优秀水平，编者从重在理解和应用的角度，讲重点、讲难点、讲考点，较详细地讲解了基础知识，特别是最后两章讲得更加仔细，目的是补基础；适当补充了一些考研需要的结论、方法，如 3.2 节命题 1.（5），5.1 节命题 3、命题 4 等，显然这些补充会使有些问题的处理更加简捷.

3. 给出考研的常见题型、常用方法

题型与方法是本书的核心，本书将考研题型进行了仔细的分类，每种题型给出了常用的解题方法，并用一些典型例题加以说明. 例如，对于求方阵的幂给出了 4 种常用方法：归纳法、和分解法、积分解法、对角化法等，并给了 12 道例题，这些题目中，很多是线性代数考研题，还有的是高等代数的考研题.

4. 开阔视野、拓展思路

阅读与欣赏部分给出了一些新颖的方法，讨论了一些深入的问题，得到了一些有趣的结论，这些内容虽然不在考试大纲的要求之内，但是可以开阔考生的视野，拓展其思路，对于形成较高的数学素质是有益的.

本书可作为“线性代数选讲”课程的教材，也可以作为“线性代数”“高等代数”课程的教学参考书。

本书的编写得到了商丘师范学院、商丘工学院领导和同事的大力支持，也得到了国防工业出版社丁福志编辑的鼎力帮助，在此一并表示衷心地感谢！

由于编者水平所限，错误之处在所难免，恳请读者批评指正，如有任何赐教，请发邮件至 yuzenghaisq@163.com，编者深表感谢！

编 者

目　录

第1章　行 列 式

考 试 要 点

1. 行列式的定义.
2. 行列式的性质.
3. 行列式按一行(列)展开定理.
4. 克莱姆法则(放在第4章讨论).

一、考试要求

1. 理解 n 阶行列式的定义,能够利用定义计算简单的行列式及确定行列式的一些项. 熟练掌握二阶、三阶行列式的定义.

2. 掌握行列式的性质.

3. 掌握行列式的按一行(列)展开定理.

4. 能熟练应用行列式的性质和展开定理计算行列式.

5. 记忆行列式的常用公式.

二、基础知识概述

1. 行列式的定义

定义1　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 $n!$ 项的代数和,这些项是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项带正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项带负号.

注　(1) 定义的核心是“取项,定号,求和”,其中“取项”是关键.

(2) 定义的公式形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 $1,2,\cdots,n$ 的 n 级排列求和.

(3) 一阶行列式

$$|a| = a;$$

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

例 1.1 填空题

(1) 4 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中副对角线元素之积 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 的符号为_______________.

(2) 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号为_______________.

(3) 如果 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中等于 0 的元素的个数大于 n^2-n 个,那么此行列式的值为_______________.

(4) 函数

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

中 x^3 的系数为____________________.

分析 (1) 符号为 $(-1)^{\tau(4321)} = (-1)^6 = +1$.

(2) $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25} = a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$,其符号为 $(-1)^{\tau(25134)} = (-1)^4 = +1$.

(3) n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中有 n^2 个元素,由已知可得非零元素 $<n$ 个. 由每一项都是 $|a_{ij}|$ 中 n 个元素的乘积,从而每一项都是 0,故此行列式的值为 0.

(4) x 在主对角线上只能出现 2 次,故该项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -x^3,$$

即 x^3 的系数为 -1.

2. 行列式的性质

性质 1(转置变换) 行列式 D 等于它的转置行列式 D^{T}.

性质 2(换法变换) 对换行列式的两行(列),行列式变号.

性质 3(倍法变换) 行列式某行(列)乘以 k 等于 k 乘这个行列式.

性质 4(消法变换) 把行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列)上,行列式不变.

性质 5(分行(分列)变换) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则行列式可按此行(列)拆成两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.2 选择题

(1) 行列式 $D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$ 等于(　　)

(A) 1000.　　(B) -1000.　　(C) 2000.　　(D) -2000.

