数学思想与文化

张若军　编著

科学出版社

数学思想与文化

张若军　编著

本教材获“中国海洋大学教材出版补贴基金”资助

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是针对通识类课程的要求及综合性高等院校的人才培养目标和学生特点编写而成的。主要内容包括：数学是什么、数学概观、数学思想与方法选讲、数学分支介绍、有限和无限问题、数学悖论与历史上的三次数学危机、数学美学、世界数学中心与数学国际、数学的新进展之一——分形与混沌。本书叙述有详有略，章节独立，但强调整体的和谐有序。

本书可作为高等院校各专业本科生的数学文化类教材，也可供对此感兴趣的相关老师和学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学思想与文化/张若军编著. —北京：科学出版社，2015.6

ISBN 978-7-03-044969-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数学-思想方法-教材②数学-文化-教材 Ⅳ.①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 129334 号

责任编辑：王 静/ 责任校对：邹慧卿

责任印制：霍 兵/ 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2015 年 7 月第一次印刷 印张：15 1/4

字数：307 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

从多年前笔者开始讲授全校通识教育课程《数学思想与文化》的惶恐，经历几乎不间断的10余次授课(每学期32学时)，到申请编写教材的惴惴不安，这期间的经历，笔者一言难尽。编写教材的过程更是甘苦自知。

数学的发展史如同人类的发展史一般，卷帙浩繁，在这古老而又生机盎然的百花园中如何撷取合适的一捧花束，呈现在大学的课堂之上，自然是仁者见仁、智者见智。笔者所采用的教材框架是基于多年的教学实践，兼有可能并不够深刻的个人思考。

在多年的教学生涯中，笔者十分高兴能与众多学生成为推心置腹、无话不谈的朋友，数学学习的终极目标是学生们经常困惑的问题。在这门通识课程的课程论文撰写中，很多学生表达了小学、中学时期数学学习带给他们的或者快乐或者艰辛的学习经历、数学的资质或者后天的努力换来的成功与荣耀，数学曾是他们喜爱的学科，而现在则流露了大学数学学习带来的困惑和无所适从的不安。

一方面，数学对现实生活的影响与日俱增，许多学科或早或晚都经历着一场数学化的进程，数学方法无孔不入、无处不在。另一方面，数学本身在一日千里地发展着，重要的数学论文数量以美国的《数学评论》摘要为准，每8～10年翻一番。文献数量的爆炸加上方法概念的迅速更新，使得不同研究方向的数学家找到共同的数学语言都有困难，更遑论让非数学专业的人了解数学了。如此，一个尖锐的矛盾形成了:公众需要数学，渴望了解数学，而现代数学发展的过于深刻、庞大、变得越来越不容易接近。因此，对于数学，尤其现代数学加以普及，使得数学和数学家的工作能对现实生活产生应有的积极影响，已成为人们日益重视的课题。在数学与文化的结合上，传播工作大有可为。尽管可能曲高和寡，但尽力阐释数学的本原，数学家如何提出问题、考虑问题和解决问题，使读者感到数学不是那么陌生，有所获益，应是数学通识类教材追求的境界。

笔者在编写教材的过程中，参考了大量的图书资料，每一本“数学文化”类的教材都强调数学通识教育的目的:弥补传统数学教材所没有包括的有血有肉的生动资料，让学生了解数学的历史和发展，数学的精神和思想方法，数学名家和数学名题，数学应用的广泛性……旨在使学生可以从中汲取数学文化的营养，激发学习数学的热情和兴趣。数学通识课程开设的目标原本就是明确的，这些当然无可厚非。问题是短短32学时的课程是否可以承载这么沉重的任务?! 20世纪40年代末，朱自清先生在他的散文《大学的路》中就曾精辟地指出“教育学生确该重视通识，有

了足够的通识再去专业化，那种专业化才是健全的……”，还说“现在大学的公共必修课程，用意在培养学生的通识，让他们能有比较远大的目光，且能看清楚自己的地位和任务，学生好像都不乐意这些课程，但是相信他们勉强学习，多少还是有益的……”这段话令笔者豁然开朗，也许我们不需要将目标定得多么高远，脚踏实地，循序渐进，无论是教师还是学生，大家都需要不断地学习和充实自己，理解数学的本质，理解我们生活的这个世界，深化我们的知识，开阔我们的视野。

