高等院校通识教育“十二五”规划教材

高等数学

学习指南（下册）

■ 卓相来 宋治涛 常正波 郭花 主编

■ 李刚 潘雅丽 梁霄 副主编

人民邮电出版社

POSTS & TELECOM PRESS

高等院校通识教育“十二五”规划教材

高等数学
学习指南
（下册）

卓相来 宋治涛 常正波 郭花 主 编
李刚 潘雅丽 梁霄 副主编

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指南. 下册 / 卓相来等主编. -- 北京：
人民邮电出版社，2014.9
高等院校通识教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-36517-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①卓… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－
教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第194494号

内 容 提 要

本套教材是按照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的基本要求编写的，全套教材共分 12 章，次序安排与同济大学《高等数学》（第六版）相一致，每一节都包含学习目标、内容提要、典型例题与方法、教材习题解答 4 部分内容；每一章的最后是本章综合例题解析与同步测试题。

本书适合作为高等院校“高等数学”相关课程的辅导教材，也可供自学者阅读参考。

◆ 主　　编　卓相来　宋治涛　常正波　郭　花
副 主 编　李　刚　潘雅丽　梁　宵
责任编辑　王亚娜
执行编辑　肖　稳
责任印制　张佳莹　杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：15　　2014 年 9 月第 1 版
字数：354 千字　　2014 年 9 月北京第 1 次印刷

定价：26.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

高等数学是我国高等院校中的一门重要理论基础课。它不仅是理工科各专业的基础和工具，更是对培养学生的创新实践能力和科学精神具有重要作用，同时也是全国硕士研究生入学考试的统考科目。与初等数学相比，高等数学的理论更加抽象，逻辑推理更加严密。初学者往往对高等数学的概念和理论感到抽象难懂，解决问题缺少思路和方法。我们编写本书的目的就是帮助读者明确学习要求，理清知识脉络，启发解题思路和掌握计算方法，提高综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，为后继课程的学习和将来的考研打下坚实的基础。

本套教材是按照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的基本要求编写的，也是编者多年从事高等数学教学和考研辅导工作的结晶。全套教材共分 12 章，次序安排与同济大学《高等数学》(第六版)相一致，每一节包含学习目标、内容提要、典型例题与方法、教材习题解答四部分内容；每一章的最后是本章综合例题解析与同步测试题。

一、学习目标：旨在帮助读者了解考研大纲的具体要求，明确本节的重点、考点及应掌握的程度。

二、内容提要：主要对本节涉及的基本概念、基本定理进行系统梳理、凝练与归纳，便于读者回顾教材内容、掌握基本知识点。

三、典型例题与方法：将本节重点、难点、考点归结为基本题型，针对每一种基本题型给出丰富的例题，对例题进行详细的分析与解答，并对学习过程中易犯的错误进行分析，强调知识的细节与解题中注意的问题。

四、本章综合例题解析：选题强调综合性，力求涵盖各类题型，并有部分考研真题，着重分析解决问题的思路和方法，部分题目给出多种解法，以开拓思路，使读者全面理解和掌握本章的基本概念、基本理论和解决问题的基本方法。

五、同步测试题：每章均配有同步测试题及解答，方便读者自测。

六、习题选解：对配套教材同济大学《高等数学(第六版)》的部分较难习题给出详细解答。

作为高等数学这门课程的学习指南，在知识的归纳和例题的分析过程中，坚持由浅入深、循序渐进的原则，力求阐明重点，突出解题思路和方法，切合不同学习者的实际需要。

在编写过程中，我们参考了同济大学数学系编写的《高等数学》等许多书籍及文献，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中谬误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者
2014 年 5 月

目录

第八章

空间解析几何与向量代数

第一节　向量及其线性运算

1.1　学习目标

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的线性运算，理解单位向量、方向角、方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

1.2　内容提要

1. 空间直角坐标系

(1) 空间直角坐标系　在空间取一定点 O 和三条两两相互垂直且都以 O 为原点的坐标轴，依次记为 x 轴、y 轴、z 轴，它们构成一个空间直角坐标系，其中 x 轴、y 轴、z 轴的正向符合右手规则. 在空间直角坐标系中，空间点 P 用三元有序数组 (x,y,z) 来表示，称为点 P 的坐标，记为 $P(x,y,z)$.

