精　讲

gaozhong shuxue jingjiang

高中数学精讲

立体几何

江苏教育出版社

高中数学精讲

立体几何

（一年级用）

杨浩清　编著

江苏教育出版社

高中数学精讲·立体几何

（一年级用）

杨浩清　编著

责任编辑　喻　纬

出版发行:江　苏　教　育　出　版　社
(中央路 165 号,邮政编码:210009)
照　　排:南京理工大学激光照排公司
经　　销:江　苏　省　新　华　书　店
印　　刷:常　熟　市　印　刷　二　厂
(常熟市大义镇义虞路 5 号,邮政编码:215557)

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 8.25　字数 179,000
1997 年 1 月第 2 版　1997 年 11 月第 2 次印刷
印数 507,751－552,780 册

ISBN 7—5343—1307—4

G·1159　　定价:6.80 元

敬告读者

《高中数学精讲》是江苏教育出版社奉献给全国广大读者的一套高中数学学习辅导读物.《高中数学精讲》的第一批5种自1991年出版之后，很快便受到读者们的喜爱，它们不但被广大高中学生视为“家庭教师”，也被高中数学教师当作案头常备的教学参考书.1994年10月，《高中数学精讲》(5种)被中国书刊发行业协会评选为“全国优秀畅销书”.1996年，《高中数学精讲》又增加了配合综合复习的两个新品种——《专题讲座》和《解题方法》.

这套书的作者中，有特级教师7人：周学祁(通州市教育局教研室)，杨浩清(常州高级中学)，仇炳生(南京师范大学附属中学)，张连昌(金坛市华罗庚中学)，周祥昌(无锡市第一中学)，张乃达(扬州中学)，汤希龙(扬州大学师范学院附属中学). 长期以来一直关心中学数学教育的微分几何专家蒋声教授(扬州大学师范学院)，也应邀编写《解题方法》一书，参加《高中数学精讲》的作者队伍，进一步提高了这套书的品位. 这套书不但力图体现一批多年从事高中数学教学的特级教师的教学水平，而且传递了作者们在实现高中数学教学向“素质教育”转变方面的最新探索的成功经验.

这套书中的《代数上册》、《立体几何》、《代数下册》和《平面解析几何》，分别与现行的四册高中数学教材配套编写，系浓缩作者新授课的教学精华而成，可供读者在教学中同步使用. 各册内容的安排及章节的划分，与课本基本一致. 各小节的内容讲解部分，不求面面俱到，而着力于剖析教材的重点、

难点和关键，例题的解答与分析也力求将“三基”(基础知识、基本技能技巧和基本思想方法)的教学与解题训练融为一体，各册中配备的练习题、习题、复习题，由易到难循序渐进，举一反三以少胜多.《思路方法》、《专题讲座》和《解题方法》，既可供一、二年级时配合新授课教学使用，也可供三年级高考复习时使用.《思路方法》及时介绍与整理了新授课过程中出现的数学思想方法，并进一步作了分类、总结.《专题讲座》根据高考要求，将重点教学内容作了梳理和适度的补充与提高.《解题方法》则侧重于帮助读者将学过的种种解题方法融会贯通，切实掌握快速找到正确解题思路的方法与技巧.

《高中数学精讲》可供高中学生，自学高中数学者，中学数学教师、教研员、高中数学家庭教师，师范院校数学系师生阅读使用.

《高中数学精讲》面世五年而常销不衰，是与不停地采用“滚动式修订”从而保证“常出常新”分不开的.每次重印，作者都及时修订，力求消灭错误.每逢高中数学教学内容或高考要求有所调整，都及时组织作者改写有关内容，以确保《高中数学精讲》丛书始终保持与高中数学教学内容配套.每隔一段时间，都组织作者全面修订，撰写新版书稿，新版书稿在保持原有特色的同时，系统地融入高中数学教学与高考复习中的新鲜经验，并将例题、习题大幅度地更换成新题.我们希望，崭新的《高中数学精讲》(7 种)能更加切合全国广大读者的需要.

尽管如此，书中的不足之处仍然在所难免，欢迎读者们提出批评、建议，以便随时作进一步的修订.

江苏教育出版社

1997 年 12 月

目　录

第一章　直线和平面

第二章　多面体和旋转体

第一章　直线和平面

立体几何比平面几何增加了一个元素：平面.由于平面的引入，增加了几何元素之间的许多关系，如点与平面，直线与平面，平面与平面的位置关系等；并且平面几何中研究过的两条直线的位置关系在空间也必须重新认识.本章的主要内容是研究上述的这些位置关系.在位置关系中，平行与垂直关系的判定和性质是研究的中心问题，而有关的角与距离则是进行位置关系定量研究的主要课题.结合空间想象的推理能力的训练贯串于全章的始终.

