数学分析讲义

（上册）

龚循华　董秋仙　编

科学出版社

数学分析讲义

（上册）

龚循华　董秋仙　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本教材分上、下两册，本书为上册. 内容包括函数、数列极限、函数极限、连续函数、导数与微分、微分中值定理及其应用、实数系的完备性及其应用、导数在研究函数上的应用、不定积分、定积分、广义积分. 本书在章节安排上，由浅入深，逐步展开，编排合理；注重对基础知识的讲述与基本能力的训练；结合微积分的发展史与几何意义引进相关的概念与定理，具有启发性；注重新概念、新定理以及精彩定理证明的评注；证明详细，难点处理透彻，例题丰富，便于教学和读者自学.

本书可作为综合性大学与师范院校数学类各专业的教材，也可作为理工科院校数学要求较高专业的自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义(上册)/龚循华，董秋仙编. —北京：科学出版社，2015. 8

ISBN 978-7-03-045595-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①龚…②董… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 205992 号

责任编辑：胡海霞/ 责任校对：钟 洋

责任印制：霍 兵/ 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2015 年 8 月第一次印刷 印张：25 3/4

字数：519 000

定价：55.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

数学分析是数学类各专业本科生最重要的一门课程，是几乎所有后续数学课程的必备基础，数学分析的思想、理论与方法还将直接影响到学生毕业后的科学研究与应用.

我们吸取了南昌大学数学系老教师处理数学分析教材的经验与一些教材的优点，结合自己 30 多年讲授数学分析课程的心得以及从事数学研究的体会，在原有数学分析讲稿的基础上编写了本书.

为使读者更好地接受数学分析的理论与方法，我们本着由浅入深、逐步展开的思想来编写. 本教材一开始简要介绍数学分析这门课程形成的历史，初步引出描述性的极限概念，强调极限概念将贯穿于数学分析始终，突出极限概念的重要性. 为使极限概念变得容易接受，我们将极限的描述性定义逐步过渡到严谨定义，让读者逐步理解极限的概念. 本教材把实数系的完备性理论的几个定理分散处理，先把其中几个定理逐个应用于极限与连续函数的整体性质的证明，然后在稍后的章节集中阐述实数系的完备性定理之间的等价性及其应用，分散了难点.

反证法是数学中的重要方法，涉及对命题的正确否定. 本教材添加了用肯定的语气否定命题这一节内容，用一层一层剥笋似的办法对命题进行否定，这对读者正确地否定命题有帮助.

提出一个命题，要么证明它是正确的，要么举出一个反例说明它是错误的. 在数学发展历史上，一些精彩的反例同样推动数学的发展. 本教材对举反例给予了重视.

本教材结合微积分的发展历史引入一些相关定义与定理，适当简要介绍数学大师的相关贡献，表述数学当时的发展情况，有助于提高读者的学习与钻研兴趣；另外结合几何意义较自然地引进相关的概念与定理，具有启发性，也让读者看到，可通过几何意义发现概念、发现定理、发现定理的证明方法.

本教材的名称为数学分析讲义，作为讲义，本教材注重对概念、方法、定理的评注，对精彩定理的证明进行品析，有助于读者理解新概念、吸收运用重要证明方法. 极限理论、实数理论、一致连续、非一致连续、一致收敛、非一致收敛、定积分的可积准则、隐函数存在性定理及其应用都是数学分析中的难点. 本教材对定理的证明详细，对普遍公认的难点都作了深入浅出的处理，点出了处理这些难点的关键所在，便于教师教学和读者自学. 利用苏联数学家辛钦在数学分析简明教程中证明

二重积分换元法的粗略的证明框架，我们给出了二重积分换元法的详细证明.

