弹性理论的温度问题

B. M. 馬依澤尔

科学出版社

彈性理論的温度問題

B. M. 馬依泽尔 著

王 君 健 譯

科 学 出 版 社

1959

В. М. МАЙЗЕЛЬ

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАДАЧА

ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Изд. Академии Наук Украинской ССР

Киев 1951

內 容 簡 介

本书的內容是作者对弹性理論的溫度問題进行研究工作后的总結。

作者根据貝蒂-麦克斯威尔的互换定理而得到一个基本公式，由这个公式出发，并且采用常溫弹性体力学的現成結論，比較系統地解决了一些弹性理論中有关溫度位移和应力的問題；在本书的最后一章，作者还講到了如何用实驗方法来解决溫度問題。

弹性理論的溫度問題

B. M. 馬依澤尔著

王 君 健 譯

*

科 学 出 版 社 出 版 （北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1959 年 12 月第 一 版　　书号：1954　字数：149,000

1959 年 12 月第一次印刷　　开本：850×1168 1/32

（京）0001—4,500　　印张：5 3/4

定价：0.85 元

編 者 序

我們要向讀者推荐的这部专論，作者是烏克兰科学院通訊院士、技术科学博士、維尼阿明·米哈依洛維奇·馬依泽尔教授．原来本书打算在 1942 年刊印，但是，作者于 1943 年逝世了，并且，由于某些客观的原因，也就使得本书的出版工作不得不拖延了下来．尽管如此，若是我們从問題的現实性来看，从解法的独創性和完整性来看，这本专論非但沒有过时，而且就目前来說，对我們还大有裨益，因为，它的內容大大地丰富了其他作者对同一些問題的研究成果．

担任本书編审出版工作的是技术科学博士瓦尔瓦克（П. М. Варвак）教授；而古別尔曼（И. О. Губерман）則协助进行了本书的校对工作．

在此，謹向他們致以衷心的謝意．

烏克兰科学院院士
技术科学博士 Ф. П. 別良金教授

目　　录

編者序……………………………………………………………… i

前　言……………………………………………………………… 1

第一章　方法的概述……………………………………………… 3

I. 引　言……………………………………………………………… 3

II. 基本公式………………………………………………………… 4

III. 弹性体在非稳定溫度場的影响下所发生的位移……………22

IV. 关于弹性体中溫度应力状态的极小原則………………………26

V. 靜不定系統中的溫度支反力……………………………………29

VI. 关于初应力和初位移的理論……………………………………35

第二章　上述方法某些最簡单的应用……………………………40

I. 物体的溫度均匀昇高……………………………………………40

II. 物体的溫度均匀昇高，但体积保持不变………………………41

III. 无限弹性体………………………………………………………42

IV. 綫性溫度場中的自由体和約束体；有关常溫体的某些关系式……43

V. 球和球层…………………………………………………………49

VI. 柱体………………………………………………………………58

第三章　平面問題和杆系…………………………………………68

I. 平面形变場中和平面应力場中关于它們之間的应力状态关系……68

II. 在稳定溫度場中的平面单連通体(自由的或約束的)……………72

III. 在非稳定和稳定溫度場中的平面复連通体……………………78

IV. 确定溫度反力的几个例子………………………………………82

V. 实例………………………………………………………………85

第四章　板…………………………………………………………101

I. 一般理論…………………………………………………………101

II. 圓板 …… 109
III. 环形板 …… 116
IV. 矩形的以及其他形状的板 …… 119
V. 厚板 …… 123

第五章 变厚圓盘 …… 127

I. 旋轉的常溫圓盘 …… 127
II. 圓盘所在的溫度場只是半径的函数 …… 132
III. 在靜止圓盘中溫度所引起的弯曲应力 …… 141

第六章 壳 …… 146

I. 柱形壳 …… 146
II. 旋轉壳 …… 157

第七章 实驗方法 …… 163

I. 方法的基础 …… 163
II. 三維物体 …… 165
III. 平面物体 …… 170
IV. 板和壳 …… 175

結束語 …… 177

前　言

在这本书中，作者所要講的是他于1940到1942年期間、在研究关于弹性系統受温度影响时的应力状态的一些工作．这些工作是他在烏克兰科学院的动力研究所和建筑力学研究所內进行的．