一　平　　面

1.1　平面的概念

平面是几何中最基本的概念之一，在数学中，对这一类概念是不加以定义而只进行描述的.为正确地掌握平面的概念，我们先考虑下列问题：

(1) 铺得很平的一张白纸是一个平面吗？您见到过平面没有？

(2) 一个平面的面积可以等于 $100cm^2$ 吗？

(3) 通常 200 页的书要比 20 页的书厚一些，那么 200 个平面重合在一起时是否要比 20 个平面重合在一起厚一些呢？

(4) “平面是矩形或平行四边形形状的.”您认为这种说

法对吗？您认为平面是什么形状的？

(5) 对于用图 1-1 表示直线 a 在平面 α 内，有人说画得不对，应当延展平面 α，使图中的直线 a 在平行四边形的内部. 您认为这种说法对吗？

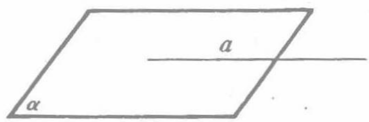

图 1-1

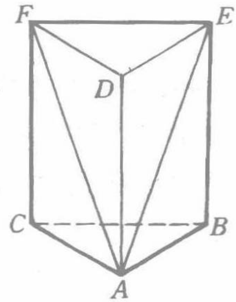

图 1-2

(6) 图 1-2 所示的平面 AEF 与平面 ABC 只有一个公共点 A 吗？为什么？

您能正确地回答上面各个问题吗？

几何中的平面与点、直线一样，是一个抽象的概念，谁也看不见、摸不着它. 日常生活中光滑的桌面、平静的水面、铺平了的纸张等虽然给我们平面的形象，但它们并不就是立体几何中的平面. 作为几何概念的平面已经不再具有平面形象物体的一切具体属性，不计厚薄，不计质量，没有任何物理的或化学的属性. 当两个平面重合时就形成一个平面，不存在什么"平面变厚了"的问题.

平面是无限延展着的. 这是平面最本质的一个属性，也是我们正确理解平面概念的关键. 通常把平面画成平行四边形（有时也根据需要画成三角形或其他平面图形），这仅是用所画的图形表示一个无限延展的平面的位置，并不意味着平面就是平行四边形（或其他形状的平面图形）. 平面没有边界，也

无所谓面积. 不能把平面与具体的平面图形混同起来.

平面本来就是无限延展着的,无需再延展平面."延展平面 α"与"延长直线 a"的说法都是错误的. 图 1-1 固然画得不对,但说"延展平面 α"也是不对的. 正因为平面是无限延展的,所以当两个平面有一个公共点时,它们就必然要相交于经过这一点的一条直线. 如果我们想象图 1-2 中是一片锋利的刀片 AEF 搁在$\triangle ABC$ 确定的纸片上,刀片顺着 AEF 向下滑动时,必定在纸片上划出一条经过 A 点的直线口子来,这样就不难理解两个平面不可能仅有一个公共点了.

在以后的学习中,只要看到表示平面的图形、符号或文字,我们就应当立即联想到"平面是无限延展着的".

1.2 平面的基本性质

1. 什么叫"直线在平面内"?

如果直线上所有的点都在某一个平面内,那么就称这条直线在这个平面内. 但是直线上有无数个点,怎样才能判定一条直线在某一个平面内呢?实践告诉我们,一根笔直的木条用两个钉子就能钉在平的墙面上,因此只要直线上有两个点在一个平面内时,这条直线上所有的点就都在这个平面内了,从而这条直线就在这个平面内. 这是公理 1 给出的平面的第一个基本性质.

公理 1 是判定直线在平面内的依据,用集合符号表示为:

$$\left.\begin{array}{l}A\in l, A\in\alpha\\B\in l, B\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l\subset\alpha.$$

以"直线在平面内"的意义为根据,我们常用下面的推理判定"点在平面内":

$$A\in l,\ l\subset\alpha\Rightarrow A\in\alpha.$$

简言之：点在线上，线在面内，则点在面内.

2. 什么叫“两个平面相交”？

如果两个平面 α 和 β 有一条公共直线 a，那么就称平面 α 和平面 β 相交，交线是直线 a. 用集合符号表示为：

$$a\subset\alpha,\ a\subset\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=a.$$

要判定两个平面相交，如果找到两个平面的一个公共点，根据平面的无限延展性，那么这两个平面就有一条并且只有一条通过这个点的公共直线，即两个平面相交于通过这一点的一条直线. 这是公理 2 给出的平面的第二个基本性质.

