现代数学基础丛书 157

双周期弹性断裂理论

李星 路见可 著

科学出版社

现代数学基础丛书 157

双周期弹性断裂理论

李　星　路见可　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书共 3 部分 10 章, 第一部分 3 章, 主要介绍了双周期函数的定义、几何意义及其性质; 特别给出了椭圆函数一般表达式的构造, 为求解双周期 Riemann 边值问题、双周期或双准周期核奇异积分方程提供了有效的方法; 分别研究了封闭曲线、开口弧段上双周期、加法双准周期 Riemann 边值问题的提法和解法, 特别是给出了双周期 Riemann 边值问题的样条逼近解; 分别讨论了双周期、双准周期函数核的奇异积分方程的解的存在唯一性等, 为后两部分的研究奠定数学理论基础. 第二部分 3 章, 主要研究了具双周期孔洞、裂纹与孔洞平面弹性第一、第二基本问题以及具双周期孔洞不同材料弹性平面焊接第一、第二基本问题. 第三部分 4 章, 主要研究了三维弹性断裂的全平面应变问题, 包括具双周期裂纹非均匀弹性体的全平面应变第一、第二基本问题, 具双周期孔洞非均匀弹性体的全平面应变混合边值问题, 具相对位移的双周期全平面应变变态第二基本问题的三种提法和解法, 特别是最后一章给出了几种特别情况的解析解或封闭解, 这在国内外其他文献中尚未见到.

本书可以作为数学、力学、材料科学、工程技术等学科的研究生、高年级本科生的选修教材或专业基础课教材, 也可作为相关领域的科研人员和工程技术人员的参考书和工具书.

安徽大学图书馆 藏书 www.lib.ahu.edu.cn

图书在版编目 (CIP) 数据

双周期弹性断裂理论/李星, 路见可著. —北京: 科学出版社, 2015.6
(现代数学基础丛书; 157)

ISBN 978-7-03-045015-9

I. ①双… II. ①李… ②路… III. ①弹性-断裂-研究 IV. ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 130798 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 张 倩 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 6 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2015 年 6 月第一次印刷 印张: 12 1/2
字数: 252 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　　言

在弹性理论、断裂力学中，人们通常集中注意力于有限平面或无限平面上有有限个孔洞或裂纹的非周期问题，由于周期问题在实际工程中经常遇到，所以单周期问题 (如图 1，是作者研究压电材料周期裂纹问题的沿 x 轴方向单周期分布无穷多条裂纹问题的几何模型)国际上已有许多研究. 但双周期问题同单周期问题一样，在弹性、断裂等领域，如在岩石力学、混凝土力学、纤维丛理论等中经常遇到 (如图 2，是作者研究功能梯度压电材料双周期圆柱夹杂问题的几何模型，单周期是沿一个方向周期分布无穷条裂纹或孔洞，双周期是沿无穷个方向都是周期分布无穷条裂纹或孔洞的，所以是一个无穷裂纹阵或无穷夹杂阵等)，但由于其研究需要构造双周期的或双准周期的复杂的椭圆函数，尤其是双周期边值问题转化的双周期或双准周期核 (也称其为 Weierstrass ζ 核，$\zeta(z)$ 函数定义为 $\zeta(z) = \dfrac{1}{z} + \sum_{m,n}{}' \left(\dfrac{1}{z-\Omega_{mn}} + \dfrac{1}{\Omega_{mn}} + \dfrac{z}{\Omega_{mn}^2}\right)$，这里 $\Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2m\omega_2$，其中 $2m\omega_1, 2m\omega_2$ 是双周期问题的两个基本周期) 的奇异积分方程的数值解法难度大，所以研究者不多.