关于弹性体內温度应力状态的問題，是强度的基本問題之一．对于許多技术部門，特别是对于发动机制造来說（汽輪机，固定式和船用的內燃机，飞机发动机，汽車拖拉机发动机等），这个問題具有重大的意义．但是，直到最近，我們在这一方面的研究范围还是比較狹窄，以致它远不能滿足工程技术方面的要求，感到特别突出的是：我們在研究問題时，缺少实际可行的实驗方法．

这些情况，促使作者拟定出一个一般的方法，借这个方法，我們完全可以采用同一的方式在理論上解答一些具体的問題；同时，这方法还能对結构的个别元件，以及結构結点的有关問題改用实驗方法来求解，并且，这种实驗只需在常温体上进行．

关于如何在实驗和理論上来研究弹性体中的温度应力状态，作者在第一章中敍述了自己所拟定的一般方法．

第二至六章的內容是：根据提出的方法，对某些专题（平面問題，板，壳等）作出理論的解答．这里，着重討論了那些早先沒有解决的問題，与此同时，对于以前有些作者用其他方法解决过的、然而是非常有趣的問題，我們也順便用这个方法作出了解答．

最后一章，則是說明如何应用这个方法在常温体上进行实驗．在此，我們还举出了几个具体的例子．

在书末的一个簡短的結束語中，我們說明了这个方法的特点．

作者希望尽可能地把书写得簡短些，同时，也希望它更能为广泛的讀者所易于接受．我們在书中只对一些基本的原則問題作了詳尽的敍述．为了使讀者能够掌握这里所提出来的方法，我們在

第二章中对某些个别的問題作了詳細的分析. 至于以后的几章，特别是講述实験解法的那一章，我們就敍述得比較簡短些.

如果讀者們有可能将这个方法用在发动机制造以及其他的工业部門中，那末，作者也就认为他已經在頗大的程度上完成了自己的任务。

第一章 方法的概述

I. 引　　言

弹性体內，温度的应力状态問題是強度理論的基本問題之一，而且它的地位是愈来愈重要了.

在許多不同的技术領域中，我們常会遇到这种問題，例如：在机械制造，冶金工程，土木工程，仪表制造等方面. 其中，強度問題的基本內容之一就是：結构的元件因温度的影响而产生的应力状态問題.

我們应該注意到，为了能弄清楚温度条件对間隙大小的影响；为了能确定变温物体在支承处的温度反力，那么我們所要求的就不仅是温度应力，而且还有必要知道位移这个量.

在这里，我們不准备談到那些現有的文献(这样的材料可以在列别傑夫(Н. И. Лебедев)所著的“弹性理論中的温度应力”一书中找到——1937 版)。我們知道，研究温度应力的通常方法(經典的)，实际上就是积分某些附有温度項的微分方程，而这一点乃是相当于解决某一定表面力和体积力作用下的应力問題.

象这样的一个相当力系通常說来是很复杂的，因而用“經典”方法所能解决的問題也就非常有限. 正因为这个緣故，在采用实驗来研究温度应力时，我們就不能引用“經典”方法. 这样一来，如果要用实驗来确定温度应力，我們就必須直接在物体上按照某一定的規律变温来进行实驗(只有处于稳定温度場的自由平面体是个例外).

但是，要想作出某一給定的温度場，一般說来是有困难的；而且，要求能同时測定弹性应力也会使問題更加复杂，因此，要进行这种实驗会存在很大的困难.

为此，直到最近，我們还只能在理論上解决一些比較簡单的温度应力問題(金尼克(А. Н. Динник)，加辽金(Б. Г. Галеркин)，列别傑夫(Н. Лебедев)，馬斯洛夫(Г. Н. Маслов)，穆斯海里什維利(Н. И. Мусхелишвили)，巴泼柯維奇(П. Ф. Папкович)，波美朗切夫(А. А. Померанцев)等人的研究). 至于在实驗方面，我們所能解决的問題就更少了(Н. 列别傑夫等).