公理 2 是判定两个平面相交的依据，用集合符号表示为：

$$A\in\alpha,\ A\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=a,\text{且 }A\in a.$$

进而，不难知道

$$\left.\begin{array}{l}A\in\alpha,\ A\in\beta\\ B\in\alpha,\ B\in\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB.$$

即，如果两个平面有两个公共点，那么这两个平面相交于由这两点确定的一条直线.

以“两个平面相交”的意义为根据，常用下面的推理判定“点在直线上”：

$$A\in\alpha,\ A\in\beta,\text{且 }\alpha\cap\beta=a\Rightarrow A\in a.$$

即，分别在两个相交平面内的点一定在相交平面的交线上.

3. 什么叫“确定一个平面”？

“确定一个平面”指的是“有一个平面，且只有一个平面”，即平面是存在的，并且也是唯一的. 在数学中，“确定”与“有且只有”是同义词.

在空间如何来确定一个平面呢？作为平面第三个基本性质的公理 3 及其三个推论给出了确定一个平面的方法.

为正确理解和牢固掌握确定一个平面的方法，请对下列

命题的真假作出正确的判断，并说明理由：

(1) 三点确定一个平面；

(2) 一条直线和一点确定一个平面；

(3) 两条直线确定一个平面；

(4) 三角形和梯形一定是平面图形；

(5) 顺次首尾相接的四条线段一定在一个平面内.

判定命题为真必须进行推理论证；判定命题为假只需举出反例. 上述命题(1),(2),(3),(5)都是假命题. 您能举出具体的反例来说明吗？

确定平面是我们以后将空间图形问题转化为平面图形问题来解决的重要前提. 公理 3 及其三个推论也是证明两个平面重合的依据. 例如利用公理 3 证明两个平面重合的推理是：

$$\left.\begin{array}{l} A,B,C\in\alpha \\ A,B,C\in\beta \\ A,B,C\text{ 不共线} \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\text{ 与 }\beta\text{ 重合.}$$

练　习

1. 用集合符号看图填空：

(1) 如图 1-3，A ____ m，A ____ α，B ____ l，B ____ α，l ____ α，m ____ $\alpha=$ ____.

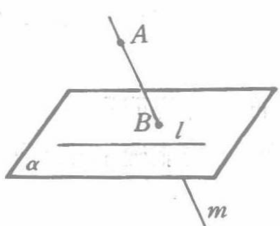

图 1-3

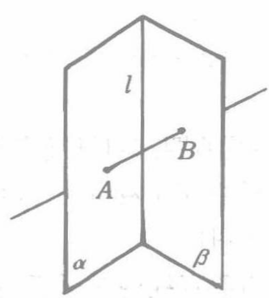

图 1-4

(2) 如图 1-4,A ____ α,A ____ β,A ____ l,α ____ $\beta=$ ____,
AB ____ $\beta=$ ____.

2. 画图表示下列由集合符号给出的关系：

(1) $A\in\alpha$, $B\notin\alpha$, $A\in l$, $B\in l$.

(2) $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a/\!/c$, $b\cap c=P$, $\alpha\cap\beta=c$.

3. 如图 1-5,D,E 分别是$\triangle ABC$ 的边 AC,BC 上的点,平面 α 经过 D,E 两点,求直线 AB 和平面 α 的交点.

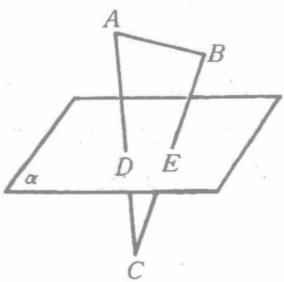

图 1-5

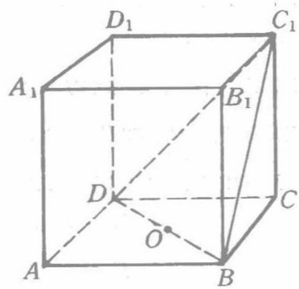

图 1-6

4. 如图 1-6,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,O 是正方形 $ABCD$ 的中心.

(1) 求 AA_1 与 CC_1 确定的平面与 B,D,C_1 确定的平面的交线；

(2) 求证:A_1C 与 B,D,C_1 确定的平面的交点 M 在 C_1O 上.

5. 不共面的四点可以确定几个平面？并说明理由.

6. (1) 三条直线两两平行但不共面,它们能确定几个平面？画出图形.

(2) 四条直线两两平行,若其中任意三条不共面,它们可以确定几个平面？

7. 共点的三条直线可以确定几个平面？

共点的四条直线可以确定几个平面？

1.3 共面问题

学习了作为进一步推理基础的平面的三个基本性质以后，首先遇到的是证明空间的点和直线共面的问题，也即证明空间的若干个点和若干条直线都在同一个平面内的问题.