本教材的编写原则是尽量针对通识类课程的要求及综合性高校的人才培养目标和学生特点，并尽量更像一本教材——叙述有详有略，章节独立，但强调整体的和谐有序，其中编排若干题目，供学生思考。一些加 * 号的过深内容，可作为选学。不去泛泛的叙述很多细节，则使得教师在授课过程中可以自如的增减内容，只要备课充分，将会在课堂上游刃有余。

曾经的几次经历使笔者对“数学文化”类通识课程有了非常多的感悟。第一次是 2008 年 11 月笔者参加了教育部人事司、教育部高等教育司联合举办的“高等学校科学素质教育骨干教师高级研修班”，明确了科学素质教育课程的理念。第二次是 2010 年 11 月笔者参加了由全国高等学校教学研究中心、全国高等学校教学研究会、《中国大学教学》杂志和湖北省教育厅联合举办的第三届“中国大学教学论坛”，并作了《“数学思想与文化”公选课教学模式的探索》的发言，得到了较好的反响。第三次是 2011 年 7 月笔者参加了在南开大学召开的第二届“数学文化”课程研讨会，了解到全国有一大批数学工作者在为数学通识课程教学做着积极的努力，感慨于他们所取得的成绩，更感动于他们为数学通识课程在大学的普及默默奉献的精神。

感谢中国海洋大学教务处对教材出版提供资助和大力支持，也感谢数学科学学院多年来对数学通识类课程教学的重视，尤其方奇志院长多次和笔者就教材编写和课程的开设进行畅谈，教学副院长王林山教授时时关心教材的进展情况，并提出许多中肯的意见和建议。还要感谢笔者的许多同事，和他们的一些讨论给笔者提供了清晰的思路。

编写教材对笔者来说更是一次难得的进一步学习和认识数学的过程。鉴于笔者的水平有限，本书中的不足和遗漏在所难免，希望得到读者的批评指正，以便及时修订。

张若军

2014 年 11 月于青岛

目　　录

第 1 章　数学是什么

数学是科学的大门和钥匙……忽视数学必将伤害所有的知识，因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的。更为严重的是，忽视数学的人不能理解他自己这一疏忽，最终将导致无法寻求任何补救的措施。

——培根(R. Bacon，约 1214～1293，英国哲学家、自然科学家)

由于大量的数学符号，往往使数学被认为是一门难懂而又神秘的科学。如果我们不了解符号的含义，那就什么都不知道。在数学中，只要细加分析，即可发现符号化给数学理论和论证带来极大的方便，甚至是必不可少的。

——怀特黑德(A. N. Whitehead，1861～1947，英国数学家、逻辑学家)

数学是我们时代中有势力的科学，它不声不响地扩大它所征服的领域。

——赫尔巴特(J. F. Herbart，1776～1841，德国教育心理学家)

人类生存和发展的历史就是不断认识自然、适应自然和改造自然的历史，在这一过程中，数学也随之产生和发展起来。数学是人类文明的一个重要组成部分，是几千年来人类智慧的结晶。

从远古时代的结绳记事到应用电子计算机进行计算、证明，从利用规、矩等工具进行的具体测量到公理化的抽象体系，从自然数、一维的直线、规则的图形……到群、无穷维空间、分形……数学的内容、思想和方法逐渐演变、发展，并渗透到人类生活的各个领域。今天，数学已经成为了衡量一个国家发展、科技进步的重要标准。但究竟“数学是什么”？人类对之经历了一个漫长而艰难的探究过程。

1.1　数学的定义及品格

1.1.1　数学的诸多定义

数学，起源于人类早期的生产活动，为中国古代六艺之一(六艺中称之为“数”)，也被古希腊学者视为哲学的起点。数学的英语为 Mathematics，源自于古希腊语，意思是“学问的基础”。

早在 19 世纪，恩格斯(F. V. Engels，德，1820～1895)曾说过：“数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门科学。”这是一个一度得到大家广泛共识的数学的定义。但是，随着现代科学技术和数学科学的发展，人类进入信息时代，“数量关系”和“空间形式”具备了更丰富的内涵和更广泛的外延。混沌 (Chaos)、分形

