

人教版新教材

同步学案

黄冈兵法

黄冈市教学创新课题组 编写



初三几何

陕西师范大学出版社

同步学案

黄冈兵法

主 编	南秀全					
副 主 编	石 润	王 飞				
编 者	杨仕春	盛春贤	肖九河	姜文清	查子健	
	付 风	何 仍	余曙光	付志奎	胡建仪	
	江志军	吴俭峰	杨仕春	王田平	余 石	
	沈立新	余 梦	魏友成	李平友	尚志杰	
	师旭武	张益波	王 非	郭 佳	胡创新	
	杨 俊	徐杏平	李 平	刘海滨	田必耕	
	杜必武					

初三几何

陕西师范大学出版社

图书代号:JF3N0094

图书在版编目(CIP)数据

黄冈兵法·初三几何/南秀全编. - 西安:陕西师范大学出版社,2001

ISBN 7-5613-1111-7

I. 黄... II. 南... III. 数学课-初中-升学参考资料

IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 25524 号

责任编辑 陈爱姿

责任校对 杜世雄

装帧设计 徐明

出版发行:陕西师范大学出版社

(西安市南郊 陕西师大 120 信箱 邮编 710062)

<http://www.snuph.com> E-mail:if-centre@snuph.com

印 制:陕西宝石兰印务有限公司

开本 850×1168 1/32 印张 16.25 插页 2 字数 499 千

版次印次:2003 年 7 月第 3 版 2003 年 7 月第 1 次印刷

定 价:19.00 元

开户行:光大银行西安南郊支行 账号:0303070-00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电 话:(029)5307864 5233753 5251046(传真)

防伪提示

我社 2003 年版文教图书封面覆有社徽和社名的全息激光防伪膜, 请注意甄别。如发现盗版, 欢迎拨打举报电话。经查实将给予举报者重奖。举报电话:(029)5308142



我们追求什么

——代出版说明

先说书名 这是一套依据人教版试用修订本教材编写的同步导学丛书。之所以叫“兵法”，表达了我们始终如一的追求：要拿出行军打仗的勇气和态度去对待学习与考试。中考是一场没有硝烟的战争，是人生最关键的一道坎，其残酷性与艰巨性往往只有当事者心知肚明，难以与外人启齿。能否打赢中考这一仗，得看装备精良与否。最好的装备，便是能够全方位、多角度提供学习方法、最实用攻关战略和最佳训练方案的“锦囊妙计”。古之战将有《孙子兵法》，所向披靡，战无不胜，攻无不克；而今学子有《黄冈兵法》，胜券在握，胸有成竹，必成硕果。

再说黄冈 湖北省黄冈市位于长江之滨，山清水秀，人杰地灵。历史上黄冈人因讲究兵法，涌现了共和国几百名将军，被称为“将军之乡”；因讲究教学之道，出现了李四光、闻一多等科学家和文学家，有“教授县”的美誉。近十几年来，黄冈人追求高效率的教育质量，每年考入北大、清华、中科大、复旦等名校的学生数以百计。黄冈中学的升学率几乎百分之百，上重点线 90% 以上。在国际奥林匹克竞赛中，黄冈中学取得了数、理、化八枚金银牌的辉煌战绩。黄冈严谨科学的教学方法和应考训练方法日益引起普遍关注。对于广大黄冈中考考生来说，能够考取黄冈中学，当然无尚光荣。本丛书在解题的难度与可信度上便是以考取黄冈中学和市属重点中学为标高而设计的。其典型性具有放之全国而普遍适用的效果与价值。

新课程理念必须在同步教学中得到落实 黄冈人勇于探索、追求，独创了“能力阶梯升级，考点分项落实”的教学方法，将新课程理念化繁为简、化难为易，逐条逐项落实到同步教学中去：突出重点，授之以渔；突破难点，培养能力。丛书根据国家教育部颁布的



最新课程标准的要求,突出新教材中知识、能力、素质三元合一教学模式,建构全新的“方法、实践、创新”三位一体的教学理念,侧重学法指导,启迪思维方法。训练题的设计,体现“精、活、新、准”的原则,一课一练,分层递进,既有课内“基础能力测试”,又有能力提高型“发展能力测试”。让学生练在关键点上,澄清概念。在练中掌握规律,思路清晰;在练中产生灵感,提高素质,完成知识向能力的成功过渡。

