



工业和信息化部“十二五”规划教材

# 微积分

## (下册)

Weijifen

薛玉梅 李 娅 王进良 编著

$$\begin{aligned} &= \int_7^8 \frac{x}{\sqrt{(x-6)x}} \\ &= \int_7^8 \frac{(x-3)+3}{\sqrt{(x-3)^2-3^2}} dx = \int_7^8 \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2-3^2}} \\ &+ \frac{3}{\sqrt{(x-3)^2-3^2}} d(x-3)^2 + 3 \int_7^8 \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2-3^2}} \\ &= \left[ \sqrt{(x-3)^2-3^2} + 3 \ln \left| x-3 + \sqrt{(x-3)^2-3^2} \right| \right]_7^8 \\ &+ \left[ \sqrt{(x-6)x} + 3 \ln \left| x-3 + \sqrt{(x-6)x} \right| \right]_7^8 \\ &= \ln(4+\sqrt{7}) \end{aligned}$$



北京航空航天大学出版社  
BEIHANG UNIVERSITY PRESS



工业和信息化部“十二五”规划教材

# 微 积 分

(下册)

薛玉梅 李 娅 王进良 编著

北京航空航天大学出版社

## 内 容 简 介

本书是工业和信息化部“十二五”规划教材,分为上、下册。内容包括:预备知识、函数、极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分、级数、空间解析几何与向量代数、多元微分学及应用、重积分及应用、曲线积分与曲面积分、常微分方程等。

在本教材中增加了微积分中常用的初等数学的内容,便于学生查阅和补充相关知识;教材中语言简洁明了,例子经典易懂,结合大量图形的应用以及与工程实践相关的例题,使学生对知识的理解和掌握更加直观、深入。

本书可供高等院校作为教材使用。

### 图书在版编目(CIP)数据

微积分 / 薛玉梅,李娅,王进良编著. -- 北京 :  
北京航空航天大学出版社,2015.7

ISBN 978-7-5124-1823-3

I. ①微… II. ①薛… ②李… ③王… III. ①微积分—高等学校—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 151174 号

版权所有,侵权必究。

### 微积分(下册)

薛玉梅 李 娅 王进良 编著

责任编辑 刘晓明

\*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: [goodtextbook@126.com](mailto:goodtextbook@126.com) 邮购电话:(010)82316936

北京兴华昌盛印刷有限公司印装 各地书店经销

\*

开本:787×1 092 1/16 印张:12 字数:307 千字

2015 年 7 月第 1 版 2015 年 7 月第 1 次印刷 印数:2 000 册

ISBN 978-7-5124-1823-3 定价:49.00 元(上下册)

# 《微积分》教材编写组

《微积分(上册)》

薛玉梅 主编

薛玉梅 李 娅 王进良 编著

《微积分(下册)》

李 娅 主编

李 娅 薛玉梅 编著

# 目 录

第 7 章 级 数	1
7.1 数项级数的收敛性	1
习题 7.1	4
7.2 和式的积分判别法与估计	4
习题 7.2	8
7.3 正项级数的比较判别法	8
习题 7.3	10
7.4 正项级数的其他判别法	11
习题 7.4	13
7.5 交错级数	14
习题 7.5	15
7.6 绝对收敛和条件收敛	15
习题 7.6	15
7.7 幂级数	16
7.7.1 幂级数及其收敛半径	16
习题 7.7(1)	20
7.7.2 幂级数的运算及和函数的性质	20
习题 7.7(2)	22
7.7.3 函数的幂级数展开——Taylor 级数	22
习题 7.7(3)	27
7.8 Fourier 级数	27
7.8.1 三角级数系及三角函数系的正交性	27
7.8.2 以 $2\pi$ 为周期的函数的 Fourier 级数	28
7.8.3 正弦级数和余弦级数	30
习题 7.8	32
第 8 章 空间解析几何与向量代数	33
8.1 空间直角坐标系与点的坐标	33
8.1.1 空间直角坐标系	33
8.1.2 空间中点的坐标	33
习题 8.1	35
8.2 向量及其运算	35
8.2.1 向量的基本概念	35
8.2.2 向量的运算	36