学习的目的不仅是为了掌握新概念、新理论、新方法，还应像数学前辈们那样不断地创造出新的数学理论，并把数学用来解决各种实际问题，这就需要培养能提出问题、解决问题的能力. 要培养解决问题的能力，没有捷径，需要做大量的习题，要认真严谨地做题，要勇于做难题. 编者的前辈王仁藻先生曾说过，“学数学的人必须具备两个品格：一是严谨，二是不怕烦”，傅万涛先生也曾说过“只要长时间思考一个问题，就会有突破”. 编者能完成本教材的编写，得益于他们的教导.

本教材 7.3 节的函数的半连续性是打星号的内容，可以不讲. 数列的上下极限、曲率的内容在课时不够时可让学生自学.

本教材主要由龚循华执笔编写，董秋仙编写了第 1,5,9 章. 南昌大学数学系的余国松、王三华、刘凯、朱咏前、邱天珍、宋军老师打印了上册部分书稿，南昌航空大学科技学院孟旭东老师、华侨大学数学科学学院的陈斌老师、硕士研究生韩瑜、刘芳，以及南昌大学数学系本科 2012 级数学与应用数学专业的部分学生参加打印下册部分书稿，在此向他们表示衷心感谢. 本教材责任编辑胡海霞对本教材的编写给予肯定，为本教材的出版付出辛勤的劳动，在此表示衷心感谢. 本教材的出版得到南昌大学教务处和管理科学与工程重点学科的经费资助，在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平、经验有限，书中的不足之处在所难免，恳请读者提出宝贵意见.

编　者

2014 年 12 月于南昌大学

目　　录

第 0 章　绪论与预备知识

本章简略地介绍数学发展的几个阶段以及数学分析所处的位置，通过几个具体的例子说明极限的概念对微积分产生的重要性，为后面讲极限理论作一个铺垫，另外给出有关实数的一些预备知识.

0.1　绪　　论

数学是最古老的，同时也是正在蓬勃发展的最具生命力的一门科学. 早在公元前 2000 年左右，人们由于贸易、测量和航海的需要，整理了更远古时期的计算与测量方法，从而形成了数学. 不过，这个时期的数学还是片断的、零碎的，没有形成严谨的体系，特别是缺乏逻辑因素. 这个时期可称为数学的萌芽时期.

从公元前六世纪开始，古希腊的数学就已经获得了独立的科学地位. 毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前 560～前 480)学派建立了演绎法，在数学中引入了逻辑因素，对命题加以证明. 这些工作为欧几里得(Euclid，约公元前 330～前 275)公理体系的建立奠定了基础. 公元前 300 年左右，欧几里得《几何原本》问世. 后来阿基米德(Archimedes，约公元前 287～前 212)又把古希腊的数学发展到了顶峰，使得数学成为了一门完整的科学. 期间，初等几何、算术、初等代数、三角都得到了很大发展. 这个时期可称为初等数学时期.

之后，随着欧洲资本主义的兴起，特别是欧洲的文艺复兴，人们对阿基米德的学说重新掀起研究的热潮，涌现出许多先驱者. 古希腊的数学在沉寂了一千多年以后在欧洲大陆得到了继承和发展. 特别是到了十七世纪，数学更是发生了翻天覆地的变化. 在这个世纪，笛卡儿(Descartes，1596～1650，法国数学家、哲学家)创立了解析几何，牛顿(Newton，1642～1727，英国数学家、物理学家、天文学家)与莱布尼茨(Leibniz，1646～1716，德国数学家、自然科学家)创建了微积分学，开创了数学的新纪元. 期间，分析学、微分方程、概率论、射影几何都取得了很大的成就. 这个时期可称为变量数学时期.

数学的蓬勃发展导致了十九至二十世纪间的一场数学革命，这场革命与承认罗巴切夫斯基(Lobatchewsky，1793～1856，俄国数学家)、黎曼(Riemann，1826～1866，德国数学家)的非欧几何以及康托尔(Cantor，1845～1918，德国数学家)的集合论有关，数学变得更加抽象. 随着数学的发展，它意识到自己的独立性，借助新的概念、新的思想、新的方法，发现新的问题而派生出许多新的分支，如拓扑学、复变

函数、实变函数、近世代数、数理逻辑、微分几何、泛函分析、数论等. 这个时期可称为近代数学时期.

