

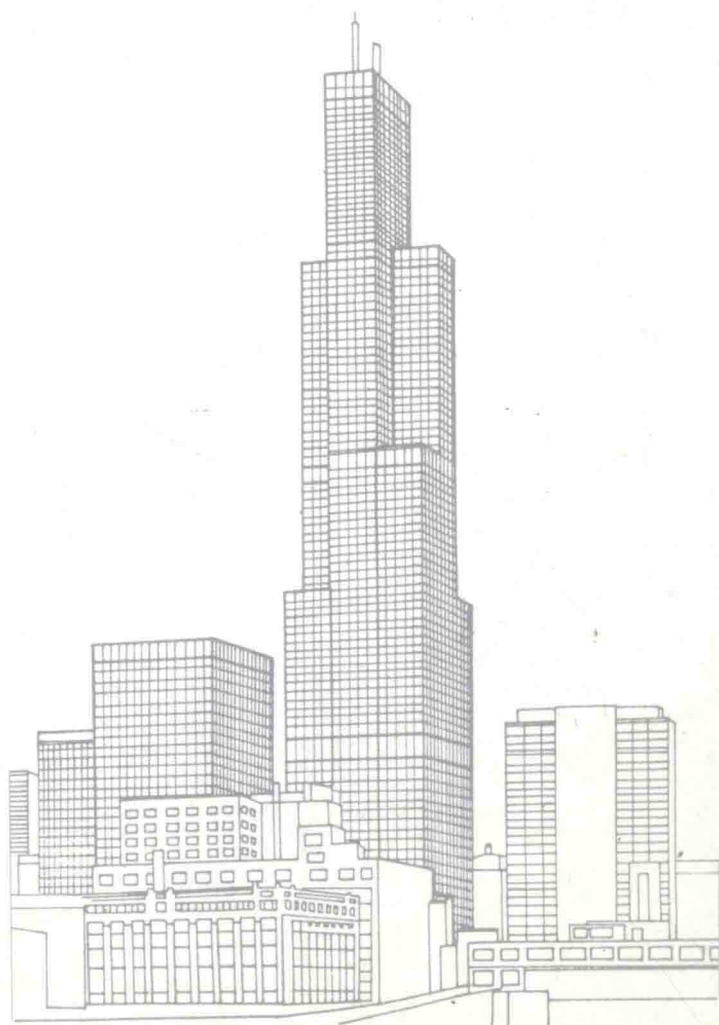
普通高等学校土木工程专业新编系列教材
中国土木工程学会教育工作委员会 审订

弹性力学及有限元

(第2版)

T X L X J Y X Y

赵均海 汪梦甫 主编



WUTP

武汉理工大学出版社

普通高等学校土木工程专业新编系列教材
中国土木工程学会教育工作委员会 审订

弹性力学及有限元

(第2版)

赵均海 汪梦甫 主 编

武汉理工大学出版社

【内容提要】

本书为普通高等学校土木工程专业新编系列教材之一,分弹性力学和有限元两篇,共 11 章,内容有绪论、应力和应变、弹性力学平面问题的解法及一般定理、用直角坐标解平面问题、用极坐标解平面问题、空间问题的解答、薄板弯曲问题、能量原理与变分法、平面问题的有限元法、弹性力学平面问题的高精度单元、空间问题的有限元法、板壳问题的有限元法及附录。

本书可作为普通高等学校土木工程专业教材,也可供土建类其他专业作为弹性力学和有限元的参考教材,还可用于土建工程技术人员参考。

【主编简介】

赵均海 男,工学博士,长安大学副校长,教授,博士生导师,政府特殊津贴获得者。主要从事固体力学、结构工程、生物力学、古建筑结构性能等的教学和研究工作。曾主持和参加的科研项目有国家自然科学基金、陕西省自然科学基金等 10 多项。已在国内外科技期刊、学术会议上发表论文 150 余篇,有 2 篇被美国科学索引(SCI)收录,有 30 多篇被美国工程索引(EI)收录,10 多篇被国际会议论文索引(ISTP)收录,20 余篇被《力学文摘》收录。出版专著 3 部,出版教材 4 部。曾获陕西省科学技术奖二等奖、陕西省高等学校优秀科学研究成果一等奖等 6 项,省级精品课程 1 门。主要学术兼职为:中国力学学会生物力学专业委员会委员、高等学校力学类专业教学指导分委员会委员、陕西省力学学会副理事长、陕西省土木建筑学会青年委员会副主任、陕西省生物医学工程学会理事。