(2) 坐标轴　坐标系中的 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)统称为坐标轴，与坐标轴同方向的三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为基本向量.

(3) 坐标面　由任意两个坐标轴所确定的平面称为坐标面，分别是 xOy 面、yOz 面、zOx 面，三个坐标面将空间分为 8 个卦限.

(4) 两点距离公式　设空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2. 向量及其坐标

(1) 向量的坐标　设有 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

(2) 向量的模和方向余弦　设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则

① 向量的模　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

② 方向角与方向余弦　向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴 x,y,z 的夹角 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角；它们的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，显然有

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},$$

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

③ 向量的单位化　与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

(3) 向量的投影

性质 1　$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴正向的夹角；

性质 2　$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}\pm\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；

性质 3　$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

3. 向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，$\lambda$ 是实数，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z).$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

1.3　典型例题与方法

基本题型Ⅰ：有关向量的定义、模、方向角、方向余弦、向量的坐标表示等基本问题

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 的起点为 $(1,-1,5)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标．

【分析】　向量的起点和终点对应坐标的差即为该向量的坐标．

解　设向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为 (x,y,z)，则 $\boldsymbol{a}=(x-1,y+1,z-5)$，所以

$$\begin{cases}x-1=2,\\y+1=2,\\z-5=4,\end{cases}\quad 故\begin{cases}x=3,\\y=1,\\z=9,\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标为 $(3,1,9)$.

例 2　已知点 $M_1=(-1,1,0)$，$M_2=(0,-1,2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦、方向角．

【分析】　先求出向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标，再求其方向余弦和方向角．

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(0+1,-1-1,2-0)=(1,-2,2)$.

所以方向余弦为

方向余弦的计算公式

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=-\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{2}{3},$$

方向角为 $\alpha=\arccos\dfrac{1}{3}$，$\beta=\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$，$\gamma=\arccos\dfrac{2}{3}$.

基本题型Ⅱ：向量的线性运算

例 3　已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-3)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,-4)$，求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

【分析】　此题考查用向量的坐标进行向量的线性运算．

解　因为 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-3)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,-4)$，所以 $3\boldsymbol{a}=(6,-3,-9)$，$-2\boldsymbol{b}=(-4,-2,8)$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2,-5,-1)$.

【方法点击】 对向量进行线性运算，只要对其坐标进行相应的线性运算即可．

1.4　习题 8-1 解答

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量．

解　因为 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$，$|\boldsymbol{a}|=11$，所以平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，即 $\pm\left(\dfrac{6}{11},\dfrac{7}{11},-\dfrac{6}{11}\right)$.

12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离．

解　点 $M(4,-3,5)$ 到 x 轴的距离为 $\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，到 y 轴的距离为 $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，到 z 轴的距离为 $\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$.

13. 在 yOz 平面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点．

解　因为所求点在 yOz 平面上，所以设点的坐标为 $M(0,y,z)$，则

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2},$$
$$|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2},$$
$$|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2}.$$

又 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|$，解得 $M(0,1,-2)$.

15. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角．

解　向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1)$，所以

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$，与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量为 $\dfrac{1}{2}(-1,-\sqrt{2},1)$，

所以 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$，方向角分别为 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影．

解　$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\cos\dfrac{\pi}{3}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标．

解　设点 A 的坐标为 (x,y,z)，则 $(2-x,-1-y,7-z)=(4,-4,7)$，解得 $x=-2$，$y=3$，$z=0$，故点 A 的坐标为 $(-2,3,0)$.