目前,数学仍在蓬蓬勃勃发展着,它已成为研究自然科学、社会科学的强有力的工具.

我们这门课程称为数学分析,其主体是微积分,是由牛顿与莱布尼茨创立,并由波尔察诺(Bolzano,1781～1848,捷克数学家)、柯西(Cauchy,1789～1857,法国数学家)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass,1815～1897,德国数学家)、戴德金(Dedekind,1831～1916,德国数学家)、康托尔等完善的.

微积分包括微分学与积分学,它是如何形成、发展、又完善成今天的数学分析呢? 这与面积问题、曲线的切线问题、质点的瞬时速度问题的研究有直接的关系.

0.1.1　圆的面积问题

在初等几何里,人们会算矩形、三角形和梯形等简单图形的面积,进而会算多边形的面积. 古希腊数学家安蒂丰(Antiphon,约公元前 480～前 411)与中国数学家刘徽(约 225～295)在不同时期不约而同地用圆内接正 $2^{n-1}\cdot 6$ 边形的面积去近似圆的面积(图 0.1),当圆内接正多边形的边数不断增加时,多边形的面积和圆的面积越来越接近. 这种用圆内接正 $2^{n-1}\cdot 6$ 边形的面积去近似圆的面积方法被称为"穷竭法"或"割圆术". 穷竭法后来被古希腊数学家欧多克索斯(Eudoxus,约公元前 400～前 347)和阿基米德发展成为较严格的理论,并利用它得到了许多关于面积和体积问题的重要成果. 穷竭法是极限方法的雏形.

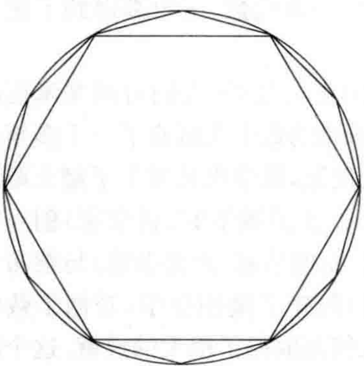

图 0.1

0.1.2　曲边梯形的面积

设给出一个如图 0.2 所示的曲边梯形,它由抛物线 $y=x^2$,x 轴与直线 $x=1$ 所围成.

像穷竭法那样,在局部用矩形面积近似曲边梯形的面积. 我们把$[0,1]$区间分划成 n 个相等的小段,每段长$\frac{1}{n}$,分点的坐标分别为$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$,再从所有分点引平行于 y 轴的直线,把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形,相应得到 $n-1$ 个小矩形(图 0.2). 再用小矩形面积去近似小曲边梯形的面积. 这 $n-1$ 个小矩形的宽度都是$\frac{1}{n}$,而高则分别是$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$(注意曲边梯形上面的那条曲边是抛物线 $y=x^2$),因此这 $n-1$ 个小矩形面积的和为

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

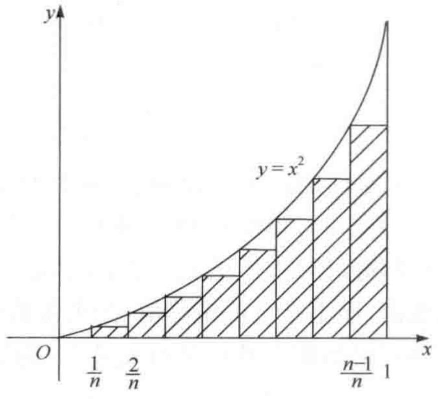

图 0.2

随着 n 的增大，从图 0.2 可看出这 $n-1$ 个小矩形的面积的和 S_n 会越来越接近所求曲边梯形的面积. 若让 n 无限增大，则可见 S_n 无限趋于$\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}$就应该是这一曲边梯形的面积，也称 S_n 的极限是$\frac{1}{3}$.