几何(Fractal Geometry)等新的数学分支出现,这些分支已经很难包含在上述定义之中,人们在寻找数学的新"定义"。但是,要给数学一个客观而全面的定义,并非易事。

如今的数学已经发展成了一个蔚为壮观、极为庞大的领域,对"什么是数学?"这个基本问题的回答却仍是众说纷纭。英国哲学家、数学家罗素(B. Russell,1872～1970)曾说过:"数学是我们永远不知道我们在说什么,也不知道我们说的是否对的一门学科。"而法国数学家博雷尔(E. Borel,1871～1956)则说:"数学是我们确切知道我们在说什么,并肯定我们说的是否对的唯一的一门科学。"两位大家给出了表面看似相悖的回答!

美国数学家、数学教育家柯朗(R. Courant,1888～1972)在其科普名著《数学是什么》一书的序言中说:"数学,作为人类智慧的一种表达形式,反映生动活泼的意念,深入细致的思考,以及完美和谐的愿望,它的基础是逻辑和直觉,分析和推进,共性和个性。"法国数学家庞加莱(H. Poincaré,1854～1912)则说:"数学是给予不同的东西以相同的名称的技术。"

南京大学的方延明教授(1951～)在其编著的《数学文化》一书中,搜集了14种数学的定义或者说是人们对数学的看法:万物皆数说、符号说、哲学说、科学说、逻辑说、集合说、结构说、模型说、工具说、直觉说、精神说、审美说、活动说、艺术说。

(1) 万物皆数说认为数的规律是世界的根本规律,一切都可以归结为整数与整数比。此说来源于古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras of Samos,约公元前560～前480)及其学派,毕达哥拉斯曾说:"数学统治着宇宙。"

(2) 符号说认为数学是一种高级语言,是符号的世界。德国数学家希尔伯特(D. Hilbert,1862～1943)曾说:"算术符号是文字化的图形,而几何图形则是图像化的公式,没有一个数学家能缺少这些图像化的公式。"

(3) 哲学说认为数学等同于哲学。古希腊的亚里士多德(Aristotle,公元前384～前322)曾说:"新的思想家虽说是为了其他事物而研究数学,但他们却把数学和哲学看成是相同的。"

(4) 科学说认为数学是精密的科学。德国数学家、具有"数学王子"之称的高斯(J. C. F. Gauss,1777～1855)曾说:"数学是科学的皇后,数论是数学的皇后。"

(5) 逻辑说认为数学推理依靠逻辑。持有"逻辑说"者强调数学是不需要任何特定概念的,只需要通过逻辑概念就可以导出其他数学概念。

(6) 集合说认为数学各个分支的内容都可以用集合论的语言表述。集合无处不在,每个数学问题都可以纳入到集合的范畴。集合说已经成为了现代数学的基础。

(7) 结构说(关系说)强调数学语言、符号的结构方面及联系方面,认为数学是一种关系学。此说来源于20世纪上半叶著名的法国布尔巴基学派所主张的"数学

是研究抽象结构的理论”。

(8) 模型说认为数学就是研究各种形式的模型,如微积分是物体运动的模型、概率论是偶然与必然现象的模型、欧氏几何是现实空间的模型、非欧几何是超维空间的模型。英国数学家,逻辑学家怀特黑德说过“数学的本质就是研究相关模式的最显著的实例”。

(9) 工具说认为数学是所有其他知识工具的源泉。法国数学家笛卡儿(R. Descartes,1596～1650)说过:“数学是一个知识工具,比任何其他由于人的作用而得来的知识工具更为有力,因为它是所有其他知识工具的源泉。”

(10) 直觉说认为数学的来源是人的直觉,数学主要是由那些直觉能力强的人们推进的。荷兰数学家布劳威尔(L. Brouwer,1881～1966)说过“数学构造之所以称为构造,不仅与这种构造的性质本身无关,而且与数学构造是否独立于人的知识以及与人的哲学观点都无关,它是一种超然的先验直觉”。

(11) 精神说认为数学不仅是一种技巧,更是一种精神,特别是理性的精神。此说来自于德国近代数学家和数学教育家克莱因(F. Klein,1849～1925),他曾说“数学是一种精神,特别是理性的精神,能够使人的思维得以运用到最完美的程度”。