(2) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 是 4 维列向量,已知 $|\boldsymbol{A}|=4$, $|\boldsymbol{B}|=1$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 等于(　　)

(A) 5.　　(B) 4.　　(C) 50.　　(D) 40.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=2$,则 $|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}|$ 等于(　　)

(A) 4.　　(B) -4.　　(C) 16.　　(D) -16.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,k 是非零数,则 $|(k\boldsymbol{A})^*|$ 等于(　　)

(A) $k|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　　(B) $|k||\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　　(C) $k^{n(n-1)}|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　(D) $k^{n-1}|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

分析 (1) 选(C).

(2) 选(D).

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)| = |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4| \\ &= 8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4| = 8(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|) = 8\times 5 = 40.\end{aligned}$$

(3) 选(D).

$$|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}| = |-2\boldsymbol{A}| = (-2)^3|\boldsymbol{A}| = -16.$$

(4) 选(C). 由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$,得

$$|(k\boldsymbol{A})^*| = |k\boldsymbol{A}|^{n-1} = (k^n|\boldsymbol{A}|)^{n-1} = k^{n(n-1)}|\boldsymbol{A}|^{n-1}.$$

3. 展开定理

定理 1(行列式按一行(列)展开定理) 行列式 D 等于它的任意一行(列)的所有元素与其代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\qquad i=1,2,\cdots,n;$$
$$D = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

注 行列式 D 中 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式、代数余子式是由 a_{ij} 在 D 中的位置唯一决定的,与 a_{ij} 本身的性质无关,进而与 D 的第 i 行、第 j 列的所有元素无关.

推论 1 设 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$,则

$$\lambda_1 A_{1j}+\lambda_2 A_{2j}+\cdots+\lambda_n A_{nj}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \lambda_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & \lambda_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & \lambda_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即第 j 列元素代数余子式的线性组合等于将 D 的第 j 列的元素置换为组合系数所得的行列式.

定理 2(零值定理) 行列式 D 中,一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\qquad i\neq j;$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\qquad i\neq j.$$

例 1.3 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$,则

(1) $-5A_{11}+A_{21}+3A_{31}-4A_{41}=$________________.

(2) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$________________.

分析 (1) $-5A_{11}+A_{21}+3A_{31}-4A_{41}=\begin{vmatrix} -5 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ -4 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0.$

(2) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 13 \end{vmatrix}=4.$$

例 1.4 (2001 年,数四)设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$,则第 4 行各元素余子式之和的值为________________.

分析 由 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,知 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$,于是

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28.$$

三、题型与方法

行列式的计算往往需要一定的技巧,从原则上说,应用行列式的性质、公式、定理,只要将一个行列式转化成一个或几个比较容易计算的行列式就行了,但是没有一般方法可以完成这种转化,因而给出一些常用方法、常见题型是十分必要的.

行列式的常用公式

1. 三角形行列式

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & a_{2,n-1} & * \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & * & \cdots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & a_{2,n-1} & 0 \\ * & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

2. 分块三角形行列式

(1) $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

(2) $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

3. 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j).$$

4.(行列式乘法定理) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵,则

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,k 是个数,则

$$|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|.$$

6. 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,则

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}.$$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,则

$$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}.$$

8. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\left(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda-|\boldsymbol{A}|.$$

9. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，则

$$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\qquad \mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n.$$

10. 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，则

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|.$$

题型 1　具体行列式

方法 1　三角形法

常常会遇到一些行列式，经过变换可以化为三角形行列式，从而求得其值.

例 1.5　计算行列式

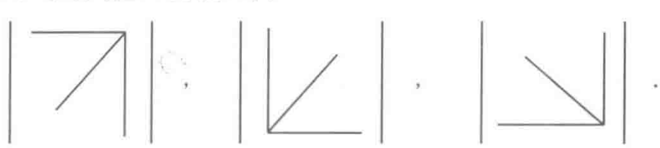
$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}.$$

分析　这个行列式称为箭形行列式，它与三角形行列式相近，我们希望将第 1 列除 (1,1) 元外都化为零.

