

弹性力学

彭一江 陈适才 彭凌云 编著



科学出版社

弹性力学

彭一江 陈适才 彭凌云 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统全面地介绍弹性力学空间问题的基本理论、基本原理、基本方法及其应用,旨在为从事工程结构分析建立空间的力学概念,打下坚实的三维力学理论基础,培养利用理论分析方法和数值分析方法研究复杂弹性力学问题和解决实际问题的能力。

全书共7章,包括弹性力学绪论、三维应力应变状态、空间直角坐标系下的基本方程及基本解法、空间曲线坐标系下的基本方程及基本解法、薄板问题的基本方程及基本解法、能量原理及近似解法和弹性力学问题的数值分析方法。每章后附有思考题和习题供读者思考和训练。附录中给出利用MATLAB语言编制的计算各种弹性力学问题应力和位移场的计算机程序。

本书可以作为工科专业本科生或研究生教材,亦可供从事结构分析的科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/彭一江,陈适才,彭凌云编著. —北京:科学出版社,2015.7

ISBN 978-7-03-045313-6

I. ①弹… II. ①彭… ②陈… ③彭… III. ①弹性力学 IV. ①O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第180626号

责任编辑:刘信力/责任校对:蒋 萍

责任印制:肖 兴/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年8月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2015年8月第一次印刷 印张:12

字数:215 000

定价:49.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

弹性力学是一门技术基础学科,是近代工程技术的必要基础之一.在现代工程,特别是土木工程、水利工程、机械工程、航天航空工程等大型结构的计算、分析、设计中,都广泛应用弹性力学的基本知识、基本理论和基本方法.同时,弹性力学也是一门力学基础学科,它的研究方法被广泛应用于其他学科和领域.它不仅是塑性力学、有限单元法、复合材料力学、断裂力学、结构动力分析和一些专业课程的基础,也是许多大型结构分析软件(如 ABAQUS、ANSYS 和 SAP2000 等)的核心内容.

但是,在弹性力学课程的教学中也存在一些问题:(1) 教学内容与工程实际相脱节,弹性力学先行课程材料力学、结构力学通常只讲平面问题,而传统的弹性力学大多也是以讲平面问题为主,学生缺少空间的力学概念和对实际问题的思考;(2) 理论教学与学生工程能力培养脱节,目前弹性力学课程的教学过于注重数学公式的推导,忽略了结果的对比分析,学生普遍感到弹性力学比较难学,内容抽象、公式推导多、推导出的公式不知有何种工程用途,也不知推导出公式的对错;(3) 教学与科研及工程脱节,目前的弹性力学教学过于偏重对古典问题解答的教学和传授,缺少对学生解决复杂的工程问题或科学问题能力的培养和引导,因此,学生不会利用弹性力学的理论来灵活解决实际科学和工程问题,缺少分析实际问题的力学概念、思路 and 手段;(4) 教学与现代科学技术脱节,当代的弹性力学教学中,通常只教授弹性力学的解析解法,缺少对弹性力学中实验分析方法和数值分析方法的介绍和训练.这样,学生不能熟练利用现代分析工具和手段,进行弹性力学问题的研究.

本书作者结合多年弹性力学课程的教学与研究工作,对教学内容进行深入思考,尝试对教材内容进行一些改革,旨在通过弹性力学教材来传递知识、提高素质、培养能力.

本书的特点是:(1) 从工程实际出发,直接从空间问题入手,给学生建立空间问题的受力和变形基本概念,建立基本理论,考虑分析方法;(2) 拓宽学生的知识面,增加柱坐标、球坐标系下的弹性方程、能量法、数值解法的内容;(3) 不仅使学生学会理论分析方法,也要学生掌握数值分析工具,增加理论分析方法结果与数值分析方法结果的对比分析,以及工程案例的分析;(4) 加强学生的动手能力和结果分析能力,增加 MATLAB 语言介绍和大型通用结构分析软件介绍,使学生能熟练利用现代数学工具,进行弹性力学分析.