(12) 审美说认为数学家无论是选择题材还是判断能否成功的标准,主要是美学的原则。古希腊哲学家、数学家普洛克拉斯(Proclus,411～485)就曾说过“哪里有数,哪里就有美”。

(13) 活动说认为数学是人类最重要的活动之一。20 世纪奥地利著名的学术理论家、哲学家波普尔(K. Popper, 1902～1994)曾说:“数学是人类的一种活动。”

(14) 艺术说认为数学是一门艺术。法国数学家博雷尔就坚信“数学是一门艺术,因为它主要是思维的创造,靠才智取得进展,很多进展出自人类脑海深处,只有美学标准才是最后的鉴定者”。

方延明教授的观点是:从数学学科的本身来讲,数学是一门科学,这门科学有它的相对独立性,既不属于自然科学,也不属于人文、社会或艺术类科学;从它的学科结构看,数学是模型;从它的过程看,数学是推理与计算;从它的表现形式看,数学是符号;从对人的指导看,数学是方法论;从它的社会价值看,数学是工具……用一句话来概括:数学是研究现实世界中数与形之间各种模型的一门结构性科学。

1.1.2 数学的品格

数学有两种品格:工具品格和文化品格。因为数学在应用上的广泛性,因而在人类社会的发展中,特别在崇尚实用主义的今天,那种短期效益思维模式必然导致数学的工具品格越来越突出,越来越受到重视。

本小节主要论述一下数学的文化品格。所谓数学的文化品格是指数学训练在人们的思维方法和生活方式中潜在地起着根本性的作用,并受用终生的品格。

古希腊著名哲学家柏拉图(Plato,公元前 427～前 347)曾创办了一所哲学学校"柏拉图学园",并在校门口张榜声明,不懂几何学的人,不要进入他的学校就读。这并不是因为学校设置的课程需要有几何知识的基础才能学习。相反地,柏拉图哲学学校里所设置的课程都是关于社会学、政治学和伦理学一类的课程,所探讨的问题也都是关于社会、政治和道德方面的问题。因此,诸如此类的课程和论题并不需要直接以几何知识或几何定理作为其学习或研究的工具。由此可见,柏拉图之所以要求他的学生先通晓几何学,绝非着眼于数学的工具品格,而是立足于数学的文化品格。因为柏拉图深知数学的文化理念和文化素养的重要性,他充分认识到立足于数学的文化品格的数学训练对于提升一个人的综合素质,起着举足轻重的作用。

当今社会,仍有许多有识之士,实践着柏拉图的主张,重视数学的文化品格远胜于数学的工具品格。例如,英国的律师在大学要修多门高等数学课程,不是因为英国的法律要以高深的数学知识为基础,而只是出于这样一种认识,那就是通过严格的数学训练,才能使学生具有坚定不移而又客观公正的品格,并形成一种严格而精确的思维习惯,从而对他们取得事业的成功大有助益。再例如,闻名世界的美国西点军校的教学计划中,规定学员除了要选修一些在实战中能发挥重要作用的数学课程,如运筹学、优化技术和可靠性方法等,还规定学员要必修多门与实战不能直接挂钩的高深的数学课程。因为他们充分认识到,只有经过严格的数学训练,才能使学员在军事行动中,把那种特殊的活力与高度的灵活性互相结合起来,才能使学员具有把握军事行动的能力和适应性,从而为他们驰骋疆场打下坚实的基础。

数学的文化品格的重要使命就是传递一种思想、方法和精神,数学教育在传授知识、培养能力的同时,还能提高受教育者的人文素养,促使其身心协调发展和素质的全面提高。

1. 培养规则意识

数学严谨、准确的特点,要求每一个问题的解决都必须遵守数学规则,每一个定理的推证、每一个计算结果的获取、每个结论的判断,都做到有理可依、有据可循。因此,数学习题的演练、数学问题的解决可以训练学生注重推理和说理,这种能力迁移至工作与生活中,内化成受教育者的素质,将表现出信守诺言、遵守规范等行为。这些规范包括社会公认的规则、公共道德的标准。简言之,数学学习中所要求的对规则的遵守能够迁移,使人们形成一种对社会公德、秩序、法律等内在的自我约束力。

