工业和信息化部“十二五”规划教材

微积分

（下册）

Weijifen

薛玉梅　李　娅　王进良　编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

工业和信息化部“十二五”规划教材

微　积　分

（下册）

薛玉梅　李　娅　王进良　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是工业和信息化部“十二五”规划教材，分为上、下册。内容包括：预备知识、函数、极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分、级数、空间解析几何与向量代数、多元微分学及应用、重积分及应用、曲线积分与曲面积分、常微分方程等。

在本教材中增加了微积分中常用的初等数学的内容，便于学生查阅和补充相关知识；教材中语言简洁明了，例子经典易懂，结合大量图形的应用以及与工程实践相关的例题，使学生对知识的理解和掌握更加直观、深入。

本书可供高等院校作为教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分 / 薛玉梅，李娅，王进良编著. -- 北京 ：北京航空航天大学出版社，2015.7

ISBN 978-7-5124-1823-3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①薛… ②李… ③王… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 151174 号

微积分(下册)

薛玉梅 李 娅 王进良 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

读者信箱：goodtextbook@126.com 邮购电话：(010)82316936

北京兴华昌盛印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×1 092 1/16 印张：12 字数：307 千字

2015 年 7 月第 1 版 2015 年 7 月第 1 次印刷 印数：2 000 册

ISBN 978-7-5124-1823-3 定价：49.00 元(上下册)

《微积分》教材编写组

《微积分(上册)》

薛玉梅　主编

薛玉梅　李　娅　王进良　编著

《微积分(下册)》

李　娅　主编

李　娅　薛玉梅　编著

目　录

第 7 章　级　数

7.1　数项级数的收敛性

在实数系中，有限个实数加起来仍然是实数. 本章将讨论无穷多个实数相加可能出现的情况和特征. 例如，在《庄子・天下篇》提到“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，体现了无穷个实数相加的思想：每天截下的长度相加，即为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

从直观上讲，上述和为 1.

有限次运算与无限次运算有着本质的区别. 例如按照两种不同方式求和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=1.$$

得到两个完全不同的和数. 因此，如何定义无限次求和，什么时候和式存在，以及如何计算和式等，都需要建立完整的数学理论.

首先我们回忆一些基本的定义.

定义 1　设 $\{a_n\}$ 是任意的一个实数列，则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

为**无穷级数**或简称**级数**. 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. a_n 称为**一般项**或**通项**，$s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 称为级数的第 n 个**部分和**.

对于任意级数，可以构造一个部分和序列

$$s_1=a_1, s_2=a_1+a_2, \cdots, s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n, \cdots.$$

这个部分和的序列 $\{s_n\}$，或者有极限或者没有极限. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ 存在（是一个有限数），则称它为无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和.

定义 2　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为数项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **收敛**；否则，级数称为**发散**.

为此，当我们写 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=s$ 时，也就是把级数的充分多项相加，即要多接近数 s 就能多接近. 注意

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

例 1　讨论等比级数（几何级数）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots(a\neq 0)$ 的收敛性.

解 若 $q\neq 1$,则 $s_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$.

因为当 $|q|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$;当 $|q|>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$. 所以,当 $|q|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\dfrac{a}{1-q}$;当 $|q|>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$. 当 $q=1$ 时,$s_n=na$,$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$;当 $q=-1$ 时,$s_n=a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a$,$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在.

综上所得,当 $|q|<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛,并且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n=\dfrac{a}{1-q}$;当 $|q|\geqslant 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

例 2 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

解 由于 $s_n=1-\dfrac{1}{n+1}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$. 因此级数收敛,且和为 1.

例 3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

发散.

证明 由于

$$s_1=1,\qquad s_2=1+\frac{1}{2},$$

$$s_4=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{2},$$

$$\begin{aligned}s_8&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\&\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2},\\&\ \vdots\end{aligned}$$

所以,

$$s_{2^n}>1+\frac{n}{2}.$$

这说明当 $n\to\infty$时,$s_{2^n}\to\infty$,所以 $\{s_n\}$ 发散. 因此调和级数发散.