这种方法抽象出来就是：分划、局部近似、求和、取极限. 这就是我们后面要讲的定积分. 面积问题就是所谓积分问题. 这种化平面几何图形的面积成无限多个小面积和的方法被十六世纪至十七世纪的许多数学家使用过，并逐渐形成了积分学.

微分（或导数）概念的导出与求曲线的切线和求质点的瞬时速度有密切关系.

0.1.3　曲线的切线斜率

给定一条曲线 $y=f(x)$（图 0.3），$P_0(x_0, y_0)$ 为曲线上的一点，要求曲线在点 P_0 的切线 P_0T 的斜率.

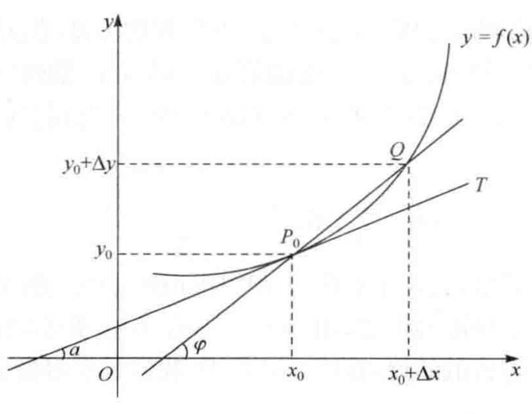

图 0.3

切线 P_0T 的斜率不是孤立的概念，它与已知的割线斜率有密切的关系. 在曲线上任取一点 Q，设 Q 的坐标为$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，其中 $\Delta x \neq 0$，$\Delta y = f(x_0+\Delta x) -$

$f(x_0)$. 由平面解析几何知,过曲线 $y=f(x)$ 上两点 $P_0(x_0,y_0)$,$Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 的割线斜率为

$$k'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

当 Δx 变化时,即点 Q 在曲线上变动时,割线 P_0Q 的斜率 k' 也随之变化,当 $|\Delta x|$ 很小时,割线 P_0Q 的斜率 k' 是切线 P_0T 的斜率的近似值. $|\Delta x|$ 越小,近似程度就越好. 但是,不论 Δx 多小,割线总还是割线,割线的斜率 k' 总还是切线斜率的近似值,而不是它的精确值. 为求得精确值,我们令 $\Delta x\to 0$,即取极限,割线 P_0Q 的斜率 k' 的极限 k 就应是曲线过 P_0 的切线 P_0T 的斜率,记为

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

0.1.4 瞬时速度

设一质点做直线运动,其运动规律为 $s=s(t)$. 要求质点在时刻 t_0 的瞬时速度 v_0. 我们考察从时刻 t_0 到时刻 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的运动,这里,Δt 代表从 t_0 开始所经过的时间. 在这段时间内,质点所走过的路程为

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0).$$

如果 Δt 很小,在这段时间内,运动就可以近似地看成是匀速的,因而就可以用这段时间的平均速度

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

去近似代替时刻 t_0 的瞬时速度 v_0. Δt 越小,近似程度越高. 但是,不论 Δt 多小,这个平均速度总还只是瞬时速度 v_0 的近似值,而不是它的精确值. 为了从近似值过渡到精确值,我们令 $\Delta t\to 0$,即取极限,平均速度的极限值就应该是瞬时速度 v_0,记为

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

综上,我们可以看出,无论是求曲边梯形的面积、曲线切线的斜率,还是求质点的瞬时速度,都涉及了极限的概念,用到了极限的方法. 极限理论是数学分析的基础,它将贯穿于数学分析的始终,在第 2,3 章中,我们将学习极限理论.