2. 培养周密思维和创新能力

数学教育家波利亚(G. Pólya,匈-美,1887～1985)说:"在数学家证明一个定

理之前，必须猜想到这个定理；在他完成证明的细节之前，必须先猜想出证明的主导思想。”数学学习与研究数学使人变得聪明理智。数学学习中需对各种现象进行归纳、抽象，需要将纷繁复杂的各种问题转化成数学模型，这本身就是创新过程。数学能培养人的思维的周密性，在自然科学研究中，通过数学推理能发现一些暂时没被人们认识的规律。

除了上述重要的两方面，数学还可以培养勤奋的品质，因为学习数学是一种意志的锻炼，需要刻苦，需要静心，需要拼搏。在数学的学习和研究中还可以磨炼胜不骄、败不馁的优良品质。

总之，数学的文化品格不同于实用性的数学知识，但它对受教育者的影响却是更加深远和无可替代的。

1.2 数学与各学科的联系

1.2.1 数学与哲学

1. 数学与哲学的联系

有位哲学家曾说：“没有数学，我们无法看透哲学的深度；没有哲学，人们也无法看透数学的深度；若没有两者，人们就什么也看不透。”这句话精妙地阐释了数学与哲学的关系。

哲学是系统化的世界观和方法论，而数学是一门具体科学。数学与哲学二者联系密切，相辅相成。

在科学技术不发达的古代，人们对世界的认识是肤浅的和笼统的，未能形成分门别类的具体科学，哲学同各种具体科学之间没有明确的分工和严格的界限，数学、天文学、力学等常常包括在哲学之中。许多哲学家本身就是数学家，如亚里士多德、笛卡儿、莱布尼茨(G. W. Leibniz，德，1646～1716)、罗素等。牛顿(I. Newton，英，1642～1727)的《自然哲学的数学原理》是经典力学的划时代著作，从中可见哲学和数学之间不仅联系密切，而且彼此相互促进，共同推动着科学的发展。

数学和哲学都具有高度的抽象性和严密的逻辑性。数学是研究事物的量及其关系的具体规律，哲学则是研究自然、社会和思维的普遍规律，可以说哲学与数学是共性与个性、普遍与特殊的关系。

一方面，哲学以数学等具体科学为基础，依赖于各具体科学为其提供大量丰富的具体知识与具体规律，只有在此基础上加工改造，才能抽象、概括出整个世界最一般的本质和最普遍的规律。所以，具体科学能够解释并验证哲学思想，其不断的发展也必定促进着哲学的完善。例如，函数项级数的出现和发展就解释并验证了人们对客观世界的一般认识规律：从有限多个数的加法到无限多个数的加法——数项级数，再到以幂级数和傅里叶级数为代表的函数项级数，就验证了人们从低级

到高级、从特殊到一般的认识规律。再例如，马克思主义哲学的诞生，其最主要的自然科学依据是达尔文的自然选择定律、物理学中的能量转化和守恒定律及生物学中的细胞学说，而这些又都离不开数学的研究和分析方法。

另一方面，哲学必然为数学等具体科学的发展提供正确的世界观和方法论上的指导。一位数学家不懂得哲学和辩证法，那么他在数学上很难取得进展——这已经成为人们的共识。在高等数学中，时时处处蕴涵着丰富的辩证法，蕴涵着直与曲、常量与变量、确定与随机、有限与无限的转化。例如，求定积分的过程就蕴涵着丰富的辩证法，以求曲边梯形的面积为例，在 $\lambda\to 0$（λ 是 n 个小矩形底边长度的最大值，用以刻画曲边梯形分割的精细程度）的条件下，n 个小矩形的面积之和转化为曲边梯形的面积，直线转化为曲线，近似值转化为精确值，这个过程蕴藏了矛盾的对立统一和量变质变的规律，其中哲学思想在数学研究中的指导作用是显而易见的。

2. 数学与哲学的区别

首先，数学与哲学的思维方式不同，数学是从量的角度去分析问题，而哲学是从质的角度去分析问题。从而它们二者之间具有了对立统一的关系。当我们分析不同事物之间具有的数量关系时，只能采用数学上的各种方法；一旦我们遇到了不同质之间具有的相互关系时，就需要采用哲学的方法。