本章講述的內容是：作者研究弹性体中的温度应力状态时，在理論方面和在实驗方面所采用的方法. 它們是作者在1940年提出的[1].

今后，为了簡单起見，我們把处处具有同一温度的物体称为常温体，并且令它等于零($T=0$)，而把这种情形相应地称作物体的自然(无应力)状态. 如果弹性体內的温度是按一定的規律、一般地說是作非均匀的分布，我們就称它为变温体(在一般場合，温度是物体上点的坐标函数和时間的函数)[*].

II. 基 本 公 式

A. E, ν 是常量的情形. 我們来考虑两个物体(图1). 这两个物体的外形完全一样，而弹性模数 E，泊松系数 ν 以及温度的綫膨胀系数 α 也都相同. 在一般場合，物体是空間的，复連通的(也就是說，物体內部是有孔的).

我們用温度函数 $T''=T''(x, y, z; t)$ 来描述物体 I 中的温度場，用另一温度函数 $T'=T'(x, y, z; t)$ 来描述物体 II 中的温度場；作用在第一和第二物体上的表面力和体积力，則分别用矢量 $\mathbf{P}''$, $\mathbf{Q}''$ 和 $\mathbf{P}'$, $\mathbf{Q}'$ 来表示($\mathbf{P}''$ 和 $\mathbf{P}'$ 是就单位面积来說的，而 $\mathbf{Q}''$

---

1) В. М. Майзель, Обобщение теоремы Бетти-Максвелла на случай термического напряженного состояния и некоторые его приложения, ДАН СССР, т. XXX, № 2, 1941.

*) "нагретый" 一字，原意是加热，但考虑到这里所約定的，以及在以后的討論中，都以温度为准，因此将該字譯作变温，准此，"ненагретое" тело 譯作常温体——譯者註.

和 $\mathbf{Q}'$ 则是就单位体积来說的)；两个物体上点的位移矢量分别用 $\mathbf{U}''$ 和 $\mathbf{U}'$ 来表示，而应力张量则用 σ'' 和 σ' 来表示.

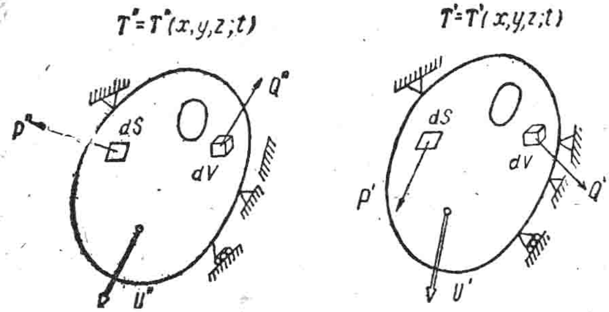

图 1

我們用 $2W(\sigma'', \mathbf{U}')$ 和 $2W(\sigma', \mathbf{U}'')$ 来表示下列的表达式:

$$2W(\sigma'', \mathbf{U}') = X_x'' \frac{\partial u'}{\partial x} + Y_y'' \frac{\partial v'}{\partial y} + Z_z'' \frac{\partial w'}{\partial z} + X_y'' \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) +$$

$$+ Y_z'' \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}\right) + Z_x'' \left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right), \qquad (\text{I; II, 1})$$

$$2W(\sigma', \mathbf{U}'') = X_x' \frac{\partial u''}{\partial x} + Y_y' \frac{\partial v''}{\partial y} + Z_z' \frac{\partial w''}{\partial z} +$$

$$+ X_y' \left(\frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial x}\right) + Y_z' \left(\frac{\partial v''}{\partial z} + \frac{\partial w''}{\partial y}\right) +$$

$$+ Z_x' \left(\frac{\partial w''}{\partial x} + \frac{\partial u''}{\partial z}\right), \qquad (\text{I; II, 2})$$

这里 X_x'', Y_y'', $\cdots$, Z_x''; u'', v'', w'' 分别是应力张量 σ'' 和位移矢量 $\mathbf{U}''$ 的分量. 凡是有关第一物体的各个量都打两撇，而有关第二物体的则打一撇.