第二节　数量积　向量积　混合积

2.1　学习目标

掌握向量的数量积、向量积和混合积，并能用坐标表达式进行向量乘积的运算，了解两个向量垂直、平行的条件．

2.2 内容提要

1. 数量积

(1) 定义　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,又称内积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

【注】 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

由数量积的定义可知

$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a};\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0;\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

(2) 运算规律

① 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

② 分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) 计算公式　设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

【注】 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

2. 向量积

(1) 定义　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,向量 $\boldsymbol{c}$ 按下列方式定义:

① 向量 $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$;

② $\boldsymbol{c}$ 的方向既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足右手规则;

则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

由向量积的定义,①$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$;②$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的几何意义是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(2) 运算规律

① 反交换律　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

② 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(3) 计算公式　设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

【注】 若 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

3. 混合积

(1) 定义　已知三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,如果先作两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,把所得的向量积再与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 作数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$,这样得到的数量叫作三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积,记作 $[\boldsymbol{abc}]$. 即

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

(2) 计算公式　设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,则

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

(3) 几何意义　$|[\boldsymbol{abc}]|$就是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积．于是,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{abc}]=0$.

2.3　典型例题与方法

基本题型Ⅰ:有关向量的数量积的计算

例 1　求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$和 $\boldsymbol{b}=(1,-2,0)$的单位向量．

解　设向量 $\boldsymbol{c}=(x,y,z)$为与向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同时垂直的单位向量,则

$2\times x-3\times y+1\times z=0,1\times x-2\times y+0\times z=0$,又 $x^2+y^2+z^2=1$,

数量积的计算公式

解得 $\boldsymbol{c}=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$或 $\boldsymbol{c}=-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

例 2　设 $\boldsymbol{a}=(1,1,4),\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$,求 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向的投影．

【分析】　本题考查投影的计算．

解　方法一:$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角,$|\boldsymbol{b}|=3$,

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1-2+8}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7\sqrt{2}}{18},$$

所以
$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

方法二:$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_a=\left(\dfrac{1}{\sqrt{18}},\dfrac{1}{\sqrt{18}},\dfrac{4}{\sqrt{18}}\right)$,所以

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=1\times\frac{1}{\sqrt{18}}-2\times\frac{1}{\sqrt{18}}+2\times\frac{4}{\sqrt{18}}=\frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

方法三:$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$.

基本题型Ⅱ:有关向量的向量积的计算

例 3　$\boldsymbol{a}=(2,1,-1),\boldsymbol{b}=(1,-1,1)$,求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,-3,-3)$.

注意三阶行列式按第一行展开

【注】　向量的向量积为一个向量．

例 4　求以 $A(1,-2,1),B(-1,0,1),C(1,1,2)$为顶点的$\triangle ABC$ 的面积．

【分析】　本题为向量积的应用．

解　$\overrightarrow{AC}=(0,3,1),\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$,则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}|=\sqrt{11}.$$

【方法点击】 向量积的模为以两向量为邻边的平行四边形的面积;向量积的模的一半为以两向量为邻边的三角形的面积.

基本题型Ⅲ:关于向量平行、垂直、夹角的问题

例 5 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$,$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},1,k\right)$,问 k 取何值时,(1)$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

【分析】 此题考查两个向量的平行与垂直问题.

解 (1) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,则向量的坐标对应成比例,即$\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}=\frac{3}{k}$所以$k=\frac{3}{2}$.

(2) 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $1\times\frac{1}{2}+2\times1+3\times k=0$,所以 $k=-\frac{5}{6}$.

【方法点击】 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则

(1) $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$ 的充要条件是$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$;

(2) $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$.

2.4 习题 8-2 解答

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$上的投影.

解 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{4\times2+(-3)\times2+4\times1}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=2.$

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$,$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$,问 λ 与 μ 有怎样的关系,能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直?

解 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)$,与 z 轴同方向的单位向量为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$,由已知 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直,则$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{k}=0$,即$-2\lambda+4\mu=0$,故有 $\lambda=2\mu$.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$,计算:

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$;(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$,$\boldsymbol{c}=(1,-2,0)$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=8$,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(8,-16,0)$,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=(8,-8,24)$,所以

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=(8,-16,0)-(8,-8,24)=(0,-8,-24).$$

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,-4,4)$,$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(2,-3,3)$,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=(0,-1,-1).$$

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2.$

10. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,求$\triangle OAB$ 的面积.