E-mail:zhaojh@chd.edu.cn

汪梦甫 男,湖南大学教授,博士,香港大学高级访问学者。主持完成国家计委资助项目、教育部博士点基金项目、“九五”科技攻关项目、湖南省自然科学基金项目 6 项,主持完成各种横向课题 7 项。在国内外重要学术刊物发表论文 60 余篇,出版学术专著 2 部,获省部级科技成果奖 5 项。

E-mail:mfwang@hnu.net.cn

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学及有限元/赵均海,汪梦甫主编.—2 版.—武汉:武汉理工大学出版社,2008.5

ISBN 978-7-5629-2717-4

I. 弹… II. ① 赵… ② 汪… III. ① 弹性力学-高等学校-教材 ② 有限元法-高等学校-教材
IV. 0343 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 065404 号

出版发行:武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞珈路 122 号 邮政编码:430070)

<http://www.techbook.com.cn>(理工图书网)

印刷者:武汉理工大印刷厂

经销者:各地新华书店

开本:880×1230 1/16

印张:15.25

字数:505 千字

版次:2003 年 8 月第 1 版 2008 年 5 月第 2 版

印次:2008 年 5 月第 1 次印刷 总第 5 次印刷

印数:11001~14000 册

定价:26.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。

本社购书热线电话:(027)87394412 87397097 87383695

普通高等学校土木工程专业新编系列教材

编 审 委 员 会

顾 问:成文山 滕智明 罗福午 魏明钟 李少甫

甘绍熺 施楚贤 白绍良 彭少民 范令惠

主 任:江见鲸 吕西林 高鸣涵

副主任:朱宏亮 辛克贵 袁海庆 吴培明 李世蓉

苏三庆 刘立新 赵明华 孙成林

委 员:(按姓氏笔画顺序排列)

于书翰 丰定国 毛鹤琴 甘绍熺 白绍良

白晓红 包世华 田道全 成文山 江见鲸

吕西林 刘立新 刘长滨 刘永坚 刘伟庆

朱宏亮 朱彦鹏 孙家齐 孙成林 过静君

李少甫 李世蓉 李必瑜 吴培明 吴炎海

辛克贵 苏三庆 何铭新 汤康民 陈志源

罗福午 周 云 赵明华 赵均海 尚守平

施楚贤 柳炳康 姚甫昌 胡敏良 俞 晓

桂国庆 顾敏煜 徐茂波 袁海庆 高鸣涵

蒋沧如 谢用九 彭少民 覃仁辉 蔡德明

燕柳斌 魏明钟

总责任编辑:刘永坚 田道全

秘 书 长:蔡德明

出版说明

1998年教育部颁布了高等学校本科专业的新专业目录后,1999年全国的高等学校都开始按照新专业目录招生。为解决土木工程专业教材缺乏的燃眉之急,武汉理工大学出版社(原武汉工业大学出版社)于2000年年初率先组织编写了这套“普通高等学校土木工程专业新编系列教材”。经中国土木工程学会教育工作委员会审订并向全国高校推荐,三年来,本套教材已为众多院校选用,并受到了普遍欢迎。其中多种教材荣获教育部全国高等学校优秀教材奖或优秀畅销书奖。截至2002年年底,系列教材中单本销量最高的已接近7万册。这充分说明了系列教材编审委员会关于教材的定位、特色和编写宗旨符合新专业的教学要求,满足了新专业的教学急需。

正如初版的出版说明中所说,本套教材是新专业目录颁布实施后的第一套土木工程专业系列教材,因此,尽管我们的编审者、编辑出版者夙兴夜寐、尽心竭力,不敢稍有懈怠,它仍然还会存在缺点和不足。首先是教材中涉及的各种国家规范问题。教材编写时正值各种规范全面修订,尚未定稿,新规范正式颁布的时间还不能确定,而专业教学对新教材需求的紧迫又使编写、出版工作不能等待,因此系列教材中很多涉及到规范的地方只能按照当时基本定稿的新规范内容进行讲解或说明。当各种新的国家规范陆续正式颁布后,本套教材中相关的部分就已按照新规范及时编写了修订稿,准备作为第2版出版。其次,2002年10月,高等学校土木工程专业指导委员会编制的本科教育培养目标、培养方案及课程教学大纲正式公布,各门课程教材的修订有了更明确的方向。第三,初版教材在各院校使用过程中,师生们根据教学实践提出了很多中肯的意见,我们虽然在每本教材重印时进行了局部的修改,但仍感到存在一些问题,需要做较大的修订。因此,系列教材编审委员会决定全面修订、出版全套教材的第2版。根据土木工程专业的教学需求,本套系列教材还将增补13种,也与第2版教材同时推出。教材的编审委员会委员也相应地进行了增补和调整。