共面问题的常用证法有：(1) 根据公理 3 及其推论，如果给定的点和直线符合确定平面的条件之一，则它们共面；

(2) 先由给定的点和直线中的某些元素确定一个平面，然后证明其余的元素都在这个平面内；

(3) 在给定的点和直线中，指出其中的某些元素在一个平面内，其余的元素在另一个平面内，然后证明这两个平面重合.

证明共面问题常常需要证明“直线在平面内”和“点在平面内”.

证明“直线在平面内”的推理有：

(1) $A\in\alpha,\ B\in\alpha\Rightarrow AB\subset\alpha$.（公理 1）

(2) $\left.\begin{array}{l}A\in\alpha,\ a\subset\alpha,\ A\notin a\\ A\in b,\ b\parallel a\end{array}\right\}\Rightarrow b\subset\alpha.$

即：经过已知直线外一点的已知直线的平行线在由已知直线和直线外这一点所确定的平面内.（平行线的定义及公理 3 的推论 3）

证明“点在平面内”的推理为：

$$A\in a, a\subset\alpha\Rightarrow A\in\alpha.$$

例 直线 $a\parallel b\parallel c$，直线 l 和 a,b,c 分别相交于点 A,B,C（如图 1-7），求证：四条直线 a,b,c,l 共面.

证明 $\because$ $a /\!/ b$,

$\therefore$ a,b 确定一个平面 α.

$\because$ $A \in a$, $B \in b$,

$\therefore$ $A \in \alpha$, $B \in \alpha$.

又 $A \in l$, $B \in l$, $\therefore$ $l \subset \alpha$.

$\because$ $C \in l$, $\therefore$ $C \in \alpha$ 且 $C \notin a$.

$\therefore$ 平面 α 也是直线 a 和点 C 确定的平面.

$\because$ $a /\!/ c$, $\therefore$ 直线 a,c 确定一个平面 β.

$\because$ 点 $C \in c$, $c \subset \beta$, $\therefore$ $C \in \beta$, 即平面 β 也是直线 a 和点 C 确定的平面.

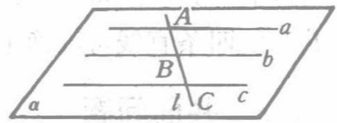

图 1-7

根据公理 3 的推论 1,平面 α 和平面 β 重合. 因此 $c \subset \alpha$, 从而 a,b,c,l 在同一个平面 α 内.

进而,我们可以证明命题:与同一条直线相交的所有平行线都在同一个平面内.

分析 与同一条直线相交的所有平行线有无数多条,如何证明无数多条直线在同一个平面内呢?

设和所有平行线都相交的直线为 l,直线 a 是这无数条平行线中的一条,且 $a \cap l = A$,那么直线 a 和 l 确定一个平面 α.

设 b 是与 l 相交且平行于 a 的任一直线,那么只需要证明直线 b 在平面 α 内就可以了.

这种用“任一”代表“无数”进行证明的思想方法是我们应当切实掌握的.

练 习

1. 判断下列命题的真假,对真命题给出证明,对假命题举出反例:

(1) 若四条直线中任何两条都在一个平面内,则这四条直

线共面.

(2) 若五条直线中任何三条都在一个平面内，则这五条直线共面.

2. 证明：两两相交且不过同一点的四条直线共面.（写出已知、求证和证明）

3. 如图 1-8，设 E,F,G,H,K,P 分别为正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 所在各棱上的中点.

求证：E,F,G,H,K,P 六点共面.

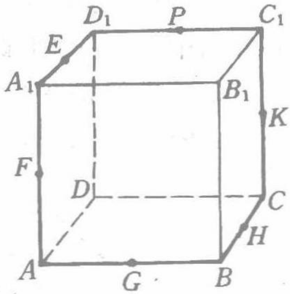

图 1-8

1.4 画图技能训练

1. 平面的画法

在立体几何中，我们通常画平行四边形来表示平面. 这里所谓“通常”是指“并不一定”的意思，有时根据不同的需要，也用三角形、梯形、圆等平面图形表示平面.

(1) 当平面水平放置时，通常把平面用图 1-9 的平行四边形表示，而图1-10则表示平面的一种铅垂放置情形. 它们

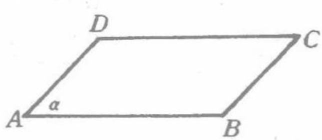

图 1-9

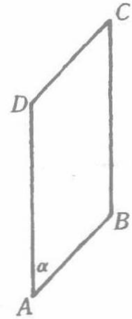

图 1-10