其次，数学与哲学研究问题的着眼点和采用的研究方法不同。数学注重单纯的数量关系，使用的分析工具是各种运算法则，包括数学定理、公式等，运算的结果仍然是数量的多少；哲学注重不同质之间的关系，使用的工具是大脑的抽象能力，即分析与综合的能力，哲学分析的结果是形成了一个新的概念，使认识得到深化。例如，对于数学悖论，数学与哲学所关心的问题及所采用的视角是不同的。

最后，数学思维与哲学思维之间既有同一性又有对立性。例如，在如何看待哥德巴赫(C. Goldbach，1690～1764)猜想问题上，数学家与哲学家都认为哥德巴赫猜想提出的“大偶数可以分解为两素数之和”这一断言是客观存在的，这体现了二者的同一性。但是，在涉及决定猜想成立的条件上，数学家与哲学家表现出了对立，数学家认为，理论证明是决定这个猜想作为数学定理成立的前提条件；哲学家则认为，实践、分解和验算的结果决定着这个猜想的成立与否，它同理论证明之间没有任何关系。由此，数学与哲学的对立统一关系可见一斑。

3. 数学与哲学的发展

哲学曾将整个宇宙作为自己的研究对象，研究范围包罗万象。而数学最初的范畴只有算术和几何。到了 17 世纪，自然科学的发展使哲学退出了一系列研究领域，哲学的中心问题从“世界是什么样的”变成“人怎样认识世界”；而数学凭借其独

有的逻辑思维和对量的分析，不断扩大自己的领域，开始研究运动与变化——数学的影响力越来越大，而哲学的影响力越来越小。今天，数学在向一切学科渗透，包括人文科学、社会科学的大量领域，它的研究对象不断拓广；而西方现代哲学却只能将注意力限于意义的分析，把哲学的中心问题缩小到“人能说出些什么”。

我国著名数学家张景中院士(1936～)认为：在某种意义上来说哲学是望远镜。当旅行者到达一个地方时，他不再用望远镜观察这个地方了，而是把它用于观察前方。数学则相反，它是最容易进入成熟的科学，获得了足够丰富事实的科学，能够提出规律性的假设的科学。它好像是显微镜，只有把对象拿到手中，甚至切成薄片，经过处理，才能用显微镜观察它。事实上，哲学在很多具体学科领域无法与数学一争高下，但是它可以从事具体学科无法完成的工作，为其诞生准备条件。哲学应当是人类认识世界的先导，关心的应当是科学的未知领域。数学在具体学科领域则很可能出色地工作。因此，二者应取长补短，相辅相成，共同推动科学的进步！

1.2.2 数学与科学

早在13世纪，英国哲学家、自然科学家培根就曾指出“数学是打开科学大门的钥匙”。回顾科学的发展历史，凡具有划时代意义的科学理论与实践的成就，几乎无一例外地都借助了数学的力量。

例1 麦克斯韦方程→电磁波理论→现代通信技术。

1863年，英国物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell，1831～1879)系统总结了英国物理学家法拉第(M. Faraday，1791～1867)等由实验建立起来的电磁现象规律，把这些规律表述为“方程组的形式”——麦克斯韦方程，用纯粹数学的方法在理论上推导出可能存在着电磁波，并且这些电磁波应该以光速传播。据此，他提出了光的电磁理论。

20多年后，德国物理学家赫兹(H. R. Hertz，1857～1894)在振荡放电实验中证实了电磁波的存在，在实践上证明了光就是一定频率范围内的电磁波，从而统一了光的波动理论与电磁理论。不久，意大利的无线电工程师马可尼(G. M. Marconi，1874～1937)和俄国科学家波波夫(A. C. Popov，1859～1906)又在此基础上各自独立地发明了无线电报。从此，电磁波走进了千家万户，人类也一步一步迈进信息化时代。

例2 黎曼几何→广义相对论。

1854年，德国数学家黎曼(B. Riemann，1826～1866)给出了一个不同于传统欧氏几何学的几何体系——黎曼几何，这在当时曾不被人接受和理解。

爱因斯坦(A. Einstein，德-美，1879～1955)在狭义相对论建立以后，力图把相对性原理推广到非惯性系。他曾花了数年时间试图推导出引力实际上只是空间的曲率这种可能性，而从数学上加以表述就借助了60年前黎曼关于弯曲空间的工作