解　将第 i 列乘以 $-\frac{1}{i}$ 加到第 1 列，$i=2,3,4$，得

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{i=2}^{4}\frac{1}{i}&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-\frac{1}{12}\times24=-2.$$

注　箭形行列式的其他几种情况为



练习 1.6　计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}4&3&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}.$$

参考答案：121.

例 1.7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}.$$

解 各行都减第 2 行,得

$$D=\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\2&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\0&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times(n-2)!.$$

例 1.8 (2014 年,数一二三,4 分)行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=($ $)$

(A) $(ad-bc)^2$.　　　　(B) $-(ad-bc)^2$.

(C) $a^2d^2-b^2c^2$.　　　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$.

分析 1 (降阶法)按第 4 行展开,转化为两个 3 阶行列式.

分析 2 (三角形法)

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}c&0&0&d\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&a&b&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_4}\begin{vmatrix}c&d&0&0\\a&b&0&0\\0&0&d&c\\0&0&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}\begin{vmatrix}d&c\\b&a\end{vmatrix}=-(ad-bc)^2.$$

选(B).

方法 2 归一法

各行(列)元素的和都相等归一列(行),换句话说,行和相等归一列,列和相等归一行.

例 1.9 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

解 各行都加到第1行,提取公因子,得

$$D_n=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

例 1.10 (1997 年,数四,3 分)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$,则

$|\boldsymbol{A}|=$________________.

分析 列和相等归一行,提取公因子,得

$$|\boldsymbol{A}|=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1).$$

方法3 降阶法

降阶法的关键是将某一行(列)化出较多的0,最好是出现 $n-1$ 个0,然后按这一行(列)展开.

例 1.11 计算行列式

$$\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}.$$

分析 1　(三角形法)将第 1 行加到第 2 行,然后将第 2 行加到第 3 行,最后将第 3 行加到第 4 行,得到三角形行列式.

分析 2　前 3 列各列的和等于 0,因而可用归一法,归一行,然后降阶.

解　各行加到第 1 行,得

$$D=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-1&1-b_1&b_2\\0&-1&1-b_2\\0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=-(-1)^3=1.$$

例 1.12　计算

$$D=\begin{vmatrix}a_1+x&a_2&a_3&a_4\\-x&x&0&0\\0&-x&x&0\\0&0&-x&x\end{vmatrix}.$$

分析　后 3 行各行的和为 0,归一列,然后降阶.

解　各列都加到第 1 列,然后降阶,得

$$D=(a_1+a_2+a_3+a_4+x)\begin{vmatrix}x&0&0\\-x&x&0\\0&-x&x\end{vmatrix}=(a_1+a_2+a_3+a_4+x)x^3.$$

例 1.13　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}x_1&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\x_1&x_2&a_{23}&a_{24}\\x_1&x_2&x_3&a_{34}\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{vmatrix}.$$

分析　主对角线以下的元素都相同,习惯上可将各行都减最后一行.

解　各行都减最后一行,得

$$D=\begin{vmatrix}0&a_{12}-x_2&a_{13}-x_3&a_{14}-x_4\\0&0&a_{23}-x_3&a_{24}-x_4\\0&0&0&a_{34}-x_4\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{vmatrix}$$

$$=x_1(-1)^{4+1}(a_{12}-x_2)(a_{23}-x_3)(a_{34}-x_4)$$

$$=x_1(x_2-a_{12})(x_3-a_{23})(x_4-a_{34}).$$

例 1.14　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

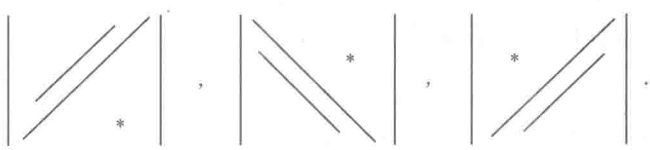
分析 若一行除首尾外都是零,可按这一行展开,常称为两角展开.