平衡方程是与温度条件无关的，因此，和通常的情形一样，我們有(物体各点在移动时的慣性力，由于它們很小，所以我們不予考虑；不过要想計較慣性力也并不困难，这一点我們要在第 III 节中指出来.):

$$\iiint 2W(\sigma'', \mathbf{U}')dV = \iint (\mathbf{P}'', \mathbf{U}')dS + \iiint (\mathbf{Q}'', \mathbf{U}')dV, \qquad (\text{I; II, 3})$$

$$\iiint 2W(\sigma', \mathbf{U}'')dV = \iint (\mathbf{P}', \mathbf{U}'')dS + \iiint (\mathbf{Q}', \mathbf{U}'')dV, \tag{I; II, 4}$$

这里$(\mathbf{P}'', \mathbf{U}')$是外力 $\mathbf{P}''$ 在位移 $\mathbf{U}'$ 上所作的功.

dS 和 dV 分别表示面素和体素.

如果考虑到温度的因素时,虎克定律是(λ 和 μ 是拉梅系数):

$$X_x'' = \lambda\theta'' + 2\mu \frac{\partial u''}{\partial x} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} T'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_y'' = \mu \left(\frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial x}\right), \tag{I; II, 5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这里

$$\theta'' = \mathrm{div}\mathbf{U}'' = \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z}. \tag{I; II, 6}$$

对于 X_x', Y_y', $\cdots$, Z_x' 来說,也有类似的公式. 将上式代入(1)和(2)式,即得:

$$2W(\sigma'', \mathbf{U}') + \frac{\alpha E}{1-2\nu} T''\theta' = 2W(\sigma', \mathbf{U}'') + \frac{\alpha E}{1-2\nu} T'\theta''. \tag{I; II, 7}$$

現在回过来考虑公式(3),(4),即得(这里 $\alpha = \mathrm{const}$):

$$\iint (\mathbf{P}'', \mathbf{U}')dS + \iiint (\mathbf{Q}'', \mathbf{U}')dV + \frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint T''\theta' dV =$$

$$= \iint (\mathbf{P}', \mathbf{U}'')dS + \iiint (\mathbf{Q}', \mathbf{U}'')dV + \frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint T'\theta'' dV. \tag{I; II, I}$$

我們所得到的公式(I),乃是将貝蒂-麦克斯威尔定理推广到非均匀加热时的結果.

在此,如果物体 I 是常温的,也就是說,如果 $T = 0$,則由公式(I)可直接推得(不带撇的字母 $\mathbf{U}$, θ, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ 表示有关常温体的各量):

$$\iint (\mathbf{P}, \mathbf{U}')dS + \iiint (\mathbf{Q}, \mathbf{U}')dV =$$

$$= \iint (\mathbf{P}', \mathbf{U})dS + \iiint (\mathbf{Q}', \mathbf{U})dV + \frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint T'\theta dV.$$

(I; II, I′)