解　由向量积的几何意义知 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$，而

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(-3,-3,1),$$

故 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1}=\frac{\sqrt{19}}{2}$.

第三节　曲面及其方程

3.1　学习目标

1. 了解曲面方程的概念.
2. 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求简单的柱面和旋转曲面的方程.

3.2　内容提要

1. 曲面方程

如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 满足下列关系：

(a) 曲面 S 上任意一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$；

(b) 满足方程 $F(x,y,z)=0$ 的 (x,y,z) 对应的点都在曲面 S 上，那么，方程 $F(x,y,z)=0$ 就叫作曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫作方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

2. 常见曲面

(1) 旋转曲面　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所形成的曲面叫作旋转曲面，其中定直线叫作旋转轴，旋转曲线称作母线.

(2) 柱面　直线 L 沿定曲线 C 平行移动所形成的轨迹叫作柱面，定曲线 C 称为准线，动直线 L 称为母线. 常见的简单柱面有：圆柱面 $x^2+y^2=a^2$；抛物柱面 $y=ax^2$；平面 $ax+by+c=0$.

(3) 二次曲面

(a) 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$；(b) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；(c) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；(d) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；(e) 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$；(f) 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

3.3　典型例题与方法

基本题型Ⅰ：关于常见二次曲面的标准方程问题

例 1　指出下列二次曲面的名称.

(1) $z=x^2+y^2$；(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=R^2$；(4) $16x^2-9y^2-9z^2=-25$.

解　(1) $z=x^2+y^2$ 为旋转抛物面；(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为上半锥面；

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=R^2$ 为椭圆柱面;(4)$16x^2-9y^2-9z^2=-25$ 为单叶双曲面.

【方法点击】 先对给定的二次曲面方程进行简化运算,将方程转化为常见的曲面方程的形式,再进行判断.

基本题型Ⅱ:旋转曲面方程的建立

例 2 将 xOy 面上的双曲线 $4x^2-8y^2=32$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周,求旋转曲面的方程.

解 已知曲线绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程为 $4x^2-8y^2-8z^2=32$. 曲线绕 y 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程为 $4x^2+4z^2-8y^2=32$.

【方法点击】 yOz 上的曲线 $f(y,z)=0$,绕 z 轴旋转一周,旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$;绕 y 轴旋转一周,曲面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0$.

3.4 习题 8-3 解答

5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

【分析】 xOz 坐标面上的曲线 $f(x,z)=0$,绕 x 轴旋转一周,所生成旋转曲面的方程为 $f(x,\pm\sqrt{z^2+y^2})=0$.

解 绕 x 轴旋转一周,所生成的旋转曲面的方程为 $5x=z^2+y^2$.

6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 绕 z 轴旋转一周,所生成的旋转曲面的方程为 $x^2+y^2+z^2=9$.

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 $4x^2-9y^2=36$ 绕 x 轴旋转一周,所生成的旋转曲面的方程为

$$4x^2-9(y^2+z^2)=36;$$

$4x^2-9y^2=36$ 绕 y 轴旋转一周,所生成的旋转曲面的方程为 $4(x^2+z^2)-9y^2=36$.

8. 画出下列各方程所表示的曲面.

(1) $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$;(2) $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$;(3) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$;

(4) $y^2-z=0$;(5) $z=2-x^2$.

解 各方程所表示的曲面分别如图 8-1～图 8-5 所示.

