初中

数学解题思维方法

转换

邵龙章　曹承剑　朱连生

育出版社

数学解题思维方法——转换

（初中版）

邵龙章　程　斌　朱连生

山西教育出版社

数学解题思维方法——转换
（初中版）

邵龙章　等编

*

山西教育出版社出版发行（太原并州北路 69 号）

晋中地区印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：8.375　字数：206 千字

1998 年 7 月第 1 版　1998 年 7 月山西第 1 次印刷

印数：1—2000 册

*

ISBN　7－5440－1253－0

G·1234　　定价：9.00 元

概 论

转换思想是数学中的指导思想.中学数学主要是研究数与数、形与形、数与形之间的相互转换,按照对立统一关系实现转换.

回顾一下数学史可以看到:著名的哥尼斯堡七桥问题,就是转换为一个网络图中的一笔画问题;平面几何中,用尺规作图的三个不可能问题,都是通过转换为代数问题得出结论的;定积分与原函数的概念,定积分是一种和式的极限,而原函数是它的导数为某一已知函数,通过牛——莱公式,使这两个概念建立了联系,使求和式极限问题转换为求已知函数的原函数在区间上的增量,由于这一转换,促进了微积分的发展.

因此可以说,数学在一定意义上是研究转换的学科.

一、初中数学的内在转换规律

对立面的相互转换:

1. “+”与“-”在代数和中统一了起来.

$a<x<b, c<y<d \Rightarrow a+c<x+y<b+d$

$\because\quad c<y<d \quad \therefore\quad -c>-y>-d$

$\therefore\quad a<x<b, -d<-y<-c \Rightarrow a-d<x-y<b-c$

2. “×”与“÷”,对每一个除法,$a\div b=a\times\frac{1}{b}(b\neq0)$

3. “乘方”与“开方”,在引进分数指数后,两者统一了起来.这是幂的基本运算思想.

4. 指数与对数的相互转换.

当 $a>0, a\neq1$ 时,指数式 $a^b=N$ 和对数式 $b=\log_a N$ 可以相

互转换.

指数的性质对应于对数的性质

$$\left.\begin{array}{ll} a^{b_1}\cdot a^{b_2}=a^{b_1+b_2} & \\ a^{b_1}\div a^{b_2}=a^{b_1-b_2} & \\ (a^b)^c=a^{bc} & \\ \sqrt[c]{a^b}=a^{\frac{b}{c}} & \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log_a N_1N_2=\log_a N_1+\log_a N_2 \\ \log_a \dfrac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2 \\ \log_a N^n=n\log_a N \\ \log_a \sqrt[n]{N}=\dfrac{1}{n}\log_a N \end{array}\right.$$

故对数性质的证明往往要转换为指数运算而推得.

5. 解三角形中,初中主要利用正弦定理、余弦定理,使角的三角函数向边的代数方程转换.

6. “数”与“形”的相互转换.

“数”一般是指函数三种表示式中的解析式;

“形”一般是指函数的图像表示.

代数是研究“数”的科学;几何是研究“形”的科学;三角作为一种工具,两者皆而有之.

有时从“形”的观点来考虑问题比直接从数的观念出发要直观、简便. 在大多数的情况下,“数”与“形”两者应取长补短,综合题中,用代数方法(或三角法)来解几何问题就是一个很好例证.

三角函数的符号转换为围成这一象限的 X、Y 半轴的符号:

根据三角函数的定义:$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$,$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$. $\because\ r>0$, $\therefore$ $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的符号与 α 终边所在象限内的点 $P(x,y)$ 中的 y、x 同号.

二、分类是转换的基础

分类法是科学研究的基本方法之一.所谓分类法就是对已有的对象(材料)进行分析整理,按照某种特征将它们分门别类,从中

找出规律,促使数学形式的转换.

初中数学的分类法的运用主要有以下几个方面:

1. 分类法是解应用题列方程的基础;

2. 算术根、绝对值概念,均以零点分类加以讨论,转换为不含绝对值的问题;

3. 数系分类;

4. 函数性质与分类;

5. 分类法与反证法(包括归谬法);

6. 分类法与抽计原理;

7. 一元二次方程的判别式分类和解的讨论.

三、重视概念教学,强调知识的内在联系是促进数学形式转换的关键

数学知识都是以公理、定义为基础,证明后面出现的一系列命题.也就是说,公理、定义以及定理是整个数学学科的支柱,没有牢固的基础,数学这座大楼就不能盖高.