B. 現在我們来討論一般公式(I′)的某些应用.

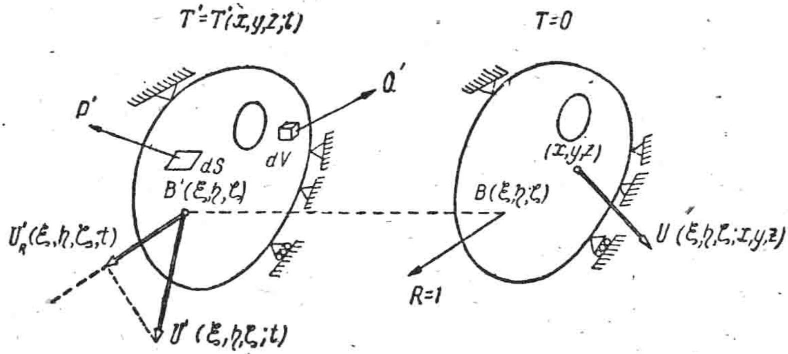

图 2

設若我們要确定某一定点 $B'(\xi, \eta, \zeta)$ 在某一定方向 $\mathbf{R}$ 的位移 $\mathbf{U}'_R(\xi, \eta, \zeta; t)$，这一点或是在变温体(图 2)的內部，或是在它的表面；物体处于温度場 $T' = T'(x, y, z; t)$ 中；并且，在这个物体上作用着已知的表面力 $\mathbf{P}'$ 和体积力 $\mathbf{Q}'$，此外，还有刚性支承的反力，其中有一些是固定的，另一些則是鉸支的(在特殊情况下，全部支承可能都是固定的，或者都是鉸支的). 为此，我們假設在常温体上点 $B(\xi, \eta, \zeta)$ 处作用单位力 $\mathbf{R} = 1$，而 B 点是相当于变温体上的点 $B'(\xi, \eta, \zeta)$，并且，該常温体的支承情况与变温体的完全一样，还能維持平衡状态. 由于支反力作的功为零，則由(I′)即可得到基本公式:

$$\mathbf{U}'_R(\xi, \eta, \zeta; t) = \iint (\mathbf{P}', {}_R\mathbf{U}^*)dS + \iiint (\mathbf{Q}', {}_R\mathbf{U}^*)dV +$$

$$+ \frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint T'(x, y, z; t)_R\theta^*(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)dV,$$

(I; II, II)

这里 ${}_R\mathbf{U}^*$, ${}_R\theta^* = \mathrm{div}_R\mathbf{U}^*$ 是对常温体来說的，而常温体在点(ξ,

η, ζ) 处受单位力 $\mathbf{R}=1$ 的作用.

公式(II)右边部分的积分是有意义的，这是因为 $\mathbf{U}^*$ 和 θ^* 在点(ξ, η, ζ)处变为 $\mathbf{r}^{-1}$ 和 $\mathbf{r}^{-2}$ 級的无穷大.

在基本公式(II)中，出現了单位体积变形 $_R\theta^*$ 这个量. 不过为了方便起見，我們往往直接引用它的应力表达式，根据下列的关系式引入量 $_R\Theta^*$:

$$_R\Theta^*(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) = {}_R(X_x^* + Y_y^* + Z_z^*), \quad (\mathrm{I}; \mathrm{II}, 8)$$

这里 $_R\Theta^*$ 是常温体上点(x, y, z)处的法向应力和，此时，在这个常温体的点(ξ, η, ζ)处有一单位力 $\mathbf{R}$ 作用. 注意到:

$$_R\Theta^* = \frac{E}{1-2\nu}\, {}_R\theta^*, \qquad (\mathrm{I}; \mathrm{II}, 9)$$

即可将(II)写成下列形式:

$$\mathbf{U}'_R(\xi, \eta, \zeta; t) = \iint (\mathbf{P}', {}_R\mathbf{U}^*)dS + \iiint (\mathbf{Q}', {}_R\mathbf{U}^*)dV + \\ + \alpha \iiint T'(x, y, z; t)\, {}_R\Theta^*(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)dV.$$

(I; II, II′)

这里所求得的公式(II′)(請与公式(I), (I′)和(II)相比較)，在今后的应用中，是以它为基础的[1].

如果物体以上述的方式支承着(刚性支承)，并且不受外力作用，也就是說，$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}' = 0$. 这样，位移的产生只是由于温度的影响，根据公式(II)和(II′)，有:

$$\mathbf{U}'_R(\xi, \eta, \zeta; t) = \\ = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \iiint T'(x, y, z; t)\, {}_R\theta^*(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)dxdydz = \\ = \alpha \iiint T'(x, y, z; t)\, {}_R\Theta^*(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)dxdydz.$$

(I; II, II″)

由公式(II′)和(II″)不难看出：我們可以把位移当作是两部分

---

1) В. М. Майзель, Обобщение теоремы Бетти-Максвелла на случай термического напряженного состояния и некоторые его приложения (ДАН СССР, т XXX, № 2, 1941).