习题 8.2 .....	42
8.3 空间平面与直线方程.....	42
8.3.1 空间中的直线方程.....	42
8.3.2 空间中的平面方程.....	44
习题 8.3 .....	45
8.4 空间曲面与曲线方程.....	46
8.4.1 空间曲面的方程.....	46
8.4.2 空间曲线的方程.....	51
习题 8.4 .....	53
<b>第 9 章 多元微分学及应用 .....</b>	<b>54</b>
9.1 极限和连续.....	54
习题 9.1 .....	59
9.2 偏导数.....	59
习题 9.2 .....	62
9.3 全微分.....	63
习题 9.3 .....	66
9.4 复合函数和隐函数求导.....	66
9.4.1 复合函数求导.....	66
9.4.2 隐函数求导.....	68
习题 9.4 .....	69
9.5 微分法在几何上的应用.....	70
9.5.1 空间曲线的切线和法平面方程.....	70
9.5.2 空间曲面的切平面和法线方程.....	71
习题 9.5 .....	72
9.6 方向导数和梯度.....	73
习题 9.6 .....	75
9.7 多元函数的极值和最值.....	75
9.7.1 多元函数求极值.....	75
9.7.2 多元函数求最值.....	77
9.7.3 条件极值.....	78
习题 9.7 .....	79
9.8 二元函数 Taylor 公式* .....	79
习题 9.8 .....	81
<b>第 10 章 重积分及应用.....</b>	<b>82</b>
10.1 二重积分的定义与性质 .....	82
10.1.1 空间立体的体积 .....	82
10.1.2 二重积分的性质 .....	83



习题 10.1 .....	84
10.2 二重积分的计算 .....	84
10.2.1 矩形区域 .....	84
10.2.2 一般平面区域 .....	85
习题 10.2 .....	89
10.3 二重积分换元法 .....	89
习题 10.3 .....	92
10.4 二重积分的应用 .....	92
10.4.1 空间立体的体积 .....	93
10.4.2 空间曲面的面积 .....	93
10.4.3 不均匀薄片的质量和重心 .....	95
习题 10.4 .....	96
10.5 三重积分的概念与计算 .....	96
习题 10.5 .....	99
10.6 三重积分换元法 .....	99
10.6.1 三重积分换元公式 .....	100
10.6.2 柱坐标换元法 .....	100
10.6.3 球坐标换元法 .....	101
习题 10.6 .....	102
<b>第 11 章 曲线积分与曲面积分 .....</b>	<b>103</b>
11.1 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分) .....	103
11.1.1 问 题 .....	103
11.1.2 第一类曲线积分的概念和性质 .....	103
11.1.3 第一类曲线积分的计算 .....	105
习题 11.1 .....	108
11.2 对坐标的曲线积分(第二类曲线积分) .....	108
11.2.1 问 题 .....	108
11.2.2 第二类曲线积分的概念和性质 .....	109
11.2.3 两类曲线积分之间的关系 .....	110
11.2.4 第二类曲线积分的计算 .....	111
习题 11.2 .....	113
11.3 Green 公式 .....	113
11.3.1 平面区域的分类与平面区域边界的定向 .....	113
11.3.2 Green 公式概述 .....	114
11.3.3 Green 公式的应用 .....	116
11.3.4 曲线积分与路径无关的条件 .....	118
习题 11.3 .....	120
11.4 第一类曲面积分 .....	121