研究无穷级数时,一个最基本的问题是判断它的敛散性,只有在级数收敛的情况下讨论求和的问题才有意义. 首先讨论收敛级数的基本性质.

定理 1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在,可设 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$. 由于 $a_n=s_n-s_{n-1}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

定理 1 告诉我们，要判断一个级数是否收敛时，应首先考察当 $n\to\infty$ 时，该级数的通项 a_n 是否趋于零，若通项 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在，则说明该级数是发散的. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 均发散. 但定理 1 中的通项 a_n 趋于零只是级数收敛的必要条件，不是充分条件. 例如调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，尽管 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

研究级数的收敛问题，实际上就是研究部分和数列的收敛问题，这就使我们能够应用熟知的极限的知识来研究级数. 因此由极限的四则运算性质可以得到下面的定理.

定理 2　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ 也收敛，这里 α,β 为任意实数，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n. \tag{7.1}$$

证明　因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\beta\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(\forall n\in N)$. 在等式两边同时取极限即可.

例 4　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right]$ 的和.

解　因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$，且由例 2 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right]$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right]=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=5.$$

注：级数的有限项不影响它的收敛性或发散性. 例如可以证明级数 $\sum\limits_{n=10}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是收敛的. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^9}+\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

定理 3　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，把此级数的项任意组合，但不改变其先后的次序，得到的新级数

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}}+\cdots+a_{k_n})+\cdots \tag{7.2}$$

仍然收敛，这里 $k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots$，并且与原级数的和相等.

证明　假设原级数部分和序列为 $\{s_n\}$，级数(7.2)的部分和序列为 $\{s_{n_k}\}$，则 $\{s_{n_k}\}$ 为 $\{s_n\}$ 的子列，故由 $\{s_n\}$ 的收敛性可知，$\{s_{n_k}\}$ 也收敛，并且 $\{s_{n_k}\}$ 和 $\{s_n\}$ 极限相同，定理得证.

注 1：收敛级数去括号后所得级数不一定收敛. 例如：级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

收敛，但是级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

发散. 所以如果加括号后所得的级数发散，则原级数也发散.

注 2：上述定理的逆命题不成立，例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$. 但是在一定条件下，逆定理成立.

定理 4　如果上面级数(7.2)括号中的每一项符号一致，且收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明 假设级数(7.2)的部分和序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和序列为

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots.$$

由定理的假设条件，一定存在 n，使得 $n-1<k<n$，满足

$$A_{n-1} \leqslant s_k \leqslant A_n \quad 或 \quad A_n \leqslant s_k \leqslant A_{n-1}.$$

由夹逼定理可得，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

定理 4 告诉我们，有限次加法的结合律能推广到无限次加法运算.

习题 7.1

1. 求下列级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (0.6)^{n-1}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan n$；(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^2+1}$；(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$.

2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{3n+1}$ 是否收敛.

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 也收敛. 试举例说明，逆命题不成立. 但若 $a_n \geqslant 0$，$n \in \mathbf{N}$，则逆命题也成立，试证之.

4. 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \neq 0)$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 发散.

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 n 个部分和为 $s_n = \dfrac{n-1}{n+1}$，求 a_n 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

6. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 n 个部分和为 $s_n = 3 - n2^{-n}$，求 a_n 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$.

(1) 求部分和 s_1，s_2，s_3 和 s_4. 你认出这些分母了吗？利用这个规律猜测 s_n 的公式.
(2) 利用数学归纳法证明你的猜测.
(3) 证明所给的无穷级数收敛并求其和.

7.2 和式的积分判别法与估计

一般来说，求出无穷级数的准确和是困难的. 我们能够对几何级数求和，是因为能够求出其第 n 个部分和 s_n 的简单的公式. 但通常计算 s_n 是不容易的. 因此在下面的几节里将介绍几种判别法，可以不用求出级数的部分和就能确定它是否收敛.

下面从研究如下的级数开始：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

前 n 项和 s_n 没有一个简单的表达式，但可以计算一些数值，如表 7.1 所列.

