



智能教育丛书

智能数学特训教程

高中数学必修①

丛书主编 / 齐 新

本册主编 / 齐智华 齐 新

智能数学



大巧夺冠

世界图书出版公司



智能教育丛书

智能数学特训教程

高中数学必修 ①

丛书主编 / 齐 新

本册主编 / 齐智华 齐 新

智能数学 123

1. 一个中心: 以数学思想方法为中心开发解题智慧.
2. 两个基本点:
 1. 总结基础秘诀, 使基础知识系统化、傻瓜化. (简称“基础知识傻瓜化”)
 2. 总结解题技术, 使解题方法系统化、明确化. (简称“解题方法明确化”)
3. 三步学: 学会自我总结, 摧毁题海战术
 - S1 问中学(总结基础知识与解题方法);
 - S2 例中学(范例评注);
 - S3 做中学与用中学(自我检测).

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

智能数学特训教程. 高中数学.1: 必修 / 齐新编. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2014.6

(智能教育丛书)

ISBN 978-7-5100-8085-2

I. ①智… II. ①齐… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 122911 号

智能教育丛书·智能数学特训教程高中数学必修 1

丛书主编: 齐 新

本册主编: 齐智华 齐 新

责任编辑: 夏 丹 张晋雯

装帧设计: 中公教育图书设计中心

出 版: 世界图书出版公司北京公司

出 版 人: 张跃明

发 行: 世界图书出版公司北京公司
(地址: 北京朝内大街 137 号 邮编: 100010 电话: 64077922)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 三河市中晟雅豪印务有限公司

开 本: 787 mm×1092 mm 1/16

印 张: 10

字 数: 192 千

版 次: 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5100-8085-2

定 价: 30.00 元

版权所有 翻印必究

智能教育丛书编委会

丛书顾问 齐智华 李永新 石磊

丛书主编 齐新

丛书副主编 杨进 连文杰 纪洪波

本册主编 齐智华 齐新

前言 怎样学好高中数学

用老办法学习数学学不好,将来考大学也考不好.若用智能数学的新思想、新方法学习数学,你一定能学好数学,天天快乐,天天向上!将来一定能考上理想的大学,实现高中时代的梦想.

问1 什么是智能数学?智能数学的新思想新方法是什么?

解 从国家的领袖,直到广大的学生家长,在教育与学习的领域中最憎恨的是什么?最憎恨的就是中小学的题海战术!这是国家发展中的大问题,它捆绑着中国人追赶并超越先进世界的脚步.这也是现代素质教育的最大问题,它是压在青少年头上的一座大山.究其根源,是传统数学造成的!

传统数学(美国称为“机械数学”)是以“基础知识加题海”为中心的三步学:

S1 死记硬背(机械记忆)

S2 照猫画虎(机械模仿)

S3 题海战术(机械练习)

时至今日的新社会(信息社会),我国仍有很多学校,他们留恋传统数学,热衷于操作这种落后于时代的老办法,题海战术愈炒愈烈,致使风华正茂的少年天天演解无数的烂题和没有实际价值的人造难题,沉溺题海,成绩低下,苦不堪言.对此严重危害我国向前发展的考试逆流,我们就针锋相对,就创立适合新社会的新的数学教育——智能数学.那么,什么是智能数学?

智能数学是以“数学思想方法”为中心的三步学:

S1 提出问题

S2 探究解题

S3 总结与反思

智能数学对传统数学的变革是:第一,转变学习中心;第二,抓住学习的基本点;第三,改造学习方法,摧毁题海战术.我们将智能数学这三个方面的新思想、新方法概括为:

智能数学 123

1. 一个中心：以数学思想方法为中心开发解题智慧.

2. 两个基本点：

1. 总结基础秘诀，使基础知识系统化、傻瓜化.（简称“基础知识傻瓜化”）

2. 总结解题技术，使解题方法系统化、明确化.（简称“解题方法明确化”）

3. 三步学：学会自我总结，摧毁题海战术

S1 问中学（总结基础知识与解题方法）；

S2 例中学（范例评注）；

S3 做中学与用中学（自我检测）.