本书系统全面地介绍弹性力学空间问题的基本理论、基本原理、基本方法及其

应用,旨在为从事工程结构分析建立空间的力学概念,打下坚实的三维力学理论基础,培养利用理论分析方法和数值分析方法研究复杂弹性力学问题和解决实际问题的能力.讲述中贯穿对弹性力学概念和基本思路的阐述,既突出弹性理论推导方法的应用,又注重研究结果的对比分析,以及加强灵活运用弹性理论来对复杂科学和工程问题进行数值分析.

全书共7章,第1章介绍弹性力学的发展简史、基本假设、基本研究思路和基本方法;第2章全面论述三维弹性力学问题的基本理论和基本方程;第3章全面介绍直角坐标系下的基本理论分析方法;第4章着重介绍曲线坐标系下的基本理论、基本方程及应用算例;第5章介绍薄板弯曲问题的基本概念、基本方程和基本解法;第6章讨论弹性力学的能量法和近似解法;第7章着重介绍最为常用的数值分析方法——有限元法的基本原理、各种单元特性和大型结构分析软件的功能,给出一些新型有限元法的应用算例.每章后附有思考题和习题供读者思考和训练.附录中给出利用MATLAB语言编制的计算各种弹性力学问题应力和位移场的计算机程序.第7章内容可视具体情况提前到第2章之后学习.

本书可以作为工科专业本科生或研究生教材,亦可供从事结构分析的科研和工程技术人员参考.

本书第2章和第4章的极坐标部分由陈适才执笔,第3章由彭凌云执笔,第1章、第4章的柱坐标和球坐标部分、第5~第7章由彭一江执笔.彭一江的研究生褚昊、白亚琼、李瑞雪和窦林瑞承担了全书算例的有限元数值解的对比分析和附录(应力、位移场的MATLAB计算程序)内容的撰写工作,以及彭一江撰写章节的文字录入和插图绘制的工作.全书及计算分析由彭一江进行补充、修改和统稿.在此向这4位研究生的协助表示深切的感谢.在本书的编写过程中,作者参考和吸收了许多同类教材的内容和长处,特此向这些教材的作者表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,书中难免存在疏漏之处,恳请广大读者批评指正.

彭一江

2015年1月26日

主要符号表

x, y, z	直角坐标
r, θ, z	柱坐标
r, θ	极坐标
r, θ, ϕ	球坐标
e_1, e_2, e_3	坐标单位矢量
n	物体内微分截面或边界上外法线方向的单位矢量
l_1, l_2, l_3	外法线的方向余弦
I_x, I_y, I_z	横截面对 x 轴、 y 轴和 z 轴的惯性矩
g	重力加速度
ρ	密度
q	连续分布荷载的集度
F_x, F_y, F_z	单位体积体力的直角坐标分量
F_r, F_θ, F_z	单位体积体力的柱坐标分量
F_r, F_θ, F_ϕ	单位体积体力的球坐标分量
$\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$	面力的直角坐标分量
σ_{ij}	应力张量
σ_n, τ_n	任意截面上的正应力和切应力
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	直角坐标系中的正应力分量
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{zy}, \tau_{yx}$	直角坐标系中的切应力分量
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	柱坐标系中的正应力分量
$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}, \tau_{rz}, \tau_{z\theta}, \tau_{\theta r}$	柱坐标系中的切应力分量
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\phi$	球坐标系中的正应力分量
$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta\phi}, \tau_{\phi r}, \tau_{\theta r}, \tau_{r\phi}, \tau_{\phi\theta}$	球坐标系中的切应力分量
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}$	极坐标系中的应力分量
p	任意斜截面上的应力矢量