0.2 数　　集

0.2.1 实数

本课程中,数都是指实数. 全体实数所组成的集合称为实数系. 实数包括有理

数和无理数两种. 所有整数、分数统称为**有理数**. 任何不为零的有理数都可表示成**最简分数**(也称**既约分数**)的形式,即可以表示成$\dfrac{p}{q}$或$-\dfrac{p}{q}$的形式,其中,p,q 是**互质**的正整数. 除有理数以外,其余的实数都称为**无理数**. $\sqrt{2}$,$\sqrt{5}$,圆周率 π 都是无理数. 两个有理数的和、差、积、商(除数不为零)仍是有理数;任何一个非零有理数与一个无理数之积必是无理数;有理数与无理数的和、差必是无理数. 有理数在实数中是**稠密**的,也就是说在任何两个不同的实数之间必存在着有理数. 同样无理数在实数中也是稠密的,即在任何两个不同的实数之间必存在着无理数.

画一条水平直线,在直线上取定一点,记为 O,称它为原点. 在原点的右方的直线上取定一点,把 O 到这点的距离定为单位长度,这一点用数 1 来表示. 这样,这条直线上的每一个点都可以用一个数来表示. 如果这个点在原点的右边,则用正数来表示;如果这个点在原点的左边,则用负数来表示;表示原点的数是数 0. 用这种方法,就可把实数的全体同这条直线上的点一对一地对应起来. 这条直线称为**数轴**. 以后,我们将数轴上的点与它对应的数等同起来,不加区别.

需要指出的是,$a\geqslant 0$ 是指 a 不小于 0,即 $a>0$ 或 $a=0$;依此理解 $a\leqslant b$ 与$a\geqslant b$,如 $2\leqslant 2$ 是成立的.

为了表示两点之间的距离,我们需要数的绝对值的概念.

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下的一些性质.

(1) $|a|\geqslant 0$, $|a|=0$ 的充分必要条件是 $a=0$;

(2) $|ab|=|a|\,|b|$;

(3) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$;

(4) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$;

(5) $|a|\leqslant r$($|a|<r$)的充分必要条件是$-r\leqslant a\leqslant r$($-r<a<r$);

(6) $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|$.

性质(3)通常称为三角不等式,这是一个很重要的不等式.

有了绝对值概念,就可定义 a,b 两点之间的距离为$|a-b|$.

0.2.2　区间、邻域与集合符号

用 $\mathbf{N}_+$ 表示全体正整数组成的集合,用 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数组成的集合,用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数组成的集合. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$. 我们称数集 $\{x:a<x<b\}$ 为**开区间**,记为(a,b);数集 $\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记为$[a,b]$;数集 $\{x:a\leqslant x<b\}$ 和

$\{x:a<x\leqslant b\}$都称为半开半闭区间,分别记为$[a,b)$和$(a,b]$. 以上这几类区间统称为**有限区间**. 满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记为$[a,+\infty)$,这里∞读作"无穷大",$+\infty$读作"正无穷大". 类似地,我们记

$$(-\infty,a]=\{x:x\leqslant a\},\quad (a,+\infty)=\{x:x>a\},$$

$$(-\infty,a)=\{x:x<a\},\quad (-\infty,+\infty)=\{x:-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$

其中,$-\infty$读作"负无穷大",以上这几类区间都称为**无限区间**.

下面给出**区间** I 的定义. 包含两点以上的数集 I 称为是一个**区间**,若对任意的 $x_1,x_2\in I,x_1<x_2$,以及任意的 $x\in(x_1,x_2)$,都有 $x\in I$.

由区间 I 的定义,可知有限区间与无限区间皆为区间.

设 $a\in\mathbf{R},\delta>0$. 数集$\{x:|x-a|<\delta\}$记为$U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x:|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

$U(a,\delta)$称为 a 的 δ 邻域,δ 称为 a 的邻域半径. 当不需要注明邻域半径 δ 时,常将 $U(a,\delta)$表示为$U(a)$,简称 a 的**邻域**. 若 I 是一个区间,且存在 $U(a)\subset I$,则也称这个区间 I 为 a 的邻域.