智能数学的新理念就是当今国际最大研究课题“问题解决”的新思想、新方法，这是对传统数学在思维领域中的一场深刻革命. 本书将智能数学的新思想、新方法应用于高中数学，使你茅塞顿开，数学解题发生天翻地覆的变化，数学成绩飞速提高. 随之，你这个人也就快乐起来，聪明起来，整个身心洋溢着大智慧！

请注意：“智能数学”不是高深的数学学科，也不是新的数学技术，智能数学是数学教育与数学学习的新思想、新方法，为了简练，我们简称为“智能数学”，它是针对旧数学教育“传统数学”的变革而正名的.

问2 怎样用“智能数学 123”学习高中数学？

解 我们深度地解说“智能数学 123”：

一、智能数学的学习中心是“数学思想方法”：人们普遍认为，问题解决的中心是数学能力. 但是，因为数学能力的中心是数学思想方法，并且“能力”说法有两个弊端：第一，能力过于抽象，难以操作；第二，能力的种种说法是学究式的行话赘语，留于表层，只是空喊口号而已. 所以“以能力为中心”改为“以思想方法为中心”，不仅人人明白，并且可以深入操作，而不要空喊“以能力为中心”的口号了. 到了高中要立即转变学习的中心，将“以基础知识为中心”变革为“以数学思想方法为中心”，开发大脑，使自己聪明起来. 这里，要特别注意：智能数学强调“数学思想方法为中心”，并不是不要基础知识，而是对基础知识的要求更强更透更高！

二、智能数学的两个基本点是基础知识傻瓜化和解题方法明确化。这是智能数学解题的两个法宝。

1. **基础知识傻瓜化**：傻瓜化是连傻子都会用的快捷方式，想错都难，就像傻瓜相机一样。其实，中国人很早就搞傻瓜化，如小学的“九九表”，大学的“积分表”等等。科学家在发明一项专利技术之后，为了大众共享，扩大市场，首要任务就是把他的技术傻瓜化。

进入初中后，老师们忘记了“九九表”式的傻瓜化，多少年来没有人总结初中之后的傻瓜表。本书首次创编初中、高中的傻瓜表，帮你建构少而精、最好用的傻瓜公式、傻瓜法则，将基础知识系统化、傻瓜化。请你特别注意将这些“傻瓜”宝贝收入囊中，它们是高速解题的法宝，是发明新思想、新方法的基础。读过本书之后，希望每个同学都要学会自我总结基础秘诀，发明“傻瓜”。这也是人生学会自我总结、尝试发明的乐趣和良机。

2. **解题方法明确化**：人们普遍认为，“数学思想方法只能是渗透”。但是，本书并不认同这种渗透式，主张数学思想方法明确化和系统化。我们不能模模糊糊地解题，应使解题方法明确化。达到解题方法明确化是艰难的，就开发大脑而言，必须经历两个认识发展过程：第一过程是由“小巧（一题一法）”到“中巧（一法解决一类问题）”，再到“大巧”（精通各种数学思想方法并能快速选用最好解法）；达到“大巧”境界之人就会反过来进入第二过程，运用“大巧”以不变应万变，无招胜有招，高速解题，大巧夺冠。我们要实事求是，尊重科学，“轻巧夺冠”是不可能的！人生需要艰苦奋斗，只有那不畏劳苦，沿着陡峭山路攀登的人，才能达到光辉的顶点！

三、智能数学的学习方法是三步学（自我总结——摧毁题海战术）：

第一步问中学：总结基础知识和解题方法；

第二步例中学：范例评注；

第三步做中学与用中学：自我检测与总结。

这三步学是科学而高效地执行“一个中心和两个基本点”的程序，其要领是学会自我总结，打败题海战术。怎样学会自我总结呢？为此，本书的每一节都设置这三步学习，只要你按照这三步学法学习几节后，自然就学会自我总结了，从而就学会自主学习了。下面深入地评注这三步学习方法。

第一步问中学：解题之前先学习和总结待解问题的相关理论和方法，尽力做到基础傻瓜化和解题方法明确化，然后再解题。切忌盲目解题，解题若不以理论方法为指南，就是盲目的解题，就是盲人骑瞎马，夜半临深池。