突破传统模式 引领教辅潮流 《黄冈兵法》是我社的品牌图书,自出版以来连年畅销,荣获全国优秀教育图书奖和全国优秀畅销书奖。几年来,经过全国几百所中学教学效果检查,一致反映该丛书以教法独特、学法成功、中考试题命中率高的特点,一跃成为全国教辅名牌。在一片赞誉声中,丛书策划人和作者们并没有沾沾自喜,而是深入到全国数十所普通中学调研,听取意见和建议。今年,我们集中了黄冈一代名师群策群力,根据最新中考改革的思路和走向,以及新教材、新学习方法等问题,进行了专题讨论,并根据各科特点制订了同步学习的应对方案,其精华已经完全融入《黄冈兵法》丛书。我们有理由信赖她,并将其推广到全国。我们的追求是以《黄冈兵法》为火种,点燃全国各地中学生创新思维的火把;创立教辅名牌,修建一条通向名牌中学的高速公路。

请记住黄冈兵法要诀:

每个人的潜能远远超过已经实现的那一半

你的大脑就像一个沉睡的巨人

成功的关键在于需要火种去点燃

《黄冈兵法》——采集火种的奥林匹斯山

如果你对本书满意,请告诉你的同学与老师

如果你不满意,请告诉我们——你最诚恳的朋友

《黄冈兵法》策划组



MU LU

目 录

第六章 解直角三角形

6.1 正弦和余弦	1
6.2 正切和余切	13
6.3 用计算器求锐角三角函数值和由锐角三角函数求 锐角	23
6.4 解直角三角形	29
6.5 应用举例	44
6.6 实习作业	66

第七章 圆

7.1 圆	71
7.2 过三点的圆	82
7.3 垂直于弦的直径	89
7.4 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系	104
7.5 圆周角	115
7.6 圆内接四边形	133
7.7 直线与圆的位置关系	147
7.8 切线的判定和性质	159
7.9 三角形的内切圆	177
7.10 切线长定理	191





7.11 弦切角	209
7.12 和圆有关的比例线段	227
7.13 圆和圆的位置关系	264
7.14 两圆的公切线	286
7.15 相切在作图中的应用	310
7.16 正多边形和圆	314
7.17 正多边形的有关计算	322
7.18 画正多边形	335
7.19 探究性活动:镶嵌	338
7.20 圆周长、弧长	345
7.21 圆、扇形、弓形的面积	359
7.22 圆柱和圆锥的侧面展开图	381
小节与复习	390
答案与提示	431



第六章 解直角三角形

6.1 正弦和余弦

学点探究分析

重点 锐角的正弦和余弦的定义,特殊角的正弦、余弦的有关计算.

难点 锐角的正弦、余弦的定义的理解及其增减性的规律.

探究点 本节内容是以直角三角形为基础而建立的锐角的正弦和余弦的定义,因此在解题时,首先要明确应用 $\sin A = \frac{a}{c}$ 和 $\cos A = \frac{b}{c}$ 两个关系式的前提条件是 $\angle C = 90^\circ$. 在解决实际问题时,往往把已知条件和待求的结论构造在直角三角形中,建立正弦、余弦的数学模型. 要善于进行正弦和余弦值的转化. 由于正弦、余弦建立在直角三角形中,因此往往与勾股定理联系密切,正、余弦的计算往往与方程、几何等内容融合在一起,使题目增添了活力.

学习方法技巧

明确正弦、余弦是在直角三角形中建立的,弄清其概念是关键. 掌握正弦、余弦的增减性和特殊角的正、余弦值对解题非常有帮助,可以通过特殊角的正、余弦的值来检验正弦、余弦的增减性,从感性上认识,再结合图形上升到理性认识.

本节主要识记内容:

(1) 正弦和余弦的定义,以及由定义推出的关系式,例如 $\sin A = \frac{a}{c}$, $a = c \cdot \sin A$, $c = \frac{a}{\sin A}$ 等.

(2) 掌握 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 角的正弦和余弦值,并会逆推.

在记忆时不必死记硬背,可根据正、余弦关系记忆,如: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 0^\circ = \cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ =$



$$\cos 0^\circ = 1.$$

(3) 互余角的正弦和余弦关系式: 若 $A + B = 90^\circ$, 则 $\sin A = \cos B$, $\cos A = \sin B$.

(4) 同角的正弦和余弦的关系式: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

能力升级训练

【例1】如图 6-1-1, $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 5$. (1) 求 AB 的长; (2) 求 $\sin A$, $\cos A$ 的值; (3) 求 $\sin^2 A + \cos^2 A$ 的值; (4) 比较 $\sin A$ 与 $\cos B$ 的大小.