数集$\{x:0<|x-a|<\delta\}$记为$\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x:0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}.$$

$\mathring{U}(a,\delta)$称为 a 的 δ **去心邻域**.

注 本教材用到下面的符号:

(1) 符号"$\in$"表示"属于",符号"$\notin$"表示"不属于",符号"$\forall$"表示"对任意的",符号"$\exists$"表示"存在某个";

(2) 符号"$\subset$"表示"包含",符号"$\cup$"表示"并",符号"$\cap$"表示"交",符号"$A\subset B$"表示"A 中的任意元素都是 B 中的元素",符号"$\varnothing$"表示"空集".

$A\setminus B=\{x:x\in A,x\notin B\}$, $A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$, $A\cap B=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合,记

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\{x:\exists k\in\{1,2,\cdots,n\},\text{有 } x\in A_k\},$$

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=\{x:\forall k\in\{1,2,\cdots,n\},\text{有 } x\in A_k\}.$$

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一列集合,记

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\{x:\exists k\in\mathbf{N}_+,\text{有 } x\in A_k\}.$$

0.3 几个不等式

不等式 1 (伯努利(Bernoulli)不等式) 对任意的正整数 $n>1$ 以及任意的

$x>-1$,有

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \tag{0.3.1}$$

仅当 $x=0$ 时等号成立.

证明　对任意的正整数 $n>1$,当 $x=0$ 时,式(0.3.1)中等号成立.

以下用数学归纳法证明.

对任意的正整数 $n>1$ 以及任意的 $x>-1$,且 $x\neq 0$,有

$$(1+x)^n > 1+nx. \tag{0.3.2}$$

当 $n=2$ 时,对任意的 $x>-1$,且 $x\neq 0$,有不等式

$$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x.$$

设 $n=k$ 时,式(0.3.2)成立.

对 $n=k+1$,对任意的 $x>-1$,且 $x\neq 0$,此时 $1+x>0$,有

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)^k(1+x)>(1+kx)(1+x)\\&=1+kx+x+kx^2>1+kx+x=1+(k+1)x.\end{aligned}$$

由数学归纳法知,对任意的正整数 $n>1$,式(0.3.2)成立.

不等式 2　对任意的正整数 $n>1$,若 $x_i>0$,$i=1,2,\cdots,n$,且 $x_1x_2\cdots x_n=1$,则有不等式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqslant n. \tag{0.3.3}$$

仅当 $x_i=1$,$i=1,2,\cdots,n$ 时,式(0.3.3)中等号成立.

证明　对任意的正整数 $n>1$,当 $x_i=1$,$i=1,2,\cdots,n$ 时,显然

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n. \tag{0.3.4}$$

用数学归纳法证明. 对任意的正整数 $n>1$,当 $x_1x_2\cdots x_n=1$,$x_i>0$,$i=1,2,\cdots,n$,且不全为 1 时,有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n>n. \tag{0.3.5}$$

当 $n=2$ 时,由 $x_1\cdot x_2=1$,$x_i>0(i=1,2)$,不妨设 $x_1\neq 1$,显然有

$$x_1+x_2=x_1+\frac{1}{x_1}>2.$$

设 $n=k$ 时,式(0.3.5)成立.

对 $n=k+1$,由 $x_1x_2\cdots x_{k+1}=1$,$x_i>0$,$i=1,2,\cdots,k+1$,且不全为 1,存在某个 $1\leqslant i_0\leqslant k+1$,使得 $x_{i_0}>1$,又必存在某个 $1\leqslant j_0\leqslant k+1$,使得 $x_{j_0}<1$. 不妨设 $x_1<1$,$x_2>1$. 设 $y=x_1x_2$,则 $yx_3\cdots x_{k+1}=1$. 由归纳假设与式(0.3.4),不论 y,$x_i>0$,$i=3,\cdots,k+1$ 是否全为 1,都有

$$y+x_3+\cdots+x_{k+1}\geqslant k.$$

从而

$$\begin{aligned}x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}&=y+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1+x_2-y\\&\geqslant k+1+x_1+x_2-x_1x_2-1=k+1+(x_2-1)(1-x_1)>k+1.\end{aligned}$$

由数学归纳法知,对任意的正整数 $n>1$,式(0.3.5)成立.