p_x, p_y, p_z	p 的直角坐标分量
$\mathbf{u}$	位移矢量
u, v, w	位移的直角坐标分量
u_r, u_θ, u_z	位移的柱坐标分量
u_r, u_θ, u_ϕ	位移的球坐标分量
u_r, u_θ	位移的极坐标分量
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$	直角坐标系中的正应变分量和切应变分量
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\theta z}, \gamma_{rz}, \gamma_{r\theta}$	柱坐标系中的正应变分量和切应变分量
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\phi, \gamma_{\theta\phi}, \gamma_{r\phi}, \gamma_{r\theta}$	球坐标系中的正应变分量
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$	极坐标系中的应变分量
Θ	体积应变
I_1, I_2, I_3	应力张量不变量
J_1, J_2, J_3	应变张量不变量
E	弹性模量 (或杨氏模量)
G	剪切弹性模量
ν	泊松比
μ, λ	拉梅弹性常数
$\Phi(x, y)$	应力函数
M_x, M_y	板横截面单位宽度上的弯矩
M_{xy}, M_{yx}	板横截面单位宽度上的扭矩
Q_x, Q_y	板横截面单位宽度上的横向剪力
$w(x, y)$	板弯曲时的挠度
D	板的抗弯刚度
W	应变能密度
W_D	应变能
W^*	应变余能密度
W_D^*	应变余能
Π	弹性体的总势能
Π^*	弹性体的总余能

ε	应变列阵
σ	应力列阵
F^e	单元节点力列阵
P^e	单元荷载列阵
Δ^e	单元节点位移列阵
N	形函数矩阵
B	应变矩阵
D	弹性矩阵
S	应力矩阵
K^e	单元刚度矩阵
K	总刚度矩阵
Δ	整体节点位移列阵
P	整体荷载列阵

目 录

主要符号表

第 1 章 绪论	1
1.1 弹性力学的任务	1
1.1.1 弹性力学的研究对象和任务	1
1.1.2 弹性力学与其他力学的关系	1
1.2 弹性力学的发展简史	2
1.2.1 第一阶段:弹性力学的形成时期	2
1.2.2 第二阶段:弹性力学的完善时期	2
1.2.3 第三阶段:弹性力学的应用时期	3
1.2.4 第四阶段:弹性力学的发展时期	4
1.3 弹性力学的基本假设	4
1.3.1 连续性假设	5
1.3.2 均匀性假设	5
1.3.3 各向同性假设	5
1.3.4 完全弹性体假设	5
1.3.5 小变形假设	5
1.4 弹性力学分析模型的建立	6
1.4.1 建立弹性力学分析模型的原则	6
1.4.2 弹性力学建模举例	6
1.5 弹性力学的基本研究方法	9
1.5.1 解析解法	9
1.5.2 实验分析方法	10
1.5.3 数值分析方法	11
1.6 本书的特色	11
思考题与习题 1	12
第 2 章 三维应力应变状态	13
2.1 应力状态	13
2.1.1 荷载及其分类	13
2.1.2 内力和应力	13
2.1.3 量纲和量纲分析	15

2.1.4 一点的应力状态	15
2.1.5 斜截面上的应力	16
2.1.6 主应力及主方向	18
2.1.7 最大剪应力	20
2.1.8 应力分量转换公式	22
2.2 应变状态	24
2.2.1 位移及其分量	24
2.2.2 应变及应变分量	25
2.2.3 一点的应变状态	26
2.2.4 主应变与体积应变	26
2.2.5 最大切应变和体积应变	27
2.2.6 应变分量转换公式	28
思考题与习题 2	28
第 3 章 直角坐标系下的基本方程及基本解	30
3.1 基本方程	30
3.1.1 平衡方程	30
3.1.2 几何方程	32
3.1.3 变形协调方程	35
3.1.4 物理方程	36
3.1.5 边界条件	37
3.2 基本解法	38
3.2.1 按位移求解空间问题	38
3.2.2 按应力求解空间问题	39
3.2.3 圣维南原理	41
3.3 平面问题求解	42
3.3.1 平面问题及其分类	42
3.3.2 应力函数、逆解法、半逆解法	45
3.3.3 求解算例	48
3.4 空间问题求解	59
3.4.1 位移法求解	59
3.4.2 应力法求解算例	63
思考题与习题 3	67
第 4 章 曲线坐标系下的基本方程及基本解法	69
4.1 平面极坐标下的求解方法	69
4.1.1 基本方程	69