数学是一门连贯性和系统性很强的学科.数学前后知识的联系可称为纵的联系,从不同的概念出发,可以得出不同的分支,它们之间的联系,可称为横的联系,这两种联系之间的关系是“经纬”关系.数学中的综合题,就是由代数、三角、几何这三门学科共同编织而成的.

四、掌握转换思想是提高学生解题能力的关键

数学问题可划分为两类:求解题和求证题.简单的数学题,一般学生都能解答,这是因为这类题目从已知到结论容易推导,但是较复杂的问题就不是这样了,要解这类题,用通俗的话来说,就是要转几个弯,所谓转弯,就是一个或几个转换过程.转换在解题中起关键作用,掌握了它,就能使题目迎刃而解.

应用转换思想帮助解题,其实质是怎样创造条件,促使已知向结论转换.常用方法如下:

1. 因式分解中的凑项与配方;

2. 换元法是常用的转换方法;

3. 利用恒等变形,促使已知向目标转换;

4. 分析法与综合法;

综合法:从已知中开拓新的已知,目标直指求证.

分析法:从结论出发,逆向推向已知.

5. 充要条件的传递,命题的转换;

如反证法,就是证明原命题的逆否命题.

6. 降次、消元转换;

7. 归纳与演绎在解题中的应用;

8. 类比促使转换;

类比是指新旧知识的相同点.已知在情况甲结论 A 正确,又乙与 B 分别和甲、A 相似,进而假设:在情况乙下结论 B 也正确.

9. “派生”与数学知识的融汇贯通;

所谓派生,就是从一个主要事物的发展中分化出来,主要事物相当于树干,而派生出来的东西相当于树枝.只有懂得某些知识是由某部分知识“派生”而得,才能把知识融汇贯通.如:可转换为一元二次方程的各种方程.

10. 分类促使已知向求证转换;

11. 几何向代数(三角)转换 .

用辩证思维贯穿中学数学,既可开阔学生的视野,使学生看到:不同的数学内容,有着相同的思维方法;而且又能使学生认识到数与数、形与形各自的内在联系,以及数与形之间的联系和区别.这对培养学生敏锐的观察力、透过现象抓住事物的本质,归纳并提出某种猜想和估价,合乎逻辑地进行推理和论证,通过实践检验并修正结论,为探索新的真理而打下一种创造性的思想基础.

本书由邵龙章主编,参加本书编写的还有程斌、朱连生等同

志.由于我们水平有限,对辩证思维渗透到中学数学中去的研究还刚开始,错误和不妥之处,欢迎批评指正.

作 者

目　录

分章解题

解题的核心——转换

分 章 解 题

·代 数·

第一章 实 数

[内容提要]

一、实数的概念:有理数和无理数统称实数.它的分类如下

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

1. 自然数

(1) 自然数的概念:表示物体个数或事物次序的数叫做自然数(或正整数).

(2) 质数和合数:在自然数中,除1外,只能被1和它本身整除的数叫质数(又叫素数);除了能被1和它本身整除以外,还能被其它数整除的数叫做合数.1既不是质数,也不是合数.最小的质数是2.

2. 整数

(1) 正整数、零和负整数统称整数；正整数和零合称非负整数；零既不是正整数，也不是负整数.

(2) 偶数与奇数：能被 2 整除的整数叫做偶数. 不能被 2 整除的整数叫做奇数.

3. 有理数

整数和分数统称有理数. 一切有理数都可以表示为既约分数 $\frac{n}{m}$ 的形式，其中 m、n 为整数，且 $m \neq 0$.

有理数表示成小数形式，一定是有限小数或者是无限循环小数.

4. 无理数

无限不循环小数叫做无理数.

二、实数的性质

1. 数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴. 数轴上的点与实数是一一对应的.

2. 相反数：实数 a 和 $-a$ 叫做互为相反数. 零的相反数仍旧是零.

3. 倒数：1 除以一个数的商叫做这个数的倒数. 互为倒数的两个数的积为 1. 0 没有倒数.

4. 绝对值：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零.

$$|a| = \begin{cases} a, (a>0) \\ 0, (a=0) \\ -a, (a<0) \end{cases}$$

一个实数的绝对值等于它在数轴上表示的点与原点的距离.

5. 实数的大小：数轴上的点，在右边的点所表示的实数大于左边的点所表示的实数.

三、实数的运算

1. 在有理数范围内,加、减、乘、除(零不能作除数)运算都能实施,正数的开方运算不一定能实施;

2. 在实数范围内,加、减、乘、除(零不能作除数)、正数的开方运算都能实施.

3. 运算定律:

加法交换律:$a+b=b+a$;

加法结合律:$(a+b)+c=a+(b+c)$;

乘法结合律:$(ab)c=a(bc)$;

乘法交换律:$ab=ba$;

乘法对加法的分配律:$a(b+c)=ab+ac$.