怎样学习和总结理论方法呢？“问中学”是学习理论方法的绝招，也叫“带着问题学”。因为问题就是矛盾，就会激起思考，就产生动力，就会兴致勃勃，你就不困倦了，所以“问中

学”是启发式教授法。同时要求：问题必须自我提出，且编成问题系列，问1，问2，……学会提出问题比解决问题更重要。

著名教育家陶行知先生说得好：

发现千千万，起点是一问。

智者问得巧，愚者问得笨。

第二步例中学：初步学习理论方法后，必须紧接着例中学，把理论方法与解题紧密结合起来。对每一理论方法都要做到胸有范例；对每一例题都要进行自我评注，评注什么呢？评注三点：（1）基础知识傻瓜化了吗？（2）解题方法明确化了吗？（3）有没有新发现，新结论，新方法？这样才能深入学会理论方法，完善理论方法，并会有所发现和创新。

英国数学家和物理学家牛顿说得深刻：

在数学里，例子比定律更有用。

第三步做中学与用中学：本书的每一节都设置与问中学例中学相配套的自我检测题。读者要同步地独立地像考试一样地完成检测，然后对照后面的答案和讲解，进行自我评注与总结，使每一节的学习都达到“基础知识傻瓜化”，“解题方法明确化”！

要想提高数学成绩必须做题，于是有的老师和家长就让学生多多做题，甚至类比文学名言“熟读唐诗三百首，不会吟诗也会吟”说：做过习题千千万，不会解题也会算……于是，“题海战术”成为提高数学成绩的法宝。这是形而上学的量变观点，违背了辩证法。事实上，“题海战术”是学习的大敌，无数学生淹没在题海中。

世界著名的问题解决专家舍费尔德（A. Schoenfeld）教授说：

“我希望教给学生25个题，学生就会解决500个题；

不希望教给学生500个题，学生却解不出25个题！”

我们与人挑战的是“看谁解题少，又要成绩好”。面对题海，老师要精选习题，执行“少而精”的教授法；学生要抓紧学习“自我总结”，学会自我总结就能摧毁题海战术。学过本书之后，你将进一步领悟到：人的一生，总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。自我总结是人生走向成功的法宝，是人类进步的阶梯！为什么你每天半夜12点还做不完作业呢？就是因为你没有学会自我总结，无法解决“二百五”老师发来的题海。这里，笔者给你两句警言，你去想一想，做一做吧：

自我总结是打败题海战术的法宝。

自我总结是自主学习的核心。

本书还特别强调独立思考。给你一个独立思考的小技巧：读书前做一个20 cm × 10 cm的硬纸卡，读书时先用硬纸卡盖上问题的解答，自我充分思考并作答后再看解答，再跟上一

个深刻的自我总结.要做到:一步一个深深的脚窝,一个脚窝一支歌.

我们要用智能数学挑战人生,挑战世界,在高中时代要用智能数学挑战高考.智能数学挑战高考应从高一做起!打开这本书,我就把你带入智能数学的乐园.在我们这里,没有滥题,没有题海,没有忧愁,没有绝望.有的是精题范例,有的是傻瓜宝贝,有的是精良的数学思想方法和高端的解题技术.让我们充满快乐,充满信心,共同创造人间的数学奇迹!

智能数学的解题口号是:推理最高!解决最快!表述最简!

本书为中国梦而写,我们希望:

中华少年人人开发大智慧,奋力征服新世界,为复兴中华而奋斗!

齐智华 齐 新 2014 年 1 月

注意:为与数学高考一致,本书选择题都是单选题,即在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.多选题以填空题形式出现.

目 录

CONTENTS

第一章 集合	1
1.1 集合及其表示法	1
[自我检测 1.1](做中学与用中学)	4
1.2 集合之间的关系与运算	6
[自我检测 1.2](做中学与用中学)	12
第二章 常用逻辑(◎提前讲授)	16
2.1 命题与四种命题形式	16
2.2 基本逻辑联结词	20
2.3 充分条件与必要条件	23
[自我检测 2](做中学与用中学)	27
第三章 不等式(◎提前讲授)	30
3.1 不等式的基本性质与基本不等式	30
[自我检测 3.1](做中学与用中学)	35
3.2 不等式的解法	36
[自我检测 3.2](做中学与用中学)	45
第四章 函数	47
4.1 函数及其表示法	47
[自我检测 4.1](做中学与用中学)	56
4.2 函数的单调性和奇偶性	58
[自我检测 4.2](做中学与用中学)	67