11.4.1	曲面形物体的质量	121
11.4.2	对面积的曲面积分的定义和性质	121
11.4.3	对面积的曲面积分的计算	122
习题 11.4		124
11.5	第二类曲面积分	125
11.5.1	定向曲面	125
11.5.2	第二类曲面积分的概念	125
11.5.3	第二类曲面积分的性质	127
11.5.4	第二类曲面积分的计算	128
11.5.5	两类曲面积分之间的关系	130
习题 11.5		131
11.6	Gauss 公式和 Stokes 公式	131
11.6.1	Gauss 公式	131
11.6.2	Stokes 公式*	134
习题 11.6		137
<b>第 12 章</b>	<b>常微分方程</b>	<b>139</b>
12.1	基本概念	139
习题 12.1		140
12.2	几类特殊形式一阶微分方程的求解	140
12.2.1	变量分离方程	141
习题 12.2(1)		142
12.2.2	齐次方程	142
习题 12.2(2)		145
12.2.3	一阶线性微分方程	145
习题 12.2(3)		149
12.2.4	可降阶的高阶微分方程	150
习题 12.2(4)		152
12.3	二阶线性微分方程	152
12.3.1	二阶线性齐次微分方程解的结构	153
12.3.2	二阶线性非齐次微分方程解的结构	153
习题 12.3(1)		155
12.3.3	二阶常系数线性齐次微分方程	155
习题 12.3(2)		158
12.3.4	二阶常系数线性非齐次微分方程	158
习题 12.3(3)		161
12.3.5	Euler 方程的求解*	162
12.4	二阶线性微分方程的应用	163
12.4.1	弹簧振动	163





---

12.4.2 阻尼振动·····	164
12.4.3 强迫振动·····	166
习题 12.4 ·····	166
习题答案与提示·····	167
参考文献·····	179

# 第7章 级数

## 7.1 数项级数的收敛性

在实数系中,有限个实数加起来仍然是实数.本章将讨论无穷多个实数相加可能出现的情况和特征.例如,在《庄子·天下篇》提到“一尺之棰,日取其半,万世不竭”,体现了无穷个实数相加的思想:每天截下的长度相加,即为

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

从直观上讲,上述和为1.

有限次运算与无限次运算有着本质的区别.例如按照两种不同方式求和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 1.$$

得到两个完全不同的和数.因此,如何定义无限次求和,什么时候和式存在,以及如何计算和式等,都需要建立完整的数学理论.

首先我们回忆一些基本的定义.

**定义1** 设 $\{a_n\}$ 是任意的一个实数列,则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

为无穷级数或简称级数.记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .  $a_n$ 称为一般项或通项, $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 称为级数的第 $n$ 个部分和.

对于任意级数,可以构造一个部分和序列

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \cdots, s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \cdots.$$

这个部分和的序列 $\{s_n\}$ ,或者有极限或者没有极限.若 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ 存在(是一个有限数),则称它

为无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和.

**定义2** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为数项级数,若 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 存在,则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;否则,级数称为发散.

为此,当我们写 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ 时,也就是把级数的充分多项相加,即要多接近数 $s$ 就能多接近.注意

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$

**例1** 讨论等比级数(几何级数) $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots (a \neq 0)$ 的收敛性.



解 若  $q \neq 1$ , 则  $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ .

因为当  $|q| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ; 当  $|q| > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ . 所以, 当  $|q| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ ; 当  $|q| > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ . 当  $q = 1$  时,  $s_n = na$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ ; 当  $q = -1$  时,  $s_n = a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  不存在.

综上所述, 当  $|q| < 1$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  收敛, 并且  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$ ; 当  $|q| \geq 1$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  发散.

例 2 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  收敛.

解 由于  $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ . 因此级数收敛, 且和为 1.

例 3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

发散.

证明 由于

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, & s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}, \\ s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

所以,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

这说明当  $n \rightarrow \infty$  时,  $s_{2^n} \rightarrow \infty$ , 所以  $\{s_n\}$  发散. 因此调和级数发散.

研究无穷级数时, 一个最基本的问题是判断它的敛散性, 只有在级数收敛的情况下讨论求和的问题才有意义. 首先讨论收敛级数的基本性质.

定理 1 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

证明 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  存在, 可设  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . 由于  $a_n = s_n - s_{n-1}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .



定理1告诉我们,要判断一个级数是否收敛时,应首先考察当 $n \rightarrow \infty$ 时,该级数的通项 $a_n$ 是否趋于零,若通项 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在,则说明该级数是发散的.例如,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ ,  
 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 均发散.但定理1中的通项 $a_n$ 趋于零只是级数收敛的必要条件,不是充分条件.例如调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的,尽管 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

研究级数的收敛问题,实际上就是研究部分和数列的收敛问题,这就使我们能够应用熟知的极限的知识来研究级数.因此由极限的四则运算性质可以得到下面的定理.