4. 运算顺序:

(1) 一个式子里如果有括号,先进行括号里的运算;

(2) 先乘方、开方,然后乘、除,最后加、减.

(3) 加和减是第一级运算,乘和除是第二级运算,乘方和开方是第三级运算.同一级运算,从左到右依次运算.

(4) 根据运算定律可以变更运算顺序.

[主要转换]

1. 相反数概念的引进,使减法能向加法转换:减去一个数等于加上它的相反数;

2. 倒数概念的引进,使除法能向乘法转换:除以一个数等于乘上它的倒数;

3. 根据绝对值的概念,使数(或式)的绝对值向不含绝对值符号的数(或式)转换.

4. 根据实数的概念和性质,实现解题中的已知向结论转换.

[范例讲解]

例 1. 在 $3.1416,\sqrt{2},\pi,0,-3.1,\lg 2,0.\dot{3},0.1010010001\cdots$，$\sqrt[3]{27},|\cos 120°|,-\frac{1}{3},(\sqrt{2})^2$ 中，有理数有______________________________；无理数有______________________________.

解：$\sqrt[3]{27}=3,|\cos 120°|=|-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$

$(\sqrt{2})^2=2$，故

有理数为：$3.1416,0,-3.1,0.\dot{3},\sqrt[3]{27}$，

$|\cos 120°|,-\frac{1}{3},(\sqrt{2})^2$.

无理数为：$\sqrt{2},\pi,\lg 2,0.1010010001\cdots$.

说明：根据有理数的概念：有理数表示成小数形式，一定是有限小数或者是无限循环小数. 故 $0.\dot{3}$是有理数；而 $0.1010010001\cdots$ 是无限不循环小数，故属无理数. 可见，实数的概念和性质，是实现解题中已知向结论转换的关键.

例 2. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{0.1}$和 $\lg 1$； (2) $-\left|\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right|$和 $-\frac{1}{4}$；

(3) $\sqrt{23}$和 $4\frac{1}{2}$.

解：(1) $\lg 1=0,\sqrt{0.1}>0$

$\therefore\ \sqrt{0.1}>\lg 1$

(2) $-\left|\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right|=-\left|-\frac{1}{3}\right|=-\frac{1}{3}$

$\because\ \frac{1}{3}>\frac{1}{4},\therefore\ -\frac{1}{3}<-\frac{1}{4}$

$\therefore\ -\left|\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right|<-\frac{1}{4}$

(3) $\because\ (\sqrt{23})^2=23$，

$(4\frac{1}{2})^2=\frac{81}{4}=20\frac{1}{4}$

$\therefore\quad(\sqrt{23})^2>(4\frac{1}{2})^2$

又$\because\quad\sqrt{23}$和$4\frac{1}{2}$都是正数，$\sqrt{23}$和$4\frac{1}{2}$分别是$(\sqrt{23})^2$和$(4\frac{1}{2})^2$的算术平方根.

$\therefore\quad\sqrt{23}>4\frac{1}{2}$.

说明：根据实数的性质，数轴上的点，在右边的点所表示的实数大于左边的点所表示的实数. 正数大于零；两个负数比较大小，绝对值大的反而小；形如$\sqrt{a}$与b的大小比较，只要比较a和b^2的大小即可.

例 3. 填空：

(1) 已知$\sqrt{1.988}=1.410$，$\sqrt{1988}=44.59$，则$\sqrt{0.1988}=$ ______________；

(2) 已知$\sqrt[3]{0.572}=0.8301$，$\sqrt[3]{5.72}=1.788$，$\sqrt[3]{57.2}=3.853$，则$\sqrt[3]{57200}=$ ____________；

(3) $2.41^2=5.808$，则$24.1^2=$ __________；

(4) $5.19^3=139.8$，则$0.519^3=$ ____________.

解：(1) $\because\quad\sqrt{1988}=44.59$，$\therefore\quad\sqrt{0.1988}=0.4459$；

(2) $\because\quad\sqrt[3]{57.2}=3.853$，$\therefore\quad\sqrt[3]{57200}=38.53$；

(3) $\because\quad 2.41^2=5.808$，$\therefore\quad 24.1^2=580.8$；

(4) $\because\quad 5.19^3=139.8$，$\therefore\quad 0.519^3=0.1398$.