第五章 基本函数	69
5.1 一次函数与二次函数	69
[自我检测 5.1](做中学与用中学)	73
5.2 反比例函数与最简分式函数(◎特别讲授)	74
[自我检测 5.2](做中学与用中学)	78
5.3 指数函数与对数函数	79
[自我检测 5.3](做中学与用中学)	85
5.4 幂函数及“幂,指,对”函数综合提高	87
[自我检测 5.4](做中学与用中学)	93
第六章 函数的应用	96
6.1 函数与方程	96
[自我检测 6.1](做中学与用中学)	103
6.2 函数模型及其应用	105
[自我检测 6.2](做中学与用中学)	109
自我检测问题解答	112
[自我检测 1.1]	112
[自我检测 1.2]	114
[自我检测 2]	117
[自我检测 3.1]	119
[自我检测 3.2]	121
[自我检测 4.1]	123
[自我检测 4.2]	127
[自我检测 5.1]	130
[自我检测 5.2]	132
[自我检测 5.3]	134
[自我检测 5.4]	137
[自我检测 6.1]	140
[自我检测 6.2]	145

第一章 集合

1.1 集合及其表示法

[基础秘诀](问中学)

问1 什么是集合? 集合的基本性质有哪些?

解 把一些能够确定的不同的对象的全体称为集合, 简称集. 集合用英语大写字母 $A, B, C, \dots$ 来表示.

集合中的每个对象叫做这个集合的元素, 元素用小写字母 $a, b, c, \dots$ 来表示.

元素与集合的关系是隶属关系: a 属于 A 记作 $a \in A$, a 不属于 B 记作 $a \notin B$.

集合的基本性质:

(1) 集合的元素特性: 确定性; 互异性.

(2) 集合的分类: 有限集; 无限集.

问2 试总结表示集合的方法.

解 我们把集合的一般表示法和特殊集合的表示法概括成一张傻瓜表:

集合的表示法

集合的一般表示法有三法:

(1) 列举法; (2) 描述法; (3) 图示法(维恩图, 坐标系)

特殊集合的表示法:

(1) 区间:

$[a, b], (a, b), [a, b), (a, +\infty), (-\infty, +\infty)$

(2) 常用集合的符号:

$\mathbf{N}, \mathbf{N}^*(\mathbf{N}_+), \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}; \emptyset$

评注 1. 注意集合的元素的一般形式的区别: 例如, 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解集用列举

法表示为 $\{1, 2\}$; 而方程组 $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1 \end{cases}$ 的解集用列举法表示为 $\{(1, 2)\}$.

又例如, 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解集用描述法表示为 $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$; 而抛物线 $y = x^2 - 3x + 2$ 上的点集用描述法表示为 $\{(x, y) \mid y = x^2 - 3x + 2\}$.

2. 特殊集合的表示法有区间, 它表示某些实数的集合. “区间”又简洁又直观, 一定要提前学习和尽量使用.

试用描述法写出下列区间的定义, 并指出区间的读法和图示法:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}; \quad (a, b) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad [a, b) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(-\infty, a] = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (a, +\infty) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (-\infty, +\infty) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

[范例评注](例中学)

例 1 试用列举法表示下列集合:

$$(1) A = \{x \mid x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) B = \{x \mid y = \frac{8}{4-x}, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Z}\} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) C = \{(x, y) \mid x + y = 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 (1) 分类列举: 当 $ab < 0$ 时, $x = 0$; 当 $a > 0$, 且 $b > 0$ 时, $x = 2$; 当 $a < 0$, 且 $b < 0$ 时, $x = -2$.

所以 $A = \{0, 2, -2\}$.

(2) 按 $x \in \mathbf{N}$ 使 $y \in \mathbf{Z}$ 求 x , 穷举, 得 $B = \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 12\}$.

(3) 按 $x \in \mathbf{N}$, 且 $y \in \mathbf{N}$ 穷举, 得

$$C = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)\}.$$

评注在(2)(3)两小题中注意代表元素是什么?