(即黎曼几何),这才使爱因斯坦得以继续广义相对论的研究。爱因斯坦的广义相对论认为,由于有物质的存在,空间和时间会发生弯曲,而引力场实际上是一个弯曲的时空。

爱因斯坦于 1915～1916 年创立了广义相对论,随后,他用广义相对论的结果来研究整个宇宙的时空结构。1917 年发表论文《根据广义相对论对宇宙学所作的考查》,以科学论据推论宇宙在空间上是有限无界的,这是宇宙观的一次革命。

例 3　纳维-斯托克斯方程→流体力学→航空学。

纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程是流体力学中描述黏性不可压缩流体的运动方程。这个方程因 1821 年由法国数学家纳维(L. Navier,1785～1836),1845 年由英国数学物理学家斯托克斯(G. G. Stokes,1819～1903)分别建立而得名。

流体力学是研究流体(包含气体及液体)现象以及相关力学行为的科学。理论流体力学的基本方程就是纳维-斯托克斯方程,它由一些微分方程组成,通常通过一些边界条件或者通过数值计算的方式来求解。

航空学作为人类从事航空活动的理论基础,其内容中的航空器的研究、设计、制造等都离不开流体力学的理论。借助于航空学,人类制造了宇宙飞船、航空母舰,创建了国际空间站,航空航天技术得以飞速发展,人类探索宇宙空间的愿望成为现实。

例 4　数理逻辑和量子力学→现代电子计算机。

作为 20 世纪最伟大的科技发明之一——现代电子计算机因为具有高速的数值计算、逻辑计算,以及存储记忆等功能,已经成为当今社会不可或缺的电子工具。计算机内部的运算是由数字逻辑电路组成,数理逻辑是计算机工作的基础。

量子计算机则是遵循量子力学规律进行高速数学和逻辑运算、存储和处理信息的一种全新概念的计算机。它以处于量子状态的原子作为中央处理器和内存,可用作各种大信息量数据的处理,如密码分析和破译等。由于量子 bit(量度信息的单位)比传统计算机中的“0”和“1”bit 可以存储更多的信息,所以量子计算机的运行效率和功能将远超传统计算机,据估计其运算速度可能比奔腾 4 芯片快 10 亿倍。

例 5　牛顿万有引力定律(含开普勒行星运动三大定律)→天文学、物理学和其他自然科学。

德国天文学家开普勒(J. Kepler,1571～1630)于 1609～1619 年提出行星运动的三大定律(开普勒定律)——开普勒第一定律:每一个行星都沿各自的椭圆轨道环绕太阳,而太阳则处在椭圆的一个焦点中;开普勒第二定律:在相等时间内,太阳和运动中的行星的连线所扫过的面积都是相等的;开普勒第三定律:绕以太阳为焦点的椭圆轨道运行的所有行星,其椭圆轨道长半轴的立方与周期的平方之比是一个常量。开普勒定律是哥白尼日心说提出以后的天文学的又一次革命,彻底摧

毁了托勒密(C. Ptolemy,埃及,约 90～约 165)繁杂的本轮宇宙说,完善和简化了哥白尼(M. aj Kopernik,波兰,1473～1543)的日心宇宙说。

牛顿的万有引力定律是 17 世纪自然科学最伟大的成果之一。牛顿认为万有引力是所有物质的基本特征,万有引力定律把地面上的物体运动的规律和天体运动的规律统一了起来,第一次揭示了自然界中一种基本相互作用的规律,是人类认识自然历史上的一座里程碑,对以后天文学、物理学和其他自然科学的发展具有深远的影响。开普勒定律可以由万有引力定律推导出来,所以可以看成万有引力定律的推论。

例 6 微积分学→天文学、力学和现代的科学技术。

16 世纪的欧洲处在资本主义萌芽时期,生产实践的发展向自然科学提出了许多新的课题,迫切要求天文学、力学等基础学科给予回答,而这些学科都深刻依赖于数学,因而也推动了数学的发展。17 世纪微积分学应运而生,并被广泛应用于解决天文学、力学中的各种实际问题,取得了巨大的成就,并逐渐在现代科学技术的发展中显示了非凡的威力。

有“现代电子计算机之父”之称的美籍匈牙利数学家、发明家冯·诺依曼(J. von Neumann,1903～1957)对微积分学有如下评价:微积分是现代数学的第一个成就,而且怎样评价它的重要性都不为过。我认为,微积分比其他任何事物都更清楚地表明了现代数学的发端,而且,作为其逻辑发展的数学分析体系仍然构成了精密思维中最伟大的技术进展。