4.1.2 基本解法	73
4.1.3 求解算例	78
4.2 空间柱坐标系下的求解方法	91
4.2.1 柱坐标系基本方程	91
4.2.2 轴对称问题的基本方程	93
4.2.3 轴对称问题的求解	94
4.3 空间球坐标系下的求解方法	99
4.3.1 球坐标系基本方程	99
4.3.2 球对称问题的基本方程	101
4.3.3 球对称问题的求解	102
思考题与习题 4	106
第 5 章 薄板问题的基本方程及基本解法	108
5.1 薄板的定义及基本假设	108
5.1.1 板的定义、特点和分类	108
5.1.2 薄板理论的基本假设	109
5.2 薄板的变形和受力状态	109
5.2.1 薄板的位移和应变表达式	109
5.2.2 薄板的应力表达式	110
5.2.3 薄板的内力表达式	112
5.3 薄板弯曲的基本方程和边界条件	113
5.3.1 薄板弯曲的基本方程	113
5.3.2 薄板的边界条件	114
5.4 求解算例	115
思考题与习题 5	125
第 6 章 能量原理及近似解法	126
6.1 能量原理	126
6.1.1 应变能和应变余能的概念	126
6.1.2 虚位移原理	127
6.1.3 最小势能原理	128
6.1.4 虚力原理	129
6.1.5 最小余能原理	129
6.2 近似解法	130
6.2.1 瑞利-里茨法	130
6.2.2 伽辽金法	131
思考题与习题 6	136

第 7 章 弹性力学问题的数值分析方法	138
7.1 有限元法的解题思路	138
7.1.1 有限元法的发展简史	138
7.1.2 有限元法的解题思路	139
7.1.3 弹性力学基本方程的矩阵表示	140
7.2 有限元法的基本原理	142
7.2.1 建立位移模式	142
7.2.2 求解应变和应力矩阵	142
7.2.3 建立有限元基本方程	143
7.3 有限元程序的基本模块和功能	144
7.4 有限元的应用和算例	145
7.4.1 一些常见单元的特性	145
7.4.2 构造有限元模型的算例	148
7.4.3 有限元工程应用算例	152
思考题与习题 7	158
附录 理论分析应力、位移场的 MATLAB 计算程序	159
程序 -1: 悬臂梁自由端受集中力问题应力场计算程序	159
程序 -2: 受均布荷载悬臂梁弯曲问题应力场计算程序	159
程序 -3: 受自重和水压力楔形体应力场计算程序	160
程序 -4: 承受重力与均布压力半空间体应力和位移场计算程序	160
程序 -5: 圆环或圆筒受均布压力问题应力场计算程序	161
程序 -6: 无限大平板中孔口应力集中问题应力场计算程序	162
程序 -7: 内外表面承受均匀压力球壳问题应力场计算程序	163
程序 -8: 边界固定椭圆形薄板承受均布荷载问题应力场计算程序	164
部分习题答案	165
参考文献	167
索引	168
彩页	

第1章 绪 论

本章首先介绍弹性力学的研究对象、任务和性质,然后介绍弹性力学的发展简史及弹性力学的建模方法,最后着重论述弹性力学的基本假设和弹性力学的基本研究方法.

1.1 弹性力学的任务

1.1.1 弹性力学的研究对象和任务

弹性指物体在外界因素(外荷载、温度变化、支座移动等)作用下引起变形,在外界因素撤除后,完全恢复其初始的形状和尺寸的性质.

弹性力学又称弹性理论,是固体力学的一个重要分支,它的任务是研究弹性体在外力、温度变化、支座移动等因素作用下产生的变形和内力,从而解决各类工程结构的强度、刚度和稳定问题.它是一门理论性和实用性都很强的学科.

一些材料,如合金钢,当受力在弹性(比例)极限范围内,为一种理想的完全弹性体,其应力和应变呈线性关系,为线性弹性性质;当这些合金钢材料的受力超出了弹性极限,将出现塑性变形,则为塑性性质.还有一些材料,如土体,在外荷载作用下也具有明显的塑性变形,这也是塑性性质.有一些材料,如橡胶类材料,具有非线性的弹性性质,我们称之为非线性弹性.本书所研究的是线性弹性力学问题.