表　7.1

n	$s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$	n	$s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$
5	1.463 6	500	1.642 9
10	1.549 8	1 000	1.643 9
50	1.625 1	5 000	1.644 7
100	1.635 0		

可以看到，当 $n\to\infty$ 时部分和趋于一个约为 1.64 的数，并且看起来此级数似乎收敛. 为了验证这个事实，可以用几何观点来说明(见图 7.1).

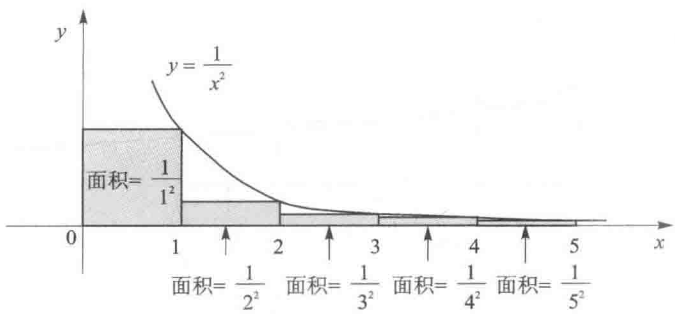

图 7.1

图 7.1 中是曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 以及位于曲线下方的矩形，每个矩形的底边都是长度为 1 的区间，高是函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 在此区间右端点的相应的函数值. 所以这些矩形的总面积为

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

若不考虑图 7.1 中的第一个矩形，那么剩下的矩形的总面积要比 $x\geqslant 1$ 时曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 下方的面积小，而这个面积就是积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$，并且我们知道 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=1$. 这样可以从图中看出所有的部分和要比

$$\frac{1}{1!}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=2$$

小. 因此，其部分和有上界. 又由于该级数的所有项都是正的，所以部分和是递增的. 于是部分和收敛，从而该级数收敛. 并且该级数的和也比 2 小，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots<2.$$

此级数的准确值由瑞士数学家欧拉(Euler，1707—1783)求得，为 $\frac{\pi^2}{6}$. 要证明它是非常困难的，但可以在 Fourier 级数一节中得到求解方法.

下面考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$.

同样给出 s_n 的数值表(见表 7.2). 从数值表上可以看出,当 $n\to\infty$时,部分和不趋于一个有限的数,所以我们推测该级数是发散的. 同样地,也可用几何的观点来解释(见图 7.2).

表 7.2

n	$s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}$	n	$s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3.231 7	500	43.283 4
10	5.021 0	1 000	61.801 0
50	12.752 4	5 000	139.968 1
100	18.589 6		

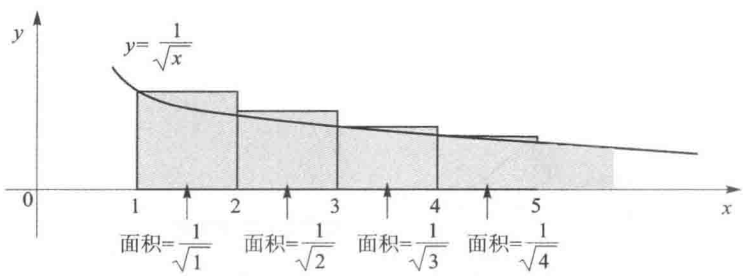

图 7.2

图 7.2 中是曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$以及位于曲线上方的矩形,每个矩形的底边都是长度为 1 的区间,高是函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$在此区间右端点的相应的函数值. 所以这些矩形的总面积为

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

这个面积要比 $x\geqslant 1$ 时曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$下方的面积大,而这个面积就是积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. 但我们从以前的知识中可以知道广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散. 也就是说,曲线下方的区域面积是无穷大的,所以相应的级数和必定是无穷大的,即此级数发散.

用与上述两个级数同样的几何思想,可以证明以下判别法.