第2版教材的修订及增补教材的编写仍然秉承编审委员会一贯的宗旨,把教材的质量放在第一位,力求更好地满足课程教学的需要。我们更希望使用教材的师生一如既往,继续关心本套教材,及时反馈各校专业建设和教学改革的信息和要求,多提意见和建议,以便我们及时修订,不断完善和提高,把教材打造成名副其实的精品。

武汉理工大学出版社

2003.2

第 2 版前言

本教材第 1 版是根据土木工程本科专业教学指导委员会制定的“弹性力学”和“有限单元法”课程的教学大纲编写的。在近 5 年的使用中,一些热心的同行和读者对本书提出了宝贵的意见和建议,我们表示衷心的感谢。使用中我们也发现了一些错误和不妥之处,为了不断完善和提高教材质量,结合大家提出的意见和建议对本教材进行了修订。

本次修订的主要内容有:对本书第 1 版文字和图形中存在的一些错误或疏漏进行了纠正;将原书第 9 章中的 $s-t$ 坐标改成通用的 $\xi-\eta$ 坐标;改正了源程序中的个别不确切的编排格式;部分章节增加了一些习题。

本书第 2 版编写工作仍由原作者完成,其中绪论和第 4 章由赵均海编写,第 1、2、3 章由王敏强编写,第 5、6、7 章由王晓春编写,第 8、9 章及附录由马石城编写,第 10、11 章由汪梦甫编写,全书由赵均海修改定稿。

长安大学吕永新、华东交通大学童谷生、浙江科技学院王吉民、南昌大学彭南陵等对本书第 2 版的编写工作提出了宝贵意见,在此表示诚挚的谢意!

由于作者水平有限,第 2 版难免还有错漏与不妥之处,恳请各位同行和广大读者继续提出宝贵意见,以便进一步修改完善。

编 者

2008 年 4 月

第 1 版前言

本教材是为了适应我国高等学校本科土木工程专业教学的发展和变化,根据土木工程本科专业“弹性力学”和“有限单元法”课程的教学大纲编写的。内容包括绪论、应力和应变、弹性力学平面问题的解法及一般定理、用直角坐标解平面问题、用极坐标解平面问题、空间问题的解答、薄板弯曲问题、能量原理与变分法、平面问题的有限元法、弹性力学平面问题的高精度单元、空间问题的有限元法、板壳问题的有限元法及附录等。章节中包括了典型的例题,而且各章均有提要、小结、思考题和习题,供学生和老师使用。

本书为普通高等学校土木工程专业新编系列教材之一,由普通高等学校土木工程专业新编系列教材编审委员会组织撰稿。由赵均海、汪梦甫担任主编,其中绪论和第 4 章由赵均海编写,第 1、2、3 章由王敏强编写,第 5、6、7 章由王晓春编写,第 8、9 章及附录由马石城编写,第 10、11 章由汪梦甫编写,全书由赵均海修改定稿。

本书计划讲授 64 学时,各校可根据实际情况取舍。其学时分配建议如下:

参考学时数

章节	学时数	理论教学	实践教学
0	2	2	
1	4	4	
2	6	6	
3	4	4	
4	6	6	
5	6	6	
6	4	4	
7	4	4	
8	8	6	2
9	8	6	2
10	6	6	
11	6	4	2

本书可作为普通高等学校土木工程专业的教材,也可供土建类其他专业作为弹性力学和有限元的参考教材,还可用于土建工程技术人员参考。

在本书的编写过程中,参考了许多同行专家的成果,我们向这些专家表示诚挚的谢意。

由于时间仓促,水平有限,书中难免有不妥之处,恳请各位同行和广大读者在使用后提出意见,以便进行修改完善。

编 者
2003 年 2 月

第 2 版前言

本教材第 1 版是根据土木工程本科专业教学指导委员会制定的“弹性力学”和“有限单元法”课程的教学大纲编写的。在近 5 年的使用中,一些热心的同行和读者对本书提出了宝贵的意见和建议,我们表示衷心的感谢。使用中我们也发现了一些错误和不妥之处,为了不断完善和提高教材质量,结合大家提出的意见和建议对本教材进行了修订。

本次修订的主要内容有:对本书第 1 版文字和图形中存在的一些错误或疏漏进行了纠正;将原书第 9 章中的 $s-t$ 坐标改成通用的 $\xi-\eta$ 坐标;改正了源程序中的个别不确切的编排格式;部分章节增加了一些习题。

本书第 2 版编写工作仍由原作者完成,其中绪论和第 4 章由赵均海编写,第 1、2、3 章由王敏强编写,第 5、6、7 章由王晓春编写,第 8、9 章及附录由马石城编写,第 10、11 章由汪梦甫编写,全书由赵均海修改定稿。

长安大学吕永新、华东交通大学童谷生、浙江科技学院王吉民、南昌大学彭南陵等对本书第 2 版的编写工作提出了宝贵意见,在此表示诚挚的谢意!