例 2 试用描述法表示下列集合:

$$(1) \{\text{奇数}\} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \{\text{偶数}\} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \{\text{被 7 除余 1 的整数}\} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{3}{8}, \frac{7}{18} \right\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 (1) $\{\text{奇数}\} = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\};$

(2) $\{\text{偶数}\} = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{Z}\};$

$$(3) \{x \mid x = 7n + 1, n \in \mathbf{Z}\};$$

$$(4) \left\{ \frac{n-2}{2n} \mid 4 \leq n \leq 9, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

例 3 下列集合中,表示空集的是()

A. $\{0\}$

B. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$

C. $\{x \mid 2x^2 + 3x - 2 = 0, x \in \mathbf{N}\}$

D. $\{y \mid y = \sqrt{2x - x^2 - 1}, x \in \mathbf{R}\}$

解法 1 (秒杀) 第一眼看到选项 C 是空集,因为方程 $2x^2 + 3x - 2 = 0$ 的根是 $-2, \frac{1}{2}$ 均

不属于 $\mathbf{N}$, 故选 C. 本题秒杀完毕!

解法 2 (排除非空集合) A. $\{0\}$; B. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$;

D. $\{y \mid y = \sqrt{-(x-1)^2}, x \in \mathbf{R}\} = \{0\}$; 这样, A, B, D 均非空, 故选 C.

例 4 已知集合 $A = \{x, x^2, xy\} = \{x, y, 1\} (x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R})$, 求集合 A.

解 因为 $\{x, x^2, xy\} = \{x, y, 1\}$,

所以有两种情况: (1) $\begin{cases} x^2 = y \\ xy = 1 \end{cases}$ 或 (2) $\begin{cases} x^2 = 1 \\ xy = y \end{cases}$.

由 $A = \{x, y, 1\} \Rightarrow x \neq 1, y \neq 1$ 所以 (1) 无解; (2) 有解 $x = -1, y = 0$.

故 $A = \{-1, 0, 1\}$

评注 解法中的难点是快速分类: 分为 (1) 和 (2) 两种情况.

例 5 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 - 4x + 4 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值并求出这个元素;

(2) 若 A 中有两个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 若 $A = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

解 (1) A 中只有一个元素, 有两种情况:

(i) 当 $a = 0$ 时, A 中只有一个元素 $x = 1$;

(ii) 当 $a \neq 0$ 时, A 中只有一个元素 $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a = 1$, 这时只有一个元素 $x = 2$.

(2) A 中有两个元素 $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$, 解得 a 的取值范围是 $\{a \mid a < 1, \text{且 } a \neq 0\}$.

(3) $A = \emptyset \Leftrightarrow \Delta < 0$, 解得 a 的取值范围是 $\{a \mid a > 1\}$.

评注 本题的难点是科学分类:先按 $a = 0, a \neq 0$ 将方程 $ax^2 - 4x + 4 = 0$ 分为一次和二次;再对二次方程按判别式 Δ 分类.

下面立即进行[自我检测]了.

编者寄语:本书[自我检测]与传统做法迥然不同,每卷测试两类问题:(一)理论测试,(二)习题测试.本书把基础知识与解题方法的理论测试放在首位,其次才是习题测试.传统做法几乎都是“题海战术”:做题,做题,再做题,老师讲解和布置的都是习题,从来不测试理论方法.解题若不以理论方法为指南,就是盲目的解题.在此忠告读者:解题之前首先要总结理论和方法,尽力做到基础知识傻瓜化和解题方法明确化,然后再解题,否则便沉溺题海!

[自我检测 1.1](做中学与用中学)

(一) 理论测试:背着作答基础秘诀与数学方法的问题.

问 1 默写傻瓜表“集合的表示法”.

问 2 为什么提前学习区间和尽量使用区间?

(二) 习题测试:

1 已知 $M = \{x \mid x^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1, \text{且 } y = 0, x, y \in \mathbf{R}\}$, 用列举法表示 M, N , 正确的是()

A. $M = \{1, -1\}, N = \{-1, 1\}$

B. $M = \{(1, -1)\}, N = \{(1, -1)\}$

C. $M = \{1, -1\}, N = \{(-1, 1)\}$

D. $M = \{1, -1\}, N = \{(1, 0), (-1, 0)\}$

2 (湖北) 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P + Q = \{a + b \mid a \in P, b \in Q\}$.