(1)

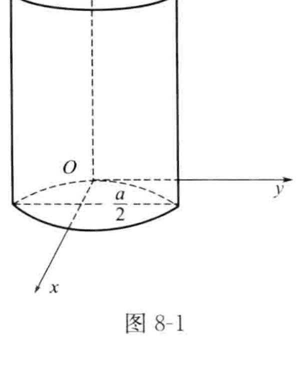

图 8-1

(2)

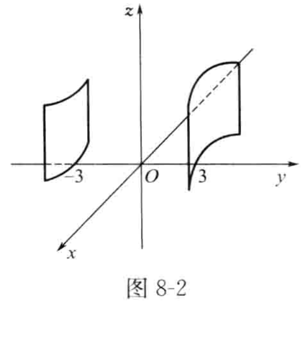

图 8-2

（3）

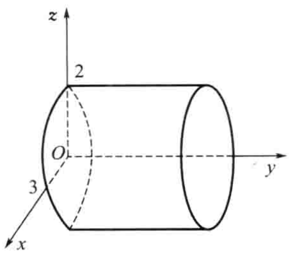

图 8-3

（4）

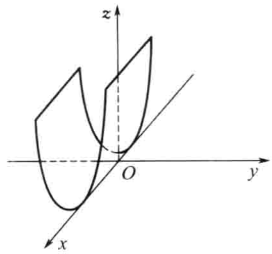

图 8-4

（5）

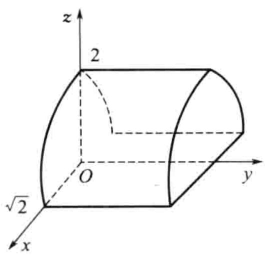

图 8-5

11. 画出下列方程所表示的曲面.

(1) $4x^2+y^2-z^2=4$;(2) $x^2-y^2-4z^2=4$;(3) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

解　各方程所表示的曲面分别如图 8-6～图 8-8 所示.

（1）

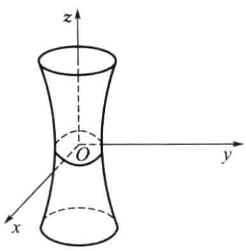

图 8-6

（2）

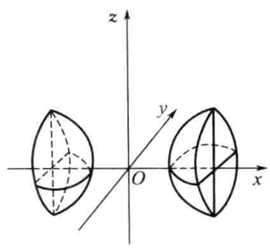

图 8-7

（3）

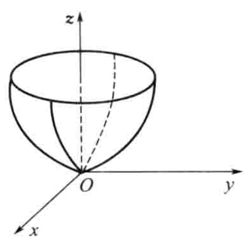

图 8-8

第四节　空间曲线及其方程

4.1　学习目标

了解空间曲线的概念,了解空间曲线的参数方程及一般方程,了解空间曲线在坐标平面上的投影,并会求其方程.

4.2　内容提要

1. 空间曲线的方程

(1) 一般方程　如果已知两曲面的方程分别为 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$,那么

它们交线的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

(2) 参数方程　空间曲线可以理解为一维空间 $\mathbf{R}^1$ 到三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的映射,其参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

2. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 消去变量 z,得到二元方程 $H(x,y)=0$,称为投影柱面,而 xOy 面上的曲线 $\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 称为空间曲线 C 的投影曲线,简称投影.

4.3　典型例题与方法

基本题型Ⅰ:求方程所表示的曲线

例 1　方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=0 \end{cases}$$

表示什么曲线?并求曲线围成的面积.

解　$x^2+y^2+z^2=25$ 表示球心在原点,半径为 5 的球面,$z=0$ 为 xOy 平面,
故交线为 xOy 平面上的一个圆 $x^2+y^2=25$,其面积为 25π.

基本题型Ⅱ:曲线方程的建立

例 2　求二次曲面 $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{3}$ 与 xOy 平面的交线.

【分析】　求空间曲面和坐标平面的交线,只须将已知曲面方程与坐标平面方程联立.

解　曲面与 xOy 平面的交线为

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{3}, \\ z=0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{4}, \\ z=0. \end{cases}$$

曲线的一般式方程

基本题型Ⅲ:求空间曲线的投影

例 3　求曲面 $x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=2$ 的交线在 xOy 坐标面上的投影方程.

【分析】　要求曲线在 xOy 面上的投影,两个方程联立消去 z,然后把得到的投影柱面方程与 $z=0$ 联立就是所求的投影方程.

解　由 $x^2+4y^2+z^2=4$ 和 $x+z=2$ 联立消去 z,得 $x^2-2x+2y^2=0$,
故所求曲线的投影方程为