弹性力学是一门技术基础学科,是近代工程技术的必要基础之一.在现代工程,特别是土木工程、水利工程、机械工程、航天航空工程等大型结构的计算、分析、设计中,都广泛应用弹性力学的基本知识、基本理论和基本方法.同时,弹性力学也是一门力学基础学科,它的研究方法被广泛应用于其他学科和领域.它不仅是塑性力学、有限单元法、复合材料力学、断裂力学、结构动力分析和一些专业课程的基础,也是许多大型结构分析软件(如 ABAQUS、ANSYS 和 SAP2000 等)的核心内容.

1.1.2 弹性力学与其他力学的关系

理论力学、材料力学、结构力学、弹性力学四大力学的关系:理论力学研究刚体的机械运动,材料力学、结构力学、弹性力学均研究弹性变形体的内力和变形,其中,材料力学研究的对象是杆件,研究构件在拉压、剪切、扭转、弯曲以及组合变形作用下的应力、应变和位移,以及构件的承载能力(强度、刚度、稳定性);结

构力学的研究对象是杆系结构在外界因素作用下的内力和位移及结构的承载能力;对于杆件的变形,主要引入了平截面假设,即假设杆件的横截面在变形之前为平面,在变形之后仍保持为平面,这样使求解得到了简化,可直接得到横截面上的弯曲正应力沿截面高度方向按直线变化的规律.而弹性力学的研究对象为块体、板和壳体,如深梁、挡土墙、堤坝、基础等实体结构,不能采用杆件变形的平截面假设.

综上所述,与材料力学比较,弹性力学的研究对象更加广泛,研究方法更加严密,分析结果更加精确,可解决更为复杂的实际问题,需要使用较多的数学工具.

1.2 弹性力学的发展简史

弹性力学是在不断解决科学和工程实际问题的过程中发展起来的,大致可归纳为以下四个阶段.

1.2.1 第一阶段:弹性力学的形成时期

第一阶段,1638年意大利科学家伽利略(Galileo)首先研究了建筑工程中梁的弯曲问题.1678年英国科学家胡克(Hooke)在对金属丝、弹簧和悬臂木梁进行实验的基础上,揭示了弹性体的变形和受力之间成正比例的规律,被称为胡克定律.1687年英国物理学家牛顿(Newton)确立了运动三大定律,这为弹性力学数学物理方法的建立奠定了基础.1807年英国物理学家托马斯·杨(Thomas Young)提出了测量物体弹性的实验方法,其衡量弹性的物理量称为杨氏模量,杨氏模量又称拉伸弹性模量,是弹性模量中最常见的一种.根据胡克定律,在物体的弹性限度内,应力与应变成正比,比值被称为材料的杨氏模量,它是表征材料弹性性质的一个指标,仅取决于材料本身的物理性质.杨氏模量的大小标志了材料的刚性,杨氏模量越大,越不容易发生形变.直到现代,杨氏弹性模量仍然是选定材料的依据之一,是工程技术设计中常用的参数,其大小的测定对研究金属材料、光纤材料、半导体、纳米材料、聚合物、陶瓷、橡胶等各种材料的力学性质有着重要意义,还可用于土木工程结构和机械零部件设计、生物力学、地质等领域.1811年法国科学家泊松(Poisson)的代表性力学著作《力学教程》问世,他指出纵向拉伸还会引起横向收缩,两者应变比是一个常数,即除了杨氏模量之外,还有另一个弹性常数的存在,“泊松比”便是以他的名字命名的.这些研究成果对后来弹性力学理论的形成奠定了基础.

1.2.2 第二阶段:弹性力学的完善时期

第二阶段是弹性力学的理论基础建立时期,1821~1822年法国科学家纳维(Navier)和柯西(Cauchy)分别推导出了弹性理论的基本方程,格林(Green)和英国物理学家汤姆逊(Thomson)确立了各向异性体有21个弹性系数.19世纪20年代,

纳维和柯西建立了弹性力学的数学理论,使弹性力学成为一门独立的学科.1822~1828年,柯西发表了一系列论文,提出了应力和应变的概念,建立了弹性力学的平衡(运动)微分方程、几何方程和各向同性的广义胡克定律.关于各向同性弹性固体的弹性常量是一个还是两个,或者在一般弹性体中是15个还是21个,曾引起激烈的争论,促进了弹性理论的发展.最后,格林从弹性势,以及法国数学家、工程师拉梅(Lamé)从两个常量的物理意义给出了正确结论:各向同性弹性固体的弹性常量应是两个,不是一个.杨氏模量、泊松比与其他弹性模量,如体积模量和剪切模量之间可以进行换算.1838年,格林用能量守恒定律证明了各向异性体(一般弹性材料)有21个独立的弹性系数;汤姆逊用热力学第一定律和第二定律证明了同样的结论,肯定了各向同性体有2个独立的弹性系数.这些工作为后来弹性力学的发展奠定了牢固的理论基础.