若 $P = \{0, 2, 5\}, Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P + Q$ 中元素的个数是()

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

3 (全国) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a + b, a\} = \left\{0, \frac{b}{a}, b\right\}$, 则 $b - a =$ ()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

4 集合 $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 + 4 = xy + 3y + 2z, x, y, z \in \mathbf{R}\}$ 含有元素的个数为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 无数

5 把下列集合用另一种方法表示出来:

(1) $\{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\} =$ _____;

(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}\right\} =$ _____;

(3) $\{\text{直角坐标平面内, 不在二、四象限内的点}\} =$ _____.

6 用列举法表示下列集合:

(1) $\left\{x \mid \frac{9}{9-x} \in \mathbf{N}\right\} =$ _____;

(2) $\{x \mid y = 6 - x^2, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\} =$ _____;

(3) $\{y \mid y = 6 - x^2, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\} =$ _____;

(4) $\{(x, y) \mid y = 6 - x^2, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\} =$ _____.

7 若 $x \in \{1, 2, x^2\}$, 则实数 x 的取值集合是_____.

8 设集合 $A = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $B = \{|a + 3|, 2\}$, 已知 $5 \in A$, 且 $5 \notin B$, 求 a 的值.

数学家的故事

学生问:是整数多,还是奇数多?是实数多,还是正数多?

康托用一一对应的方法巧妙地解决了这个问题:整数和奇数一样多,实数和正数一样多.并且进而创立了集合论.

康托(G. Cantor, 1845—1918), 德国数学家, 集合论创始人. 22岁获得柏林大学博士学位. 人生坎坷, 在28~39岁, 由于他发现了关于无穷集合度量问题的新思想方法, 遭到他的老师克罗内克(柏林传统数学学派领袖)的恶意攻击, 致使康托患了精神分裂症, 但他在逆境中不屈不挠, 继续探索, 捍卫真理. 7年后, 反动权威克罗内克去世, 康托获得解放, 被当时众多数学家推崇为新数学王国的创始人和领袖. 大数学家希尔伯特热烈赞美康托的业绩, 大声疾呼:“没有任何力量, 能把我们从康托创造的伊甸乐园中赶走!”

1.2 集合之间的关系与运算

[基础秘诀](问中学)

问1 试把元素与集合,集合与集合的关系总结成一张傻瓜表.

解 元素与集合的关系是属于或不属于,集合与集合的关系是包含或相等,不要混淆.这些关系可概括成下面的傻瓜表:

集合基本关系表

(1) 元素与集合的关系: $a \in A; b \notin A$

(2) 集合与集合的关系:

子集: $A \subseteq B \Leftrightarrow$ “任意 $x \in A \Rightarrow x \in B$ ” ($\emptyset \subseteq A$)

真子集: $A \subsetneq B \Leftrightarrow$ “ $A \subseteq B$, 且 B 中至少有一个元素 $x \notin A$ ”

相等: $A = B \Leftrightarrow$ “ $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$ ”

(3) 设 $\text{card}(A) = n$, 则 A 的子集数目为 2^n 个

评注 元素与集合,集合与集合的关系的区别要落实到集合语言符号上,主要有两点:

(1) $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别; (2) $\subseteq$ 与 $\subsetneq$ 的区别.

例1 设集合 $M = \{x \mid x \leq \sqrt{21}\}$, $a = 2\sqrt{5}$, 则下面表述正确的序号是_____.

① $a \notin M$

② $\{a\} \in M$

③ $\{a\} \subseteq M$

④ $(-\infty, a] \subsetneq M$

答 应填 ③④.

例2 设 $\text{card}(A) = n$, 则 A 的子集数目为_____, A 的真子集数目为_____.

(这里 $\text{card}(A) = n$ 表示集合 A 中的元素个数为 n .)

解 (归纳猜想) 当 $n = 1$ 时, $A = \{a_1\}$ 的子集有: $\emptyset, \{a_1\}$. 所以 A 的子集数目为 2^1 .

当 $n = 2$ 时, $A = \{a_1, a_2\}$ 的子集有:

$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$. 所以 A 的子集数目为 2^2 .

当 $n = 3$ 时, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的子集有:

$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}$

所以 A 的子集数目为 2^3 .