迭加起来的，1)只是由外力 $\mathbf{P}'$ 和 $\mathbf{Q}'$ 在常温体上产生的位移(方程(II)或(II′)中的头两項)；2)仅是由于温度的影响而产生的位移 $(\mathbf{P}'=\mathbf{Q}'=0)$[方程(II″)]．这样一来，我們可以单独地来解决两个各自独立的問題，其中的一个是对常温体来說的，它是受外載荷 $\mathbf{P}'$ 和 $\mathbf{Q}'$ 的作用；而另一个問題則是对变温体說的，它不受外載荷的作用．

現在我們将基本定理陈述如下：

点(ξ,η,ζ)，因温度場 $T'=T'(x,y,z;t)$ 的作用产生位移 $\mathbf{U}'$，其在一指定的方向 R 的投影 $\mathbf{U}'_R$，是等于温度的綫膨胀系数 α 乘以关于物体的体积分，积分号下的函数則是温度 $T'(x,y,z;t)$ 乘以另一个物体上点的法向应力和 ${}_R\Theta^*$．而这个物体是假想为常温的，与变温体具有同一的外形，同一的弹性常数 E 和 ν，并且在点(ξ,η,ζ)处，沿已知方向 R 作用一单位力 $\mathbf{R}$.

已知 $\mathbf{U}'$，我們就不难确定温度变形和温度应力(参看第F节).

这样，基本公式(II)(或(II′))就将变温体的温度应力状态問題化为常温体在单位集中力作用下的应力状态問題．如果已知后一問題的解(或是，至少已知法向应力的和)，則有关任一温度場 $T'=T'(x,y,z;t)$的温度应力問題，就可以借公式(II)或(II′)求得它的全解，而且，我們还可以同时考虑到外力 $\mathbf{P}'$ 和 $\mathbf{Q}'$ 的影响.

要特别指出来的是(参看第Ⅶ章)：当我們要用实驗方法来研究温度应力状态时，公式(II)或(II′)仍然可以采用．因为，借这个公式，可将研究变温体中应力状态的实驗直接变为研究在单位力作用下常温体中应力状态的实驗．尽管如此，还只能将这个方法用在厚度較薄的物体上，因为，要将单位力作用在物体内部的某些点上，一般說来是有困难的.

在上面，我們已經研究了温度的綫膨胀系数是常数的情形($\alpha=\text{const}$)．設若 α 是温度 $T'(x,y,z;t)$的函数，从而也就有 $\alpha=\alpha(x,y,z;t)$，不难証明：所有上述的結果仍然是正确的，不

过，应該将 α 写在积分号下．就中，公式(II′)，(II″)应改为下列的形式：

$$\mathbf{U}'_R(\xi, \eta, \zeta; t) = \iint (\mathbf{P}', {}_R\mathbf{U}^*)dS + \\ + \iiint (\mathbf{Q}', {}_R\mathbf{U}^*)dV + \iiint \alpha T'{}_R\Theta^* dV; \qquad (\mathrm{I}; \mathrm{II}, \mathrm{II}'_1)$$

$$\mathbf{U}'_R(\xi, \eta, \zeta; t) = \frac{E}{1-2\nu}\iiint \alpha T'{}_R\theta^* dV = \iiint \alpha T'{}_R\Theta^* dV. \qquad (\mathrm{I}; \mathrm{II}, \mathrm{II}''_1)$$

C. 設若在常温体的表面或內部某一点 A 上，只作用一給定的单位集中力 $\mathbf{R}$，而在变温体的某一点 B' 上，只作用一給定的单位集中力 $\mathbf{R}'$（$\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}'$ 的方向可以是不平行的），而且，一般地説点 B' 也不是 A'——与常温体上点 A 相应的点，但是，变温体的支承方式则与常温体的相同．因此，由公式(II)即得：

$$(\mathbf{U}'_{A'})_R = (\mathbf{U}^*_B)_{R'} + \frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint T'{}_R\theta^* dV, \qquad (\mathrm{I}; \mathrm{II}, 10)$$

这里 $(\mathbf{U}^*_B)_{R'}$ 是常温体上点 B 处的位移 $\mathbf{U}_B$ 在力 $\mathbf{R}'$ 方向的投影，而点 B 则对应于变温体上的点 B'．$(\mathbf{U}'_{A'})_R$ 则是变温体上点 A' 的位移($\mathbf{U}'_{A'}$)在力 $\mathbf{R}$ 方向的投影，而点 A' 则对应于常温体上的点 A．公式(10)是馬克斯威尔定理推广到非均匀温度場时的結果，它还可以推出下面的命題：