**定理2** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ 也收敛,这里 $\alpha, \beta$ 为任意实数,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (7.1)$$

**证明** 因为 $\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k (\forall n \in \mathbb{N})$ . 在等式两边同时取极限即可.

**例4** 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right]$ 的和.

**解** 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ , 且由例2可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ , 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right]$ 收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right] = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 5.$$

注:级数的有限项不影响它的收敛性或发散性.例如可以证明级数 $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 是收敛的.因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^9} + \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

**定理3** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,把此级数的项任意组合,但不改变其先后的次序,得到的新级数

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{n-1}} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots \quad (7.2)$$

仍然收敛,这里 $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ,并且与原级数的和相等.

**证明** 假设原级数部分和序列为 $\{s_n\}$ ,级数(7.2)的部分和序列为 $\{s_{n_k}\}$ ,则 $\{s_{n_k}\}$ 为 $\{s_n\}$ 的子列,故由 $\{s_n\}$ 的收敛性可知, $\{s_{n_k}\}$ 也收敛,并且 $\{s_{n_k}\}$ 和 $\{s_n\}$ 极限相同,定理得证.

**注1:**收敛级数去括号后所得级数不一定收敛.例如:级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots$$

收敛,但是级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

发散.所以如果加括号后所得的级数发散,则原级数也发散.

**注2:**上述定理的逆命题不成立,例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ .但是在一定条件下,逆定理成立.

**定理4** 如果上面级数(7.2)括号中的每一项符号一致,且收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.



证明 假设级数(7.2)的部分和序列为  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和序列为

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots.$$

由定理的假设条件,一定存在  $n$ ,使得  $n-1 < k < n$ ,满足

$$A_{n-1} \leq s_k \leq A_n \quad \text{或} \quad A_n \leq s_k \leq A_{n-1}.$$

由夹逼定理可得,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  存在,因而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

定理4告诉我们,有限次加法的结合律能推广到无限次加法运算.

## 习题 7.1

1. 求下列级数的和.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (0.6)^{n-1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \tan n; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}; \quad (4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

2. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$  是否收敛.

3. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,证明  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$  也收敛.试举例说明,逆命题不成立.但若  $a_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,则逆命题也成立,试证之.

4. 假设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \neq 0)$  收敛,证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  发散.

5. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的第  $n$  个部分和为  $s_n = \frac{n-1}{n+1}$ ,求  $a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

6. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的第  $n$  个部分和为  $s_n = 3 - n2^{-n}$ ,求  $a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

7. 考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ .

(1) 求部分和  $s_1, s_2, s_3$  和  $s_4$ .你认出这些分母了吗?利用这个规律猜测  $s_n$  的公式.

(2) 利用数学归纳法证明你的猜测.

(3) 证明所给的无穷级数收敛并求其和.

## 7.2 和式的积分判别法与估计

一般来说,求出无穷级数的准确和是困难的.我们能够对几何级数求和,是因为能够求出其第  $n$  个部分和  $s_n$  的简单的公式.但通常计算  $s_n$  是不容易的.因此在下面的几节里将介绍几种判别法,可以不用求出级数的部分和就能确定它是否收敛.

下面从研究如下的级数开始:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

前  $n$  项和  $s_n$  没有一个简单的表达式,但可以计算一些数值,如表 7.1 所列.



表 7.1

$n$	$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$	$n$	$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$
5	1.463 6	500	1.642 9
10	1.549 8	1 000	1.643 9
50	1.625 1	5 000	1.644 7
100	1.635 0		

可以看到,当  $n \rightarrow \infty$  时部分和趋于一个约为 1.64 的数,并且看起来此级数似乎收敛.为了验证这个事实,可以用几何观点来说明(见图 7.1).