说明：$\sqrt{1988}=44.59$，$\sqrt{1988}\times10^{-2}=44.59\times10^{-2}\quad\therefore\quad\sqrt{0.1988}=0.4459$；而$\sqrt[3]{57.2}\times10=3.853\times10$，即$\sqrt[3]{57200}=38.53$；$2.41^2\times10^2=5.808\times10^2$，$\therefore\quad 24.1^2=580.8$；而$5.19^3\times10^{-3}=139.8\times10^{-3}$，$\therefore\quad 0.519^3=0.1398$. 本例题的实质是架起已知与目

标的桥梁,通过小数点移位法则实现这一转换.

例 4. 计算下列各题:

(1) $|3-\pi|$; (2) $1-|1-\sqrt{2}|$;

(3) $|a+3|+|2a-4|(-3<a<2)$;

(4) $|x+1|+|x-1|$.

解:(1) $\because\ 3-\pi<0$,

$\therefore\ |3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3$

(2) $\because\ 1-\sqrt{2}<0$, $\therefore\ |1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})$

$\therefore\ |1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$

$\therefore\ 1-|1-\sqrt{2}|=1-(\sqrt{2}-1)=1-\sqrt{2}+1=2-\sqrt{2}$

(3) $\because\ -3<a<2$

$\therefore\ a+3>0$, $\therefore\ |a+3|=a+3$

$a-2<0, 2a-4<0$, $\therefore\ |2a-4|=4-2a$

$\therefore$ 当 $-3<a<2$ 时,

$|a+3|+|2a-4|=a+3+4-2a=7-a$

(4) 要计算 $x+1$ 与 $x-1$ 的绝对值的和,需要先判断 $x+1$ 与 $x-1$ 是正数还是负数. $x+1$ 的值的正负可由 $x>-1$(或 $x<-1$)来决定,而 $x+1=0$, $x=-1$ 叫做零点. 同样, $x-1$ 的零点是 1. 这两个零点把全体实数分为三个区域:

① $x\leqslant-1$;

② $-1<x\leqslant1$;

③ $x>1$.(见图 1—1)

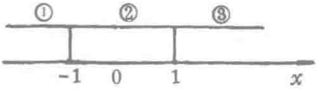

图 1—1

在这三个区域内, $x+1$ 与 $x-1$ 都有确定的正负号,可根据绝对值的定义,把含有绝对值的数(或式)转换为不含绝对值的数(或式).

$\therefore$ 当 $x\leqslant-1$ 时, $x+1\leqslant0$, $x-1<0$.

则 $|x+1|+|x-1|=-(x+1)-(x-1)=-2x$;

当 $-1<x\leqslant1$ 时, $x+1>0$, $x-1\leqslant0$

$$|x+1|+|x-1|=x+1-(x-1)=2;$$

当 $x>1$ 时，$x+1>0, x-1>0$

$\therefore \quad |x+1|+|x-1|=x+1+x-1=2x.$

即 $$|x+1|+|x-1|=\begin{cases}-2x & (\text{当 } x\leqslant -1 \text{ 时})\\ 2 & (\text{当 } -1<x\leqslant 1 \text{ 时})\\ 2x & (\text{当 } x>1 \text{ 时}).\end{cases}$$

说明：计算绝对值的问题，首先要找出零点. 只有一项绝对值的问题，只有一个零点，把实数分为两个区域，再分别进行讨论；有两项绝对值的问题，就有两个零点，它把实数分为三个区域，再分别对每个区域进行讨论. 依次类推，由于通过零点分类，每个区域内的绝对值里的数(或式)有确定的正、负号，故在确定其数(或式)的正负号时，只要在区域内任取一点判断一下正负号即可. 例在 $-1<x\leqslant 1$ 时，我们要判断 $x+1$ 与 $x-1$ 的正负号，则取 $x=0$ 即可. $x+1=1>0, x-1=-1<0$. 这项工作叫试点. 通过分类、试点，就可把含有绝对值的数(或式)转换为不含绝对值的数(或式). 可见，分类是转换的基础.

例 5. 若实数 a、b 在数轴上的对应点如图 1—2，化简以下各式：

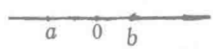

图 1—2

(1) $a+b+|a+b|$;

(2) $a+b-|a-b|$;

(3) $|a+b|+|a-b|$.

解：(1)绝对值问题转换的关键是先判别 $a+b$ 的正、负号.

从数轴上观察，$a<0, b>0$，但

$|a|>|b| \quad \therefore \quad a+b<0$

$\therefore \quad a+b+|a+b|=a+b-(a+b)=0$

(2) $\because \quad a<0, b>0, \therefore \quad a-b<0$

$\therefore \quad a+b-|a-b|=a+b+(a-b)=2a$

(3) $|a+b|+|a-b|=-(a+b)-(a-b)=-2a$