思维技巧 本题考查正弦、余弦的定义, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, 已知两直角边长求斜边长, 可应用勾股定理, 再利用两直角边长与斜边长的比分别求出 $\sin A$, $\cos A$ 的值, 据同角正、余弦的关系式可得 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. 因 $\angle A + \angle B = \angle C = 90^\circ$, 所以 $\sin A = \cos B$.

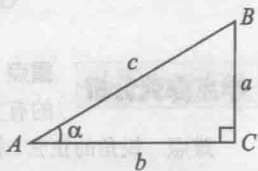


图 6-1-1

解 (1) $\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 5$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

$$(2) \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}, \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}.$$

$$(3) \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

(4) 三角形中 $\angle C = 90^\circ$, 故 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 互余角的正、余弦值相等, 即 $\sin A = \cos B$.

激活思维 应用正弦、余弦的定义解题是在直角三角形中进行的. 在解这类题时, 通常与勾股定理联系起来求出三角形中有关的边长.

同类变式 1. 已知 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $\angle B = 90^\circ - \angle A$. 求 $\sin B$ 的值.

2. (扬州市, 2002) 等腰三角形的底角为 75° , 顶角是 , 顶角的余弦值是 .

分析 从 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ 中可知 $\angle A$, $\angle B$ 是互为余角, 由此可以考虑利用互为余角的正弦、余弦关系进行转化; 或根据正弦值、余弦值与角的对应关系, 先求出角的大小.

解 1. 方法一: $\angle B = 90^\circ - \angle A$, $\therefore \angle A = 90^\circ - \angle B$.

$$\therefore \sin B = \cos(90^\circ - \angle B) = \cos A.$$



$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

方法二: $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \angle A = 30^\circ.$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A, \therefore \angle B = 60^\circ. \therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. $\therefore$ 等腰三角形的底角为 75° ,

$$\therefore \text{顶角为 } 180^\circ - 75^\circ \times 2 = 30^\circ. \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

思维拓展 (海南省, 1998) 解 $\text{Rt} \triangle ABC$, 如果已知两个元素 a, b , 可以求出其余三个未知元素 $c, \angle A, \angle B$, 如图 6-1-2, 请你按照下列步骤完成求解过程.

求解过程:

第一步: 由条件 a, b $\xrightarrow{\text{用关系式}}$ (1) $\xrightarrow{\text{求出}}$ (2);

第二步: 由条件 (3) $\xrightarrow{\text{用关系式}}$ (4) $\xrightarrow{\text{求出}}$ (5);

第三步: 由条件 (6) $\xrightarrow{\text{用关系式}}$ (7) $\xrightarrow{\text{求出}}$ (8).

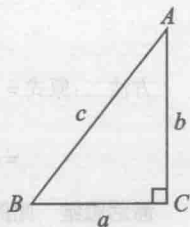


图 6-1-2

熟悉解直角三角形的四种基本类型是解本例的关键. 本例解法不止一种, 读者可以试试.

解 (1) $a^2 + b^2 = c^2$; (2) c ; (3) a, c ; (4) $\sin A = \frac{a}{c}$; (5) $\angle A$;

(6) $\angle A$; (7) $\angle B = 90^\circ - \angle A$; (8) $\angle B$.

【例 2】 求下列各式的值.

(1) $2\cos 30^\circ - 2\sqrt{2}\sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ$;

(2)
$$\frac{\cos 60^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 45^\circ + \sqrt{3}\cos 30^\circ}{\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ}.$$

思维技巧 本题考查特殊角的正弦值、余弦值及计算、利用特殊角的正弦值、余弦值进行代换, 再按混合运算顺序求解. 牢记特殊角的正、余弦值, 准确计算是关键.

解 (1) 方法一: 原式 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$



$$\begin{aligned}\text{方法二:原式} &= 2\cos 30^\circ - 2\sqrt{2}\cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= \cos 30^\circ (2 - 2\sqrt{2}\cos 45^\circ) = \cos 30^\circ (2 - 2) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2) 方法一:原式} &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{方法二:原式} &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}.$$

激活思维 此例两个小题都给出了两种解法. 如果灵活运用公式可减少计算量, 同时还可避免出现有些特殊角的正、余弦值记混淆的错误.