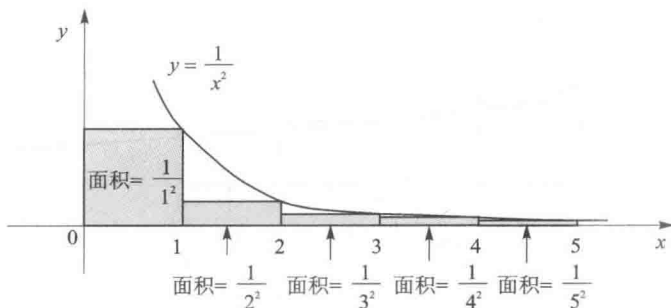


图 7.1

图 7.1 中是曲线  $y = \frac{1}{x^2}$  以及位于曲线下方的矩形,每个矩形的底边都是长度为 1 的区间,高是函数  $y = \frac{1}{x^2}$  在此区间右端点的相应的函数值.所以这些矩形的总面积为

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

若不考虑图 7.1 中的第一个矩形,那么剩下的矩形的总面积要比  $x \geq 1$  时曲线  $y = \frac{1}{x^2}$  下方的面积小,而这个面积就是积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ , 并且我们知道  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ . 这样可以从图中看出所有的部分和要比

$$\frac{1}{1!} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2$$

小. 因此,其部分和有上界. 又由于该级数的所有项都是正的,所以部分和是递增的. 于是部分和收敛,从而该级数收敛. 并且该级数的和也比 2 小,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2.$$

此级数的准确值由瑞士数学家欧拉(Euler, 1707—1783)求得,为  $\frac{\pi^2}{6}$ . 要证明它是非常困难的,但可以在 Fourier 级数一节中得到求解方法.

下面考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ .



同样给出  $s_n$  的数值表(见表 7.2). 从数值表上可以看出, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 部分和不趋于一个有限的数, 所以我们推测该级数是发散的. 同样地, 也可用几何的观点来解释(见图 7.2).

表 7.2

$n$	$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$	$n$	$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3.231 7	500	43.283 4
10	5.021 0	1 000	61.801 0
50	12.752 4	5 000	139.968 1
100	18.589 6		

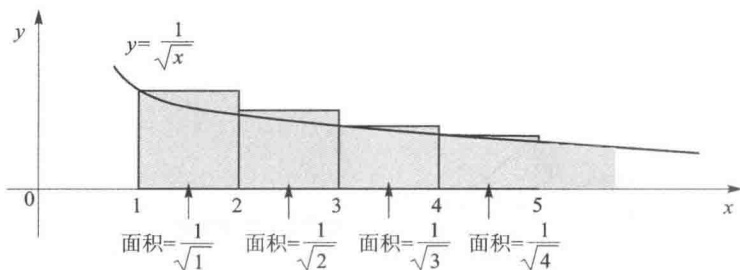


图 7.2

图 7.2 中是曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  以及位于曲线上方的矩形, 每个矩形的底边都是长度为 1 的区间, 高是函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  在此区间右端点的相应的函数值. 所以这些矩形的总面积为

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

这个面积要比  $x \geq 1$  时曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  下方的面积大, 而这个面积就是积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . 但从以前的知识中可以知道广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  发散. 也就是说, 曲线下方的区域面积是无穷大的, 所以相应的级数和必定是无穷大的, 即此级数发散.

用与上述两个级数同样的几何思想, 可以证明以下判别法.

**定理 1 (Cauchy 积分判别法)** 设  $x \geq 1$  且  $f(x)$  为区间  $[1, +\infty)$  上非负、递减的连续函数,

令  $a_n = f(n)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  同时收敛或同时发散.