解 按第 n 行展开,得

$$D=a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ & a_2 & & \vdots\\ & & & 0\\ * & & & a_{n-1}\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & & & *\\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n+1.$$

注 这种行列式称为两线一星型行列式,这类行列式的其他几种情况为



两线一星形行列式常用两角展开进行降阶.

方法 4 化为范德蒙行列式

例 1.15 行列式 $D=\begin{vmatrix}b+c & c+a & a+b\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=$____________________.

分析 与范德蒙行列式比较,需要一行(1,1,1). 将第 2 行加到第 1 行,提出公因子 $a+b+c$ 就出现了(1,1,1),这样就化成了范德蒙行列式,得

$$D=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

例 1.16 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2\\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3\\ 5 & 4 & 3 & 2\end{vmatrix}.$$

分析 将第 1 行加到第 4 行,提取公因子,得

$$D=6\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\\1^3&2^3&3^3&4^3\\1&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_1]{\substack{r_4\leftrightarrow r_3\\r_3\leftrightarrow r_2}}-6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}$$

$$=-6\times(1\times2\times3)\times(1\times2)\times1=-72.$$

例 1.17 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2+x_1&x_2^2+x_2&x_3^2+x_3&x_4^2+x_4\\x_1^3+x_1^2&x_2^3+x_2^2&x_3^3+x_3^2&x_4^3+x_4^2\end{vmatrix}.$$

分析 与范德蒙行列式 V 比较,第 3 行多了(x_1,x_2,x_3,x_4),用第 3 行减第 2 行,得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\x_1^3+x_1^2&x_2^3+x_2^2&x_3^3+x_3^2&x_4^3+x_4^2\end{vmatrix}.$$

再与 V 比较,第 4 行多了$(x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2)$,用第 4 行减第 3 行,这样就化成了范德蒙行列式.

例 1.18 证明 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^3&x_2^3&x_3^3\end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j)$.

分析 D 与范德蒙行列式比较接近,差平方项,添加平方项,构造 4 阶范德蒙行列式

$$V=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&y\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&y^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&y^3\end{vmatrix}.$$

V 不仅可以按范德蒙行列式展开,还可以按第 4 列展开,得

$$(y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j)=A_{14}+yA_{24}+y^2A_{34}+y^3A_{44}.$$

比较两端 y^2 的系数,得

$$-(x_1+x_2+x_3)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j)=(-1)^{3+4}M_{34}=-D,$$

故

$$D=(x_1+x_2+x_3)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j).$$

方法 5 数学归纳法

关于 n 阶行列式等式的证明常常用数学归纳法.

例 1.19 证明

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

证明 对 n 用数学归纳法:

当 $n=1$ 时,$D_1=|x+a_0|=x+a_0$,结论成立.

假设 $n-1$ 时结论成立,对于 n 阶行列式 D_n,按第 1 行展开,得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}+a_0(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & -1 & \\ & & & & -1 \end{vmatrix},$$

$$=xD_{n-1}+a_0.$$

由归纳假设,得

$$D_n=x(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1)+a_0=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

即 n 时结论成立.

综上所述,结论对一切正整数都成立.

例 1.20 (2008 年,数一,12 分,局部改写)证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & a^2 & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=(n+1)a^n.$$

分析 这种行列式称为三对角线型行列式,题型是具体 n 阶行列式,证明的首选方法是数学归纳法. 回忆第二数学归纳法的 3 个步骤:第 1 步,验证 $n=1,2$ 时结论成立;第 2 步,假设 $n\leqslant k$ 时结论成立;第 3 步,证明 $n=k+1$ 时结论成立. 完成上述 3 步,可得:对一切正整数结论都成立.

证明 当 $n=1$ 时,$D_1=2a$,结论成立. 当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$,结论成立.

假设 $n\leqslant k$ 时结论成立,当 $n=k+1$ 时,把 D_{k+1} 按第 1 列展开,得