由于作者水平有限,第 2 版难免还有错漏与不妥之处,恳请各位同行和广大读者继续提出宝贵意见,以便进一步修改完善。

编 者
2008 年 4 月

目 录

0 绪论	(1)
0.1 弹性力学的内容	(1)
0.2 弹性力学中的几个基本概念	(1)
0.3 弹性力学的基本假设和解题基本方法	(3)
0.4 有限元的基本概念及内容	(4)

第一篇 弹性力学

1 应力和应变	(6)
1.1 平衡微分方程	(6)
1.2 应力状态分析	(8)
1.2.1 任意斜截面上应力	(8)
1.2.2 主应力与主切应力	(10)
1.3 几何方程及应变协调方程	(14)
1.3.1 位移和应变	(14)
1.3.2 几何方程与体积应变	(15)
1.3.3 应变协调方程	(16)
1.4 应变状态分析	(17)
1.5 物理方程(应力应变的关系)	(18)
本章小结	(21)
思考题	(22)
习题	(22)
2 弹性力学平面问题的解法及一般定理	(23)
2.1 弹性力学问题的提法	(23)
2.2 解的叠加原理及解的唯一性定理	(25)
2.2.1 解的叠加原理	(25)
2.2.2 解的唯一性定理	(25)
2.3 平面应力和平面应变问题	(26)
2.3.1 平面应力问题	(26)
2.3.2 平面应变问题	(27)
2.4 弹性力学平面问题的基本方程	(27)
2.4.1 平衡微分方程	(28)
2.4.2 几何方程与应变协调方程	(28)
2.4.3 物理方程(应力应变关系)	(28)
2.5 边界条件及圣维南原理	(29)
2.5.1 边界条件	(29)
2.5.2 圣维南原理	(31)

2.6	弹性力学问题的解法	(32)
2.6.1	位移解法(以位移表示的平衡方程)	(32)
2.6.2	应力解法(以应力表示的协调方程)	(34)
2.7	弹性力学中的应力函数	(35)
	本章小结	(37)
	思考题	(37)
	习题	(38)
3	用直角坐标解平面问题	(39)
3.1	用多项式解平面问题	(39)
3.2	矩形截面梁的纯弯曲	(41)
3.3	简支梁受均布荷载	(43)
3.4	受自重和静水压力作用的楔形体	(47)
3.5	分离变量法求解平面问题	(49)
	本章小结	(50)
	思考题	(50)
	习题	(51)
4	用极坐标解平面问题	(53)
4.1	用极坐标表示的基本方程	(53)
4.1.1	直角坐标与极坐标的关系	(53)
4.1.2	直角坐标系与极坐标系下的应力转换	(54)
4.1.3	极坐标系下的平衡方程	(55)
4.1.4	极坐标系下的物理方程	(55)
4.1.5	极坐标系下的几何方程与应变协调方程	(56)
4.2	轴对称平面问题	(58)
4.3	厚壁筒问题	(60)
4.4	部分圆环的纯弯曲	(61)
4.5	板中圆孔所产生的应力集中	(63)
4.6	楔体顶端承受集中力	(67)
4.7	半无限平面边界上受集中力	(69)
4.8	对心受压圆盘中的应力	(73)
	本章小结	(74)
	思考题	(75)
	习题	(75)
5	空间问题的解答	(76)
5.1	空间问题的基本方程	(76)
5.1.1	笛卡儿直角坐标系中的基本方程	(76)
5.1.2	圆柱坐标系中的基本方程	(78)
5.2	按位移求解空间问题	(79)
5.3	半空间体受重力及均布压力	(80)
5.4	半空间体在边界上受法向集中力	(81)
5.5	按应力求解空间问题	(83)
5.6	等截面直杆的扭转	(84)