1.2.3 数学与艺术

美国代数学家哈尔莫斯(P. R. Halmos,1916～2006)说:“数学是创造性艺术,因为数学家创造了美好的新概念;数学是创造性艺术,因为数学家像艺术家一样的生活,一样的思考;数学是创造性艺术,因为数学家这样对待它。”

数学能陶冶人的美感,增进理性的审美能力。一个人的数学造诣越深,越是拥有一种直觉力,这种直觉力就是理性的洞察力,也是由美感所驱动的选择力,这种能力有助于使数学成为人们探索宇宙奥秘和揭示规律的重要力量。

1. 数学与音乐

数学与音乐之间的联系源远流长,早在中世纪,算术、几何和音乐就都包括在教育课程之中。数学与音乐的最大共性是都使用符号,且都是一种抽象的过程。数学是对事物量的方面的抽象,并通过各种形式表达、揭示出客观世界的内在规律,以一种理性的方式来描述客观世界。音乐是以音符为基本符号,是对自然音响的抽象,并通过对它们排列组合,概括我们主观世界的各种活动,以一种感性的方式来描述客观世界。

毕达哥拉斯认为宇宙是由声音与数字组成的，他说："音乐之所以神圣而崇高，就是因为它反映出作为宇宙本质的数的关系。"

例 7　乐谱的书写。

乐谱的书写是表现数学对音乐影响的一个显著标志。乐谱上的速度、节拍(4/4拍、3/4 拍等)、音符(全音符、二分音符、四分音符、八分音符、十六分音符等)反映了乐曲的表现形式。音乐的创作是与书写出的乐谱的严密结构融为一体的，书写乐谱时确定每小节内的某分音符数，与求公分母的过程相似——不同长度的音符必须与某一节拍所规定的小节相适应。

例 8　音节与调音理论。

乐音体系中各音的绝对准确高度及其相互关系称为音律。音律是在长期的音乐实践发展中形成的，并成为确定调式音高的基础。音乐需要有美的音调，美的音调必然是和谐的。

公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派第一次用比率将数学与音乐联系起来。他们发现两个事实：一根拉紧的弦发出的声音取决于弦的长度；要使弦发出和谐的声音，则必须使每根弦的长度成整数比。这两个事实使得他们得出了和声与整数之间的关系，而且他们还发现谐声是由长度成整数比的同样绷紧的弦发出的——这就是毕达哥拉斯音阶和调音理论。

中国古代的音乐研究和创作中也很早就有了数学的应用。《吕氏春秋·大乐》中说："音乐之所由来者远矣：生于度量，本于太一。"所谓"生于度量"，即是说音律的确定，需要数学。约春秋中期，《管子·地员篇》中记载确定音律的方法"三分损益法"就是数学方法的具体应用。明代数学家、音乐理论家朱载堉(1536～1611)在《律吕精义》创造的十二平均律，实际上是将指数函数应用于音律的确定。十二平均律有许多优点，它易于转调，简化了不同调的升、降半音之间的关系。十二平均律是当前最普遍、最流行的律制，被世界各国所广泛采用。

例 9　音乐的分析、设计与指数曲线、周期函数。

许多乐器的形状和结构与各种数学概念有关。不管是弦乐器还是由空气柱发声的管乐器，它们外形的边缘都反映出一种指数函数所描绘的曲线形状。例如，钢琴的弦和风琴的管外形边缘都是如此。

19 世纪法国数学家傅里叶(J. B. J. Fourier，1768～1830)的工作使乐声性质的研究达到顶点，他建立的关于声音的数学分析理论代表了用数学方法研究音乐理论的最高成就。他证明了所有乐声都可用数学式子来描述，这些数学式子是简单的正弦函数之和。每一个声音有三个性质，即音调、音量和音质，它们将不同的乐声区别开来。傅里叶的发现使声音的这三个性质可以在图形上清楚地表示出来：音调与函数的频率有关，音量与函数的振幅有关，音质则与函数的形状有关。声音既然是若干简单正弦函数的叠加，就单一的声音元素来说(即可以由一个正弦函数