1.2.3 第三阶段:弹性力学的应用时期

第三阶段是线性弹性力学的工程应用时期,在理论方面建立了许多定理和重要原理,并提出了许多有效的计算方法.例如,1850年德国物理学家基尔霍夫(Kirchhoff)解决了平板的平衡和振动问题,提出了力学界著名的“基尔霍夫薄板假设”;1854年间法国科学家圣维南(Saint-Venant)针对柱体扭转和弯曲问题的求解,开创了用半逆解法求解具体问题的有效途径,并针对弹性体边界条件的局部性问题提出了著名的“圣维南原理”,使弹性力学在理论和应用上都有了长足的发展,一些具有理论意义和工程应用价值的弹性力学问题得以解决;1861年英国科学家艾里(Airy)提出了著名的“艾里应力函数”,并据此解决了弹性力学的平面问题;1862年德国物理学家赫兹(Hertz)解决了弹性体的接触问题,1898年德国科学家基尔斯(Kirsch)提出了应力集中问题的求解方法.这个时期,各种能量原理得到了建立,并提出了基于这些原理的近似计算方法,建立了弹性体的虚功原理和最小势能原理.1872年意大利科学家贝蒂(Betti)建立了功的互等定理.1873~1879年意大利工程师卡斯蒂利亚诺(Castigliano)建立了最小余能原理.1877年和1908年英国物理学家瑞利(Rayleigh)和瑞士科学家里茨(Ritz)分别从弹性体的虚功原理和最小势能原理出发,提出了著名的“瑞利-里茨法”.1915年,苏联数学家和工程师伽辽金(Галёркин)提出了伽辽金近似方法求解弹性力学问题.这些基于能量原理的直接解法,开创了近似求解弹性力学问题的新途径.20世纪30年代,苏联数学家和工程师穆斯赫利什维利(Мусхелишвили)发展了用复变函数理论求解弹性力学问题的方法,在分析含有孔洞、夹杂和裂纹体的应力集中问题时,复变函数法表现出很大的优越性,同期,英国科学家史莱顿(Sneddon)将近乎被人遗忘积分变换和积分方程用于弹性力学领域,来求解弹性力学平面问题、空间轴对称问题及弹性理论中的复杂边值问题,这些工作在国际力学界及应用数学界产生了深远而广泛的影响.

1.2.4 第四阶段：弹性力学的发展时期

第四个阶段是弹性力学的分支及与之相关的边缘学科形成和发展时期。从 20 世纪初开始, 随着工业技术的迅猛发展, 如机械、船舶、建筑、钢材和其他弹性材料应用范围的不断扩大, 弹性力学得到了快速发展, 同时也推动了与其他科学的结合。1907 年美国科学家卡门 (Kàrmàn) 提出了薄板的大挠度问题, 1939 年, 他与钱学森提出了薄壳的非线性稳定理论。在 1937~1939 年, 美国科学家莫纳汉 (Murnaghan) 和毕奥 (Biot) 提出了大应变理论。在 1948~1957 年, 我国科学家钱伟长用摄动法求解了薄板的大挠度问题。他们的这些工作, 为非线性弹性力学的发展做出了重要的贡献。在这个时期, 薄壁构件和薄壳的线性理论有了较大的发展, 形成了诸如厚板与厚壳理论、各向异性和非均匀体的弹性力学理论。同时也形成了一些新的学科领域, 热弹性力学、粘弹性理论、电磁弹性力学、气动弹性力学以及水弹性理论等新的分支和边缘学科。随着高速大型电子计算机的发展, 有限差分法、有限单元法、边界元法等各种有效的数值分析方法如雨后春笋地涌现出来。这些新领域的开拓和计算弹性力学的发展, 大大丰富了弹性力学的内容, 促进了有关工程技术的发展。尤其是有限元法具有模拟任意复杂几何形状的广泛适用性, 为求解任意复杂工程构件和结构的弹性力学问题提供了通用有效的数值分析方法。1954 年我国科学家胡海昌于建立了三类变量的广义势能原理和广义余能原理; 1955 年日本科学家鷲津久一郎也独立地导出了这一原理, 被称为胡海昌-鷲津久一郎变分原理。在 1960~1978 年我国科学家钱伟长和胡海昌建立了弹性力学的广义变分原理并推广到了塑性力学领域。各种变分原理的研究, 为有限单元法和其他数值分析方法的进一步发展奠定了坚实的理论基础。