5.7 扭转问题薄膜比拟·····	(87)
本章小结·····	(90)
思考题·····	(90)
习题·····	(90)
6 薄板弯曲问题 ·····	(92)
6.1 薄板计算假定·····	(92)
6.2 薄板小挠度弯曲基本方程·····	(93)
6.3 薄板的边界条件·····	(95)
6.4 薄板弯曲方程的圆柱坐标形式·····	(96)
6.5 圆板的轴对称弯曲·····	(98)
本章小结·····	(99)
思考题·····	(100)
习题·····	(100)
7 能量原理与变分法 ·····	(101)
7.1 功和应变能·····	(101)
7.2 虚功原理之一——虚位移原理·····	(103)
7.3 最小势能原理·····	(104)
7.4 位移变分方程的应用·····	(105)
7.5 虚功原理之二——虚应力原理·····	(107)
7.6 应力变分方程应用·····	(107)
7.6.1 平面问题·····	(108)
7.6.2 扭转问题·····	(109)
本章小结·····	(111)
思考题·····	(111)
习题·····	(111)

第二篇 有 限 元

8 平面问题的有限元法 ·····	(113)
8.1 有限元法的基本概念·····	(113)
8.2 结构的离散化·····	(114)
8.3 单元位移函数和解答的收敛性·····	(115)
8.3.1 单元位移函数·····	(115)
8.3.2 有限元解答的收敛性准则·····	(117)
8.4 插值函数与面积坐标·····	(117)
8.4.1 插值函数·····	(117)
8.4.2 面积坐标·····	(118)
8.5 单元刚度矩阵、节点力和节点位移关系式·····	(120)
8.5.1 单元的几何矩阵·····	(120)
8.5.2 单元的应力矩阵·····	(121)
8.5.3 单元的刚度矩阵·····	(121)
8.5.4 等效节点荷载·····	(123)

8.6	总体刚度矩阵	(126)
8.7	对称性分析与边界条件	(128)
8.7.1	结构对称性的利用	(128)
8.7.2	边界条件的处理	(129)
8.8	应力计算	(131)
8.8.1	边界内应力	(132)
8.8.2	边界上应力	(132)
8.9	算例	(133)
8.10	平面应力、应变问题的有限元程序	(137)
8.10.1	程序结构	(137)
8.10.2	变量列表及子程序说明	(137)
8.10.3	数组输入文件的格式	(138)
8.10.4	输入输出文件的范例	(138)
8.10.5	源程序清单	(140)
	本章小结	(148)
	思考题	(148)
	习题	(148)
9	弹性力学平面问题的高精度单元	(151)
9.1	矩形单元	(151)
9.2	6 节点三角形单元	(153)
9.3	平面等参元	(156)
9.3.1	任意四边形单元的位移模式	(156)
9.3.2	二维等参元的数学分析	(158)
9.3.3	二维等参元的刚度矩阵	(159)
9.3.4	8 节点曲边四边形单元	(160)
9.3.5	数值积分	(162)
	本章小结	(164)
	思考题	(164)
	习题	(165)
10	空间问题的有限元法	(166)
10.1	引言	(166)
10.2	四面体单元	(167)
10.2.1	单元位移函数	(167)
10.2.2	单元应力矩阵和单元刚度矩阵	(169)
10.2.3	等效节点荷载	(170)
10.3	高次四面体单元	(171)
10.3.1	四面体的体积坐标	(171)
10.3.2	10 节点 30 自由度四面体单元	(171)
10.3.3	4 节点 48 自由度四面体单元	(172)
10.4	六面体单元	(173)
10.4.1	8 节点六面体单元	(173)
10.4.2	20 节点 60 自由度六面体单元	(175)

10.5	空间问题的等参元	(175)
10.5.1	六面体等参元	(175)
10.5.2	四面体等参元	(177)
10.6	各种空间单元的比较与选择	(178)
	本章小结	(179)
	思考题	(179)
	习题	(180)
11	板壳问题的有限元法	(181)
11.1	引言	(181)
11.2	矩形薄板单元分析	(181)
11.2.1	单元位移函数	(182)
11.2.2	非完全协调元的收敛性准则	(183)
11.2.3	单元刚度矩阵	(184)
11.2.4	等效节点荷载	(186)
11.2.5	薄板弯曲问题中的位移边界条件	(187)
11.3	三角形薄板单元分析	(187)
11.3.1	单元位移函数	(188)
11.3.2	单元刚度矩阵	(189)
11.3.3	等效节点荷载	(190)
11.4	用矩形薄板单元计算薄壳问题	(191)
11.4.1	局部坐标系下的单元刚度矩阵	(191)
11.4.2	整体坐标系与局部坐标系	(192)
11.4.3	用平面壳体单元进行壳体分析的步骤	(193)
11.5	用三角形薄板单元计算薄壳问题	(194)
11.6	矩形板壳单元有限元分析程序	(195)
11.6.1	程序的功能	(195)
11.6.2	输入次序及变量说明	(195)
11.6.3	程序流程图及各子程序功能	(196)
11.6.4	矩形板壳单元有限元程序清单及程序段说明	(197)
11.6.5	程序考题	(211)
	本章小结	(214)
	思考题	(214)
	习题	(215)
附录 1	ANSYS-CAE 仿真分析软件	(216)
附录 1.1	程序简述	(217)
附录 1.1.1	ANSYS 图形用户界面(GUI)	(217)
附录 1.1.2	图形	(217)
附录 1.1.3	处理器	(218)
附录 1.1.4	数据库及文件格式	(218)
附录 1.1.5	ANSYS 程序支持的硬件平台	(218)
附录 1.1.6	与 CAD 软件的接口	(219)
附录 1.1.7	支持的图形传递标准	(219)