定理 1(Cauchy 积分判别法) 设 $x\geqslant 1$ 且 $f(x)$为区间$[1,+\infty)$上非负、递减的连续函数,令 $a_n=f(n)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

证明 对于一般级数,从图 7.3(a)中可以看出,在区间$[1,2]$上所对应的矩形面积是$f(x)$在区间$[1,2]$右端点的值,即 $f(2)=a_2$. 所以比较矩形的面积和曲线 $y=f(x)$下方从 1 到 n 的面积,就可以看到

$$a_2+a_3+\cdots+a_n\leqslant\int_1^n f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.3}$$

同样地,从图 7.3(b)中可以看出

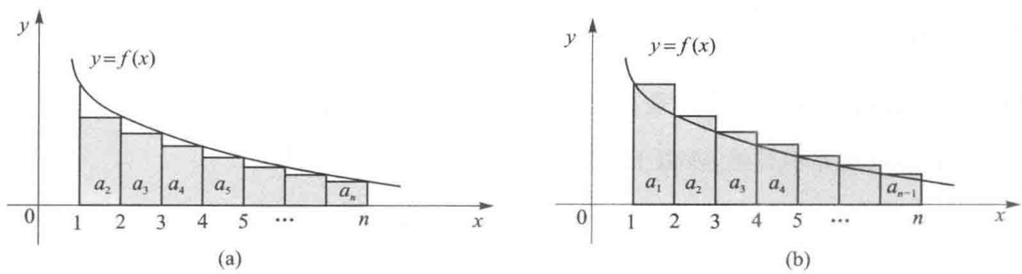

图 7.3

$$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}. \tag{7.4}$$

因此，

(1) 若 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则由式(7.3)可得

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $f(x)\geqslant 0$. 因此

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = M \quad (\text{假设为 } M).$$

所以序列 $\{s_n\}$ 有上界.

又 $s_{n+1}=s_n+a_{n+1}\geqslant s_n$，因此 $\{s_n\}$ 是一个递增有界的序列，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则当 $n\to\infty$ 时，$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x \to +\infty$. 但由式(7.4)可得

$$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i \leqslant s_{n-1}.$$

由 $s_{n-1}\to\infty$，意味着 $s_n\to\infty$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注：上述判别法，不是必须要求级数或积分从 $n=1$ 开始，同样，$f(x)$ 也并不要求必须从 $x=1$ 开始递减，只要当 x 大于某个数 N 后递减即可.

例 1　讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的收敛性.

解　若 $p<0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p}=+\infty$；若 $p=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}=1$. 因此对于这两种情形均是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}\neq 0$. 所以该级数发散.

若 $p>0$，显然函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ 是在区间 $[1,+\infty)$ 上的非负、递减的连续函数，且知广义积分 $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散. 因此由 Cauchy 积分判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $0<p\leqslant 1$ 时发散. 上例的级数称为 p-级数.

例 2 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 是收敛还是发散.

解 由于函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 是在区间$[1,+\infty)$上的非负的连续函数,但 $f(x)$在区间$[1,+\infty)$上的递减性并不显然,所以下面用导数讨论之.由于其导数

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

这样,当 $x>\mathrm{e}$ 时,$f'(x)<0$,从而当 $x>\mathrm{e}$ 时,$f(x)$递减,所以由 Cauchy 积分判别法知:

$$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)^2}{2}=+\infty.$$

因此此广义积分发散,于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 发散.

习题 7.2

1. 利用积分判别法来判断级数收敛还是发散.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n+1}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-n}$; (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n+1}$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{-1.4}+3n^{-1.2})$; (9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$.

2. 画图说明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1.3}}<\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{1.3}}\mathrm{d}x.$$

从这个级数可以得出什么结论?

7.3 正项级数的比较判别法

从这节开始,将讨论正项级数的收敛的判断方法,然后再讨论一般级数的收敛性问题.

定义 1 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,如果 $a_n\geqslant 0,n=1,2,3,\cdots$,则称此级数为**正项级数**.

它的部分和的数列$\{s_n\}$是一个单调递增的数列,且由 7.1 节可知,对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,如果从某一项以后 $a_n\geqslant 0,n=N,N+1,N+2,\cdots$,则此级数仍然为正项级数.于是可以得到如下定理.

定理 1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是部分和$\{s_n\}$有界.

证明 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数,则部分和序列$\{s_n\}$为单调递增的数列,因此$\{s_n\}$收敛的充分必要条件是$\{s_n\}$有界.

例如,设 $b_n\geqslant 0$,$\{b_n\}$不减且趋于$+\infty$,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)$ 收