同类变式 计算下列各式的值:

$$(1) \cos^2 45^\circ - \frac{1}{\cos 60^\circ} + \frac{1}{\sin 90^\circ} + \cos^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ;$$

$$(2) \sqrt{\left(\sin 45^\circ - \frac{1}{2}\right)^2} - |\sin 30^\circ - 2\sin 60^\circ| + (\cos 45^\circ)^{-1}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 (1) 原式} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 + 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - 2 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} = \left|\sin 45^\circ - \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{1}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right| + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}$$

$$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right| + \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}.$$



思维拓展 已知: $\alpha + \beta = 90^\circ$, 且 $\sin \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$, 求锐角 α .

解 $\because \alpha + \beta = 90^\circ$, 且 $\sin \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$,

$$\therefore \sin \alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \sin \alpha + \sin \alpha = \sqrt{3}.$$

$$\text{即 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \alpha \text{ 为锐角, } \therefore \alpha = 60^\circ.$$

【例3】 (巴中市, 2002) 如果 $\angle A$ 为锐角, $\cos A = \frac{4}{5}$, 那么().

A. $0^\circ < A < 30^\circ$

B. $30^\circ < A < 45^\circ$

C. $45^\circ < A < 60^\circ$

D. $60^\circ < A < 90^\circ$

思维技巧 本题考查余弦值在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 间的增减性. 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 间, 余弦值随角度的增大而减小. 根据特殊角的余弦值, 估计 $\frac{4}{5}$ 在哪两个特殊角的余弦值之间, 然后利用余弦值性质求解.

解 $\because \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \cos 45^\circ < \cos A < \cos 30^\circ$.

$\therefore$ 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 间, 余弦值随角度的增大而减小.

$$\therefore 30^\circ < A < 45^\circ.$$

因此, 选 B.

激活思维 既要掌握余弦值在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 间变化规律, 又要牢记一些特殊角的余弦值方能求解.

同类变式 比较 $\sin 46^\circ$ 和 $\cos 46^\circ$ 的大小.

分析 把 $\sin 46^\circ$ 和 $\cos 46^\circ$ 化为同名三角函数后, 再依据正(余)弦的增减性进行比较.

解 方法一: $\because \cos 46^\circ = \sin 44^\circ$, 且 $\sin 44^\circ < \sin 46^\circ$,

$$\therefore \sin 46^\circ > \cos 46^\circ.$$

方法二: $\because \sin 46^\circ = \cos 44^\circ$, 且 $\cos 44^\circ > \cos 46^\circ$,

$$\therefore \sin 46^\circ > \cos 46^\circ.$$

思维拓展 下列式子成立的是 ()

A. $1 < \sin 30^\circ < \cos 45^\circ < \frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3} < \sin 30^\circ < \cos 45^\circ < 1$



C. $\frac{\sqrt{3}}{3} < \sin 30^\circ < 1 < \cos 45^\circ$ D. $\sin 30^\circ < \frac{\sqrt{3}}{3} < \cos 45^\circ < 1$

解 $\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$,

故选 D.

【例 4】(1) 已知 α 为锐角, 且 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, 求 $\cos \alpha$ 的值;

(2) 若 α 为锐角, 且 $2\cos^2 \alpha + 7\sin \alpha - 5 = 0$, 求 α 的度数.

思维技巧 本题考查同角三角函数的相互关系, 要善于应用恒等式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 及其变式进行转化.

解 (1) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$,

$\therefore \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$, 负值舍去, 即 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

(2) 原方程可化为 $2(1 - \sin^2 \alpha) + 7\sin \alpha - 5 = 0$.

$\therefore 2\sin^2 \alpha - 7\sin \alpha + 3 = 0$, $(\sin \alpha - 3)(2\sin \alpha - 1) = 0$.

解得 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ 或 $\sin \alpha = 3$ (舍去), $\therefore \alpha = 30^\circ$.

激活思维 由于利用“ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ”公式, 在解题中出现两解, 要结合三角函数的几何性质 (如 $0 < \sin \alpha < 1$) 检验并舍去多余解.

同类变式 已知: $\cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 求 $\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$ 的值.

解 $\because \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

$\therefore \cos \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$,

$\therefore \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

思维拓展 已知二次方程 $3x^2 - 4x\sin \alpha + 2(1 - \cos \alpha) = 0$ 有两个不相等的实数根, α 为锐角, 求 α 的范围.