附录 1.2 前后处理	(219)
附录 1.2.1 前处理	(219)
附录 1.2.2 后处理及图形显示	(220)
附录 1.3 求解	(220)
附录 1.4 ANSYS 多物理场分析功能	(221)
附录 1.4.1 结构分析	(221)
附录 1.4.2 温度场分析	(222)
附录 1.4.3 流场分析	(223)
附录 1.4.4 电磁场分析	(223)
附录 1.4.5 多场耦合分析	(223)
附录 1.5 ANSYS 高级特性	(223)
附录 1.5.1 随机有限元分析	(223)
附录 1.5.2 优化设计及设计灵敏度分析	(224)
附录 1.5.3 子结构	(224)
附录 1.5.4 子模型	(224)
附录 1.5.5 二次开发功能	(224)
附录 1.6 ANSYS 专用模块	(224)
附录 1.6.1 ANSYS-SAFE	(224)
附录 1.6.2 ANSYS/CivilFEM	(224)
附录 1.6.3 Anspak	(225)
附录 1.6.4 ANSYS/LINFLOW	(225)
附录 1.6.5 跌落分析模块 DropTest	(225)
附录 1.6.6 板成型模块 DYNAFORM	(225)
附录 2 ALGOR FEAS 有限元分析软件简介	(226)
参考文献	(230)

0 绪 论

0.1 弹性力学的内容

弹性力学是固体力学的一个分支学科。它是研究可变形固体在外部因素(力、温度变化、约束变动等)作用下所产生的应力、应变和位移的经典科学。

弹性力学的任务与材料力学、结构力学的任务原则上是一样的,但也有区别,主要是:

(1) 材料力学在解决问题时常常需要一些特殊的假设,如平截面假设,且往往采用简化了的数学模型;弹性力学则不需要这种附加的基本假设,而采用较精确的数学模型。

(2) 弹性力学解决问题的范围比材料力学、结构力学要大得多。如孔边应力集中、深梁的应力分析问题用材料力学和结构力学的理论是无法求解的,而弹性力学则可以解决这类问题。对于板和壳体结构,则必须以弹性力学为基础,才能进行研究。

(3) 尽管有些工程问题可以用材料力学和结构力学求解,但无法就本身理论的精确度给出适当的评价,而弹性力学对这些初等理论的可靠性与结果的精确度可以给出适当的评价。

(4) 弹性力学又为进一步研究板、壳等空间结构的强度、振动、稳定性等力学问题提供理论依据,它还是进一步学习塑性力学、断裂力学等其他力学课程的基础。

0.2 弹性力学中的几个基本概念

(1) 体力

这种力是分布在物体体积内的力,如重力、惯性力等。

如图 0.1 所示,假设作用于 ΔV 的体力是 ΔQ ,则体力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta V$ 。现令:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = F \quad (0.1)$$

式中, F 是矢量,即物体在 P 点所受体力的集度, F 的方向就是 ΔQ 的极限方向。 F 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的分量分别是 X 、 Y 、 Z ,称为体力分量。

(2) 面力

这种力是分布在物体表面上的力,如流体压力、接触力。

如图 0.2 所示,假设作用在物体表面 ΔS 上的面力为 ΔT ,则面力的平均集度为 $\Delta T/\Delta S$ 。

令:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} = F_s \quad (0.2)$$

式中, F_s 也是矢量。 F_s 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的分量分别是 X_N 、 Y_N 、 Z_N ,称为面力分量。