如果在常温体上某一定点作用一单位力 $\mathbf{R}$（$\mathbf{R}$ 的方向也被确定了），则位移投影的差$[(\mathbf{U}^*_B)_{R'} - (\mathbf{U}'_{A'})_R]$与单位力在变温体上的作用点 B' 的位置无关．

如果已知常温体上点的位移，从而也就知道了 $(\mathbf{U}^*_B)_{R'}$ 和 ${}_R\theta^*$．这样一来，我們还可能用公式(10)来直接确定变温体上点的位移．

D. E, ν 是温度的函数．公式(I)，(I′)，(II)，(II′)和(II″)都引入了这样的假設：即物体在变温时，弹性模数 E 和泊松系数 ν 都是常量．不过，我們不难将公式(I)和(II)推广到 α, E 和 ν 皆为温度 $T' = T'(x, y, z; t)$的函数时的情形．

設在变温体中給定一温度場 $T' = T'(x, y, z; t)$，并且 α, E

和 ν 皆为温度 $T' = T'(x, y, z; t)$的函数，此时，变温体的 α, E 和 ν 都是已知的坐标函数了，$\alpha = \alpha(x, y, z; t)$; $E = E(x, y, z; t)$; $\nu = \nu(x, y, z; t)$.

現在，設想有另一物体，它的外形与第一个物体相同，具有随温度变化的 E, ν, 而且与第一物体上各相应点的 E, ν 相等。第二物体是常温的($T = 0$)．重复第A节的推导，即得：

$$\iint (\mathbf{P}, \mathbf{U}')dS + \iiint (\mathbf{Q}, \mathbf{U}')dV =$$
$$= \iint (\mathbf{P}', \mathbf{U})dS + \iiint (\mathbf{Q}', \mathbf{U})dV + \iiint \frac{\alpha E}{1-2\nu} T'\theta dV =$$
$$= \iint (\mathbf{P}', \mathbf{U})dS + \iiint (\mathbf{Q}', \mathbf{U})dV + \iiint \alpha T'\Theta dV. \quad (\mathrm{I}; \mathrm{II}, \mathrm{I}'_{\mathrm{A}})$$

当 α, E 和 ν 为温度 T' 的函数时，从而也就是变温体的坐标函数．在这种場合，公式(I'_{A})就是公式(I')的推广，这里 $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, θ, Θ 分别是常温体上的各有关量，而这个常温体的 E 和 ν 则是坐标的函数，变化規律与变温体的相同．

E. 基本公式(II')的另一个証明．这个証明浅易近人，并且在討論問題时物理意义很明显，因此，讀者更易于理解．

假設物体在一般的情形是三維的，复連通的，并处在一給定的温度場 $T' = T'(x, y, z; t)$． 而且，在物体的某些点上以一定的方式予以支承(在这些点上用鉸支或是固結)．我們从物体中取一无穷小的立方体，其边长为 a (图 3)．取出来的这块立方体能够自由地膨胀，每一边长的絕对伸长为 $\alpha T'a$． 現在我們来設想另有一立方体，其边长也为 a，弹性常数 E, ν 的数值也和变温立方

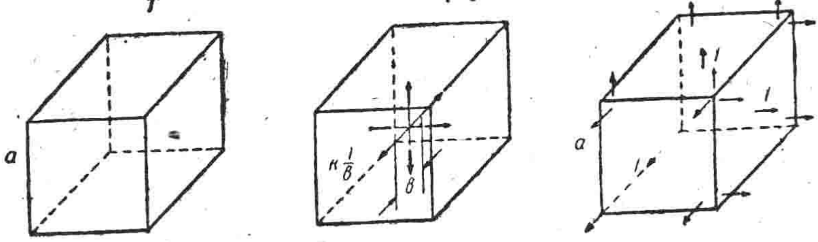

图 3