解 由判别式 $\Delta > 0$, 得 $16\sin^2 \alpha - 24(1 - \cos \alpha) > 0$,

即 $2\sin^2 \alpha - 3(1 - \cos \alpha) > 0$.

$\therefore 2\sin^2 \alpha - 3(1 - \cos \alpha) = 2(1 - \cos^2 \alpha) - 3(1 - \cos \alpha)$

$= 2(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) - 3(1 - \cos \alpha)$

$= (1 - \cos \alpha)(2\cos \alpha - 1)$.

$\therefore (1 - \cos \alpha)(2\cos \alpha - 1) > 0$.

$\therefore \frac{1}{2} < \cos \alpha < 1$. $\therefore 0^\circ < \alpha < 60^\circ$.



【例5】 m 为何值时, 方程 $(m+15)x^2 - (3m+5)x + 12 = 0$ 的两根分别是一个直角三角形两锐角的正弦.

思维技巧 本题考查三角函数与一元二次方程知识的综合应用, 应联想到一元二次方程根与系数的关系, 建立含 m 的等式.

解 当 $m = -15$ 时, 不满足题目要求.

当 $m \neq -15$ 时, 设直角三角形的两锐角为 A, B ,

$$\text{则} \begin{cases} \sin A + \sin B = \frac{3m+5}{m+5}, & \text{①} \\ \sin A \cdot \sin B = \frac{12}{m+5}. & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①式两边平方, 得 } \sin^2 A + 2\sin A \sin B + \sin^2 B = \left(\frac{3m+5}{m+5}\right)^2. \quad \text{③}$$

$\because A + B = 90^\circ$, 故 $\sin B = \cos A$, 则 $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$.

$$\text{再将②式代入③式, 得 } 1 + \frac{24}{m+15} = \left(\frac{3m+5}{m+15}\right)^2.$$

整理, 得 $m^2 - 3m - 70 = 0$, 解得 $m_1 = 10, m_2 = -7$.

经检验, 当 $m = -7$ 时, 原方程无实数根.

故 m 的值为 10.

激活思维 与一元二次方程的结合问题, 要检验根的实际意义. 也可把 $m = -7$ 代入②中, 右边 < 0 , 而左边 > 0 , 故可判断 $m = -7$ 舍去. 本题中的两个隐含条件解题时要注意: ①方程有两根, 则它是一元二次方程; ②在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 则 $\sin A = \cos B$.

同类变式 方程 $(m+5)x^2 - (2m+5)x + 4 = 0$ 的两个根是直角三角形两锐角的正弦值, 求 m 的值.

解 设直角三角形两个锐角为 α, β , 则方程两根为 $\sin \alpha, \sin \beta$, 又 $\sin \beta = \cos \alpha$,

$$\text{所以} \begin{cases} m+5 \neq 0, & \text{①} \\ \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2m+5}{m+5}, & \text{②} \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{m+5}. & \text{③} \end{cases}$$

由①得 $m \neq -5$,

$$\text{将②}^2, \text{得 } \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{2m+5}{m+5}\right)^2,$$



$$\text{则 } 1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \left(\frac{2m+5}{m+5}\right)^2. \quad \textcircled{4}$$

把③代入④化简得:

$$3m^2 + 2m - 40 = 0, \text{解之 } m = \frac{10}{3} \text{ 或 } m = -4.$$

$\because \sin\alpha, \cos\alpha$ 均为正数, $\therefore m = -4$ 舍去.

$$\text{当 } m = \frac{10}{3} \text{ 时, 判别式 } \Delta = (2m+5)^2 - 4 \times 4(m+5) > 0,$$

$$\therefore m = \frac{10}{3}.$$

思维拓展 (盐城市, 1997), 在 $\triangle ABC$ 中,

(1) 若 $\angle C = 90^\circ$, $\cos A = \frac{12}{13}$, 求 $\sin B$ 的值.

(2) 若 $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 65^\circ$, 试比较 $\cos A$ 与 $\sin B$ 的大小.

(3) 若此三角形为任意三角形, 能否判断 $\cos A + \cos B + \cos C$ 与 $\sin A + \sin B + \sin C$ 的大小? 若能, 证明你的结论; 若不能, 请说明理由.