目前, 随着工业和技术的飞速发展, 不但经典弹性力学理论得到了很好的发展, 同时还大大促进了弹性力学在工程技术领域中的应用, 促进了工程技术的发展。不难预料, 弹性力学将会对现代工程技术和自然科学的发展起到更大的作用。同时, 弹性力学自身也将得到更好的发展。弹性力学的相关理论已经在土木工程、水利工程、石油工程、航空航天工程、矿业工程以及农业工程等领域得到了广泛的发展和应用。

1.3 弹性力学的基本假设

在分析问题, 如果精确考虑所有因素, 则导出的弹性力学方程非常复杂, 实际上也不可能求解。因此, 通常必须按照研究对象的性质和求解问题的范围, 做出若干科学假设, 略去一些暂不考虑的因素, 从而既能反映主要的力学特征, 又使问题简化, 使得问题的求解成为可能。为此需要提出一些基本假设来建立力学模型, 弹

性力学的基本假设如下。

1.3.1 连续性假设

弹性力学作为连续介质力学的一部分,它的基本前提是将可变形的固体看作是连续密实的物体,即组成物体的质点之间不存在任何空隙。因此,可以认为物体中的应力、应变和位移等都是连续的,可以用坐标的函数来表示,在做数学推导时可以运用连续和极限的概念。严格地讲,物体是由分子组成的,分子与分子之间存在着间隙。当我们考虑宏观物体的受力和变形过程时,物体的宏观尺寸远大于分子之间的相对距离,故应用这一假设并不会引起显著的误差,这一假设已被实验证实是合理的。

1.3.2 均匀性假设

假设弹性物体是由同一类型的均匀材料组成,因此物体中各个部分的弹性常数与物理性质都是相同的,它们不随坐标位置的变化而改变。根据这个假设,在处理问题时,我们可以取出物体的任一小部分来进行分析,然后将分析结果应用于整个物体。对于由两种或者两种以上的材料组成的物体,如混凝土,只要每一种材料的颗粒远远小于物体的几何形状,并且在物体内部均匀分布,从宏观意义上讲,也可以视为均匀材料。

1.3.3 各向同性假设

假设物体在各个不同的方向上具有相同的物理性质,这样可以简化弹性常数。对大多数工程材料,各向同性假设足够精确,但对许多复合材料、木材等各向异性明显的材料,各向同性假设将不成立。

1.3.4 完全弹性体假设

假定物体的变形在外力去除后能够完全恢复原来的形状和大小,没有残余变形。也就是所发生的应力和应变之间存在一一对应关系,完全符合胡克定律,变形与物体受力的历史过程无关,构成物体的材料称为完全弹性材料。完全弹性假设使得材料的弹性常数不随应力或应变的变化而改变。

1.3.5 小变形假设

假设在外力或者其他外界因素(如温度等)的影响下,物体的变形与物体自身几何尺寸相比属于高阶小量。根据小变形假设,在讨论弹性体的平衡问题时,可以不考虑因变形所引起的尺寸变化,使用物体变形前的几何尺寸来代替变形后的尺寸,可使问题简化。由于工程上所用的材料在一般受力情况下都是小变形,故采用这一假设,可以在基本方程推导中,略去位移、应变和应力分量的高阶小量,这样的