(3) 应力

这种力是分布在物体内部任意点上的力,所以,实质上它是面力的一种。

用过 P 点的任意截面把物体分为 A 和 B 两部分(如图 0.3 所示)。如将 B 部分移去,则 B 对 A 的作用应代之以 B 部分对 A 部分的作用力。这种力在 B 部分移去以前是物体内部 A 、 B 间在截面 mn 上的内力,且为分布力。如从

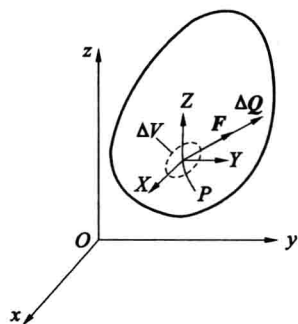


图 0.1 体力示意图

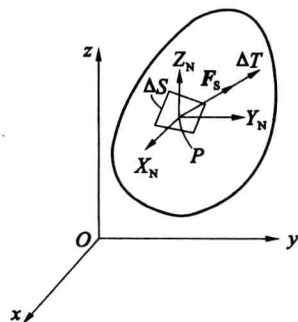


图 0.2 面力示意图

mn 面上任一点 P 的某个小领域取出一个包括 P 点在内的微小面积元素 ΔA , 而 ΔA 上的内力矢量为 ΔT , 则有:

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} \tag{0.3}$$

这个极限矢量 S 就是物体在截面 mn 上 P 点的应力。在材料力学里我们已经知道应力的法向分量为正应力, 用 σ 记之; 应力的切向分量为切应力, 用 τ 记之。

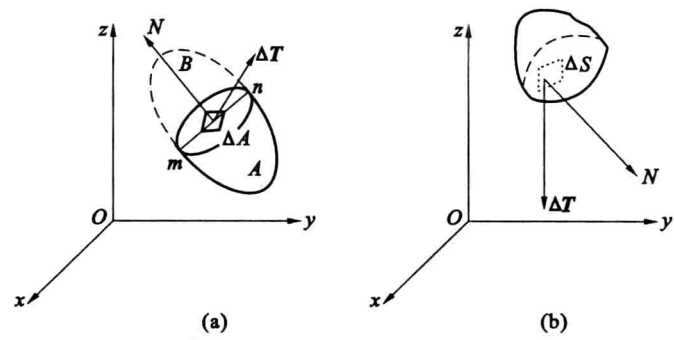


图 0.3 应力示意图

由上面的分析可知, 过 P 点可以作无数个平面, 也就是说在物体内同一点 P , 不同截面上的应力是不相同的。所以, 为了描述任一点的应力, 我们不仅要知道它的大小、方向, 而且还要知道其作用面。因此, 必须将应力理解成张量。因为它不仅与确定一个矢量所必需的大小和方向有关, 而且还与表征其作用面的矢量有关。下面我们详述应力张量诸分量的记法。

如果截面 mn 的外法线方向 N 和 y 轴一致(如图 0.4 所示), 则称截面 mn 为正面。作用在正面上 P 点的应力的正方向应与坐标轴的正方向一致。应力 σ_{ij} 的第一个角标表示微分面的外法线方向, 第二个角标表示应力分量的指向(与坐标轴的正方向一致)。于是, σ_{yy} 即应力作用的微分面的外法线方向是 y 轴(第一个角标), 这个应力指向 y 轴的正方向(第二个角标)。再如该微分面上的切应力 τ_{yz} , 第一个角标表示 τ_{yz} 的作用面的外法线方向与 y 轴一致; 第二个角标表示这个切应力分量指向 z 轴的正方向。其他正面上的应力分量可依此类推。如图 0.5 所示, 由于截面 mn 的外法线方向与 y 轴相反, 则我们称这个截面为负面。作用在负面上 P 点的应力的正方向与坐标轴的正方向相反。

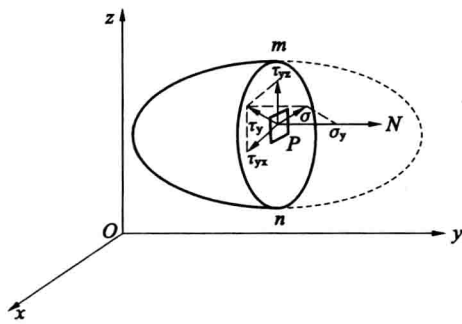


图 0.4 应力张量示意图

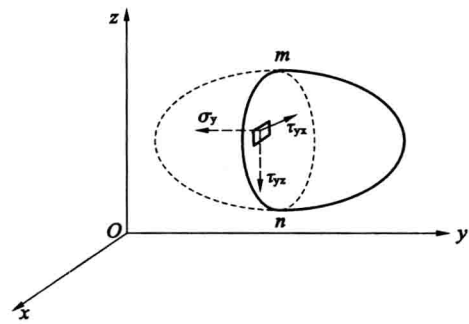


图 0.5 负面应力示意图

如上所述, 不同面上的应力是不同的。于是, 我们不禁要问: 究竟如何描绘一点处的应力状态? 与材料力学的截面法不同, 在弹性力学中, 我们总是用一个微小的平行六面体作为分析、研究问题用的力学模型。