解 (1) 由题意知, $\angle A + \angle B = 90^\circ$,

$$\therefore \sin B = \cos(90^\circ - B) = \cos A = \frac{12}{13}.$$

(2) $\because \angle A + \angle B = 90^\circ$, $\therefore \cos A = \sin B$.

$$\therefore \cos 35^\circ = \sin 55^\circ < \sin 65^\circ, \text{ 即 } \cos A < \sin B.$$

(3) 可以比较.

$$\because \angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C > 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A > 90^\circ - \angle B.$$

又 $\because \angle A, 90^\circ - \angle B$ 均在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之间,

$$\therefore \cos A < \cos(90^\circ - \angle B), \text{ 即 } \cos A < \sin B < 0.$$

同理可得 $\cos B < \sin C < 0$, $\cos C < \sin A < 0$.

$$\therefore \cos A + \cos B + \cos C < \sin A + \sin B + \sin C.$$

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (泰州市, 乐山市, 2001) 已知 α 为锐角, 且 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\cos\alpha =$ _____.



(2) (曲靖, 2001) $\sin 41^\circ$ 与 $\sin 42^\circ$ 的大小关系是 $\sin 41^\circ$ _____ $\sin 42^\circ$ (填“>”或“<”号).

(3) (广州市, 2001) 求值: $\frac{1}{2} \sin 60^\circ \times \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ =$ _____.

(4) (青岛市, 2001) 如果 $\angle A$ 是锐角, $\cos A = 0.618$, 那么 $\sin(90^\circ - A)$ 的值为 _____.

(5) (山西省, 2001) 计算: $2\sin 60^\circ - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\sqrt{2} - 1)^0 =$ _____.

(6) (成都市, 2001) 计算: $2\sin 45^\circ - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} =$ _____.

(7) (天津市, 2000) $\sin^2 72^\circ + \sin^2 18^\circ =$ _____.

(8) (贵阳市, 2002) 已知 $\cos A - \frac{1}{2} = 0$, 则锐角 $\angle A =$ _____.

(9) (邵阳市, 2000) 如图 6-1-3, 已知在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $\sin A = \frac{3}{5}$, 则 $BC =$ _____.

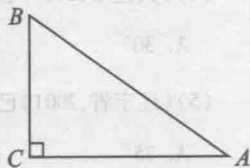


图 6-1-3

(10) (泰州市, 2000) 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, 则 $\cos B =$ _____.

(11) (辽宁省, 2000) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$, 则 $\cos B =$ _____.

(12) (内江市, 2000) $\text{Rt} \triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AB = 5$, 则 $\sin A =$ _____.

(13) (常州市, 2000) 如图 6-1-4, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , $AD = 4$, $\sin \angle ACD = \frac{4}{5}$, 则 $CD =$ _____, $BC =$ _____.

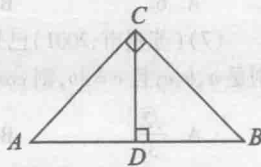


图 6-1-4

(14) (四川省, 2000) 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cos A = \frac{1}{5}$, $\sin B = |n| - \frac{4}{5}$, 那么 n 的值是 _____.

(15) 将 $\cos 21^\circ$, $\cos 37^\circ$, $\sin 41^\circ$, $\cos 46^\circ$ 的值, 按由小到大的顺序排列是 _____.



2. 选择题

- (1) (甘肃省, 2001) 若 α 是锐角, $\sin \alpha = \cos 50^\circ$, 则 α 等于 ()
A. 20° B. 30° C. 40° D. 50°
- (2) (荆州市, 2001) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $\sin A = \frac{3}{5}$, 则 AC 的长是 ()
A. 3 B. 4 C. 32 D. 46
- (3) (南京市, 2001) 已知在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{1}{2}$, 则 $\cos B$ 的值等于 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1
- (4) (大连市, 2001) 若 $\angle A$ 为锐角, 且 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\angle A$ 的度数为 ()
A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
- (5) (辽宁省, 2001) 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 α 是锐角, 则 $\alpha =$ ()
A. 75° B. 60° C. 45° D. 30°
- (6) (绍兴市, 2001) $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若 $BC = 4$, $\sin A = \frac{2}{3}$, 则 AC 的长为 ()
A. 6 B. $2\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{13}$
- (7) (苏州市, 2001) 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别是 a 、 b 、 c , 且 $c = 3b$, 则 $\cos A =$ ()
A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{3}$
- (8) (杭州市, 嘉兴市, 2001) 已知 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则锐角 A 的度数是 ()
A. 30° B. 45° C. 50° D. 60°
- (9) (广州市, 2001) 如果 α 是锐角, 且 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 那么 $\sin \alpha$ 的值是 ()
A. $\frac{9}{25}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{16}{25}$