不等式 3　对任意的正整数 $n>1$,若 $x_i>0, i=1,2,\cdots,n$,则

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\qquad(0.3.6)$$

仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,式(0.3.6)中等号成立.

证明　令 $a_n=\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}, b_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}, c_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n>0$ 时,显然有 $a_n=b_n=c_n$.

当 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,且不全相等时,由 $\dfrac{x_1}{b_n}\cdot\dfrac{x_2}{b_n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{x_n}{b_n}=1$,必有某个 $\dfrac{x_i}{b_n}\neq1$,根据不等式 2,知

$$\frac{x_1}{b_n}+\frac{x_2}{b_n}+\cdots+\frac{x_n}{b_n}>n,$$

即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}<\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

显然 $\dfrac{1}{x_i}>0, i=1,2,\cdots,n$,且也不全相等,$\dfrac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{b_n}}\cdot\dfrac{\frac{1}{x_2}}{\frac{1}{b_n}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\frac{1}{x_n}}{\frac{1}{b_n}}=1$,根据不等式 2,知

$$\frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{b_n}}+\frac{\frac{1}{x_2}}{\frac{1}{b_n}}+\cdots+\frac{\frac{1}{x_n}}{\frac{1}{b_n}}>n,$$

即

$$\frac{1}{b_n}<\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}=\frac{1}{a_n},$$

即

$$a_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}<b_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

于是,有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}<\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}<\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

习　题　0

1. 从绝对值定义出发证明：

(1) $|a|=|-a|$；

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$；

(3) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

(4) $|x-a|<r$ 的充分必要条件是 $a-r<x<a+r$；

(5) $|x|\geqslant A$ 的充分必要条件是 $x\geqslant A$ 或 $x\leqslant -A$.

2. 证明不等式：

(1) 当 $|x+1|<1$ 时，有 $|x-2|<4$；

(2) 当 $|x-1|<1$ 时，有 $|x^2-1|<3|x-1|$.

3. 解不等式：

(1) $|x-3|<1$；　(2) $|2x+1|\geqslant 3$.

4. 用数学归纳法证明：对任意的正整数 $n>2$，有

$$\sqrt{n}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}.$$

5. 用数学归纳法证明：对任意的正整数 n，有

(1) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

(2) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

第 1 章　函　　数

在自然科学、工程技术，甚至在某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一. 在数学中，函数处于基础核心地位，是数学分析这门课程研究的对象.

1.1　函数的概念

1.1.1　函数的定义

在某个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，它们的变化并非彼此无关，而是相互联系着. 下面举几个有两个变量互相联系着的例子.

例 1　真空中自由落体，物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着. 如果物体距地面的高度为 h，此时对于任意 $t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$都对应唯一一个距离 s，t 与 s 的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度.

例 2　球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着. 对于任意 $r\in(0,+\infty)$都对应唯一一个球的体积 V. r 与 V 的关系为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率.

例 3　对于任意 $x\in(-1,1)$，都对应唯一一个数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

以上的例子有共同的特征：都有一个数集和一个对应关系，对于数集中任意数 x，按照对应关系都对应 $\mathbf{R}$ 中唯一一个数. 于是有如下函数的概念.

定义 1.1.1　设 A 是非空数集. 若存在对应关系 f，对 A 中任意数 x，按照对应关系 f，对应唯一的一个数 $y\in\mathbf{R}$，则称 f 是定义在数集 A 上的**函数**，表示为

$$f:A\to\mathbf{R}.\tag{1.1.1}$$