为研究 P 点处的应力状态, 我们在 P 点处沿坐标轴 x 、 y 、 z 方向取一个微小的平行六面体(如图 0.6 所示), 其六个面的外法线方向分别与三个坐标轴的正负方向重合, 各边长分别为 dx 、 dy 、 dz 。由于各个微分面很小, 故可认为应力在各面上均匀分布。因此, 各面上的应力便可用一个作用在各面中心点的应力向量来表示。每个面上的应力向量又可分解为一个正应力和两个切应力分量。按前面约定的表示法, 图 0.6 给出的各应力分量均为正方向。

不难想象, 当微小的平行六面体趋近于无穷小时, 微分六面体上的应力就代表 P 点处的应力。因此,

P 点处的应力分量共有九个,为:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (0.4)$$

式中 σ_{ij} ——应力张量,此处 $i, j = x, y, z$ 。

(4) 应变

应变是描述物体受力后发生变形的相对概念的力学量,包括正应变和切应变。

正应变——平行六面体每边长的单位长度的相对伸缩;

切应变——平行六面体各边之间直角的改变,用弧度表示。

所以,正应变有三个,即 ϵ_{xx} 、 ϵ_{yy} 、 ϵ_{zz} ,切应变有六个,即 ϵ_{xy} 、 ϵ_{xz} 、 ϵ_{yx} 、 ϵ_{yz} 、 ϵ_{zx} 、 ϵ_{zy} ,或记作:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

式中 ϵ_{ij} ——应变张量,此处 $i, j = x, y, z$ 。

(5) 位移

物体任一点位置的移动称为位移。物体任一点 P 的位移,可用它在坐标轴 x 、 y 、 z 上的分量 u 、 v 、 w 来表示,切应变分别是 u 、 v 、 w 对 x 、 y 、 z 的偏导数的线性组合。以后我们将证明 $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$,等等。

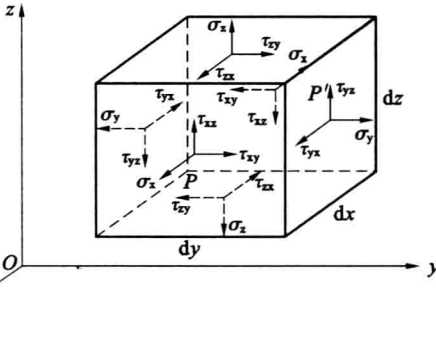


图 0.6 平行六面单元体

0.3 弹性力学的基本假设和解题基本方法

为了使线弹性力学能够统一下述两个矛盾问题:① 尽可能准确地描述真实材料在外力作用下所呈现的性态;② 在数学上简单的能够对大部分问题作出最后的解答,我们需要引入下列假设:

(1) 物体是连续介质

此假设指物体内部无空隙,因此物体中每点处的应力、应变、位移等量是连续的,可以用坐标的连续函数表示。这样,不仅避免了数学上的困难,更重要的是根据这一假设所作出的力学分析,与大量的工程实践和试验研究的结论是一致的。

(2) 物体是均匀的和各向同性的

此假设认为物体内部各点及各方向上的介质相同,它们的物理、力学特性相同。这样,表征这些特性的力学参量(弹性模量、泊松系数等)与位置 and 方向无关,是常量。必须指出,并非所有材料都是各向同性的,木材就是各向异性的材料,其顺纹和横纹的弹性性质有很大的差别。此外,许多经过碾压的金属材料也都是各向异性的。

(3) 物体是完全弹性的

此假设是说物体在外部因素(荷载、温度、约束条件的改变等)的作用下产生变形,当外部因素去掉后,物体恢复其原来的形状而没有任何残余变形,这种性质我们称为弹性。具有这种性质的物体,我们称为弹性体。今后我们只限于研究材料在弹性极限内的各种性态。当然,在这种前提下,材料是服从虎克定律的,也即应力与应变成正比。

(4) 物体无初应力

此假设认为物体在外部因素作用之前,物体处于一种无应力的自然状态,这就是说,弹性力学所求得的应力仅仅是由于外部因素所产生的。