**证明** 对于一般级数, 从图 7.3(a)中可以看出, 在区间  $[1, 2]$  上所对应的矩形面积是  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  右端点的值, 即  $f(2) = a_2$ . 所以比较矩形的面积和曲线  $y = f(x)$  下方从 1 到  $n$  的面积, 就可以看到

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x) dx. \quad (7.3)$$

同样地, 从图 7.3(b)中可以看出

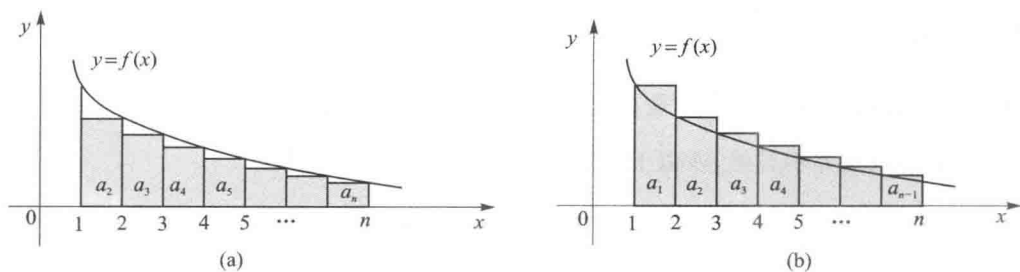


图 7.3

$$\int_1^n f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}. \quad (7.4)$$

因此,

(1) 若  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则由式(7.3)可得

$$\sum_{i=2}^n a_i \leq \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

由于  $f(x) \geq 0$ , 因此

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x) dx = M \quad (\text{假设为 } M).$$

所以序列  $\{s_n\}$  有上界.

又  $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ , 因此  $\{s_n\}$  是一个递增有界的序列, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  存在, 即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(2) 若  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  发散, 则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\int_1^n f(x) dx \rightarrow +\infty$ . 但由式(7.4)可得

$$\int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i \leq s_{n-1}.$$

由  $s_{n-1} \rightarrow \infty$ , 意味着  $s_n \rightarrow \infty$ , 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

注: 上述判别法, 不是必须要求级数或积分从  $n=1$  开始, 同样,  $f(x)$  也并不要求必须从  $x=1$  开始递减, 只要当  $x$  大于某个数  $N$  后递减即可.

例 1 讨论  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  的收敛性.

解 若  $p < 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$ ; 若  $p = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$ . 因此对于这两种情形均是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$ .

所以该级数发散.

若  $p > 0$ , 显然函数  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  是在区间  $[1, +\infty)$  上的非负、递减的连续函数, 且知广义积分

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散. 因此由 Cauchy 积分判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  当  $p > 1$  时收敛, 当  $0 < p \leq 1$  时发散. 上例的级数称为  $p$ -级数.





例 2 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  是收敛还是发散.

解 由于函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  是在区间  $[1, +\infty)$  上的非负连续函数, 但  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上的递减性并不显然, 所以下面用导数讨论之. 由于其导数

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

这样, 当  $x > e$  时,  $f'(x) < 0$ , 从而当  $x > e$  时,  $f(x)$  递减, 所以由 Cauchy 积分判别法知:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = +\infty.$$

因此此广义积分发散, 于是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  发散.

## 习题 7.2

1. 利用积分判别法来判断级数收敛还是发散.

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ; (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ ; (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ ;

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$ ; (7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$ ; (8)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1.4} + 3n^{-1.2})$ ; (9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ .

2. 画图说明

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}} < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1.3}} dx.$$

从这个级数可以得出什么结论?

## 7.3 正项级数的比较判别法

从这节开始, 将讨论正项级数的收敛的判断方法, 然后再讨论一般级数的收敛性问题.

**定义 1** 对于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 如果  $a_n \geq 0, n=1, 2, 3, \dots$ , 则称此级数为正项级数.

它的部分和的数列  $\{s_n\}$  是一个单调递增的数列, 且由 7.1 节可知, 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 如果从某一项以后  $a_n \geq 0, n=N, N+1, N+2, \dots$ , 则此级数仍然为正项级数. 于是可以得到如下定理.

**定理 1** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充分必要条件是部分和  $\{s_n\}$  有界.

**证明** 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 则部分和序列  $\{s_n\}$  为单调递增的数列, 因此  $\{s_n\}$  收敛的充分必要条件是  $\{s_n\}$  有界.

例如, 设  $b_n \geq 0, \{b_n\}$  不减且趋于  $+\infty$ , 那么  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$  发散, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$  收