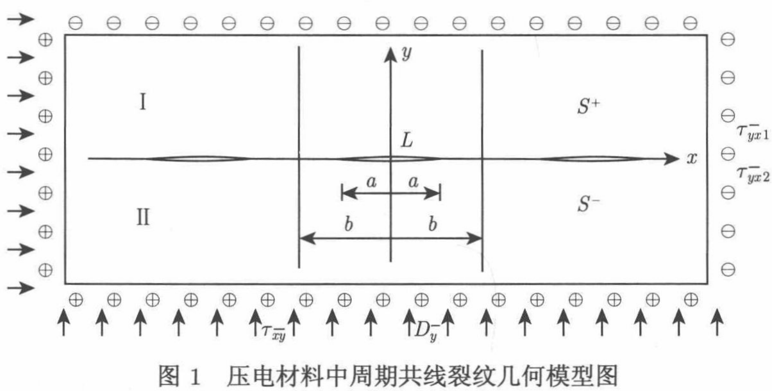

图 1　压电材料中周期共线裂纹几何模型图

本书第一作者坚持不懈，20 多年来不间断地作了一系列研究. 从最基本的广义胡克定律出发，在数学上严格证明了当应力是双周期分布时位移是双准周期分布的，澄清了长期以来不少学者文章中出现的误区，即认为“当应力是双周期分布时位移也是双周期分布的”(对于单周期情况的确是这样，但对双周期情况位移一般都是加法双准周期分布的，只有某些特殊情况才是双周期的)；利用函数论方法对于多连通区域如多孔洞、多裂纹等问题 (此类问题的应力函数一般是多值复函数，而多值

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

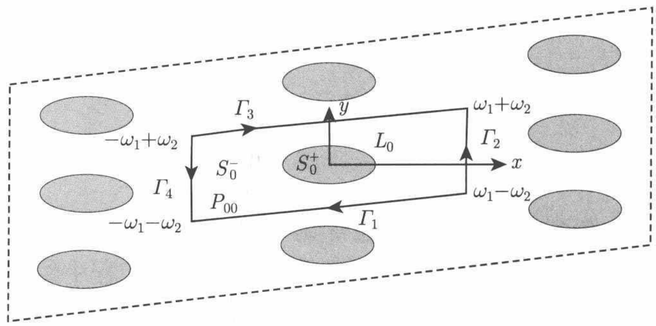

图 2　双周期圆柱形夹杂几何模型

性的处理是难点, 再加上保持双周期性等更为复杂) 首先构造了既能分出多值部分又能保证双准周期性的复应力函数, 然后通过构造满足特定要求的辅助椭圆函数而构造出了双准周期核的 Sherman 积分变换, 即将通常 Cauchy 型积分的 Cauchy 核 $1/(t-z)$ 用同样具有一阶奇异性的 Weierstrass $\zeta(t-z)$ 核代替, 进而将问题转化为 Weierstrass ζ 核 (双准周期核) 的奇异积分方程, 使得问题的求解既有理论保证又是构造性方法便于解析解或数值解的求出. 该方面的成果引起同行专家的重视, 关于双周期弹性问题的相关结果被力学专家在 *Mechanics of Materials*,《力学学报》《固体力学学报》等期刊上直接引用和推广. 特别是《力学学报》一文 (徐耀玲等, 2003) 在序言中介绍 "中国学者在双周期弹性问题 ··· 方面作出了重要贡献." 在文章中直接应用我们求得的数学解成功解决其力学问题; 北京大学力学专家王敏中教授及其合作者在《力学学报》一文 (彭南陵等, 2005) 中引用我们关于双周期文章多达 7 篇等.

本书开拓运用解析函数边值问题和奇异积分方程的理论研究全平面应变问题. 通常该理论主要适用于二维平面问题, 对复合材料全平面应变问题 (特殊三维问题) 的应用研究仅有寥寥无几的初步结果, 主要原因是该研究在数学上有相当的困难, 因而很少有人问津, 目前仅见美国和俄罗斯的学者有数篇论文从数学理论上进行了研究和探讨, 但直接得出封闭解或通过计算机得出数值结果的研究几乎空白, 在我国更加薄弱, 但全平面应变问题 (特殊三维问题) 比经典问题 (二维问题) 更切合实际模型, 因此其研究更有实际意义. 作者从力学叠加原理出发, 将三维应力系统巧妙地分解为两组线性独立的二维应力系统, 然后构造出复 Airy 函数用于推广 Sherman 方法, 将寻求复应力函数的问题归结为求解正则型的奇异积分方程, 并证明了其解的存在唯一性. 由于所用方法是构造性的, 故有利于数值计算. 对于一些全平面应变问题得到了封闭解析解, 或通过奇异积分方程的数值求解得到了原问题的数值结果. 开拓运用解析函数边值问题和奇异积分方程的理论成功求解了几类全平面应变问题, 拓广了复变函数在力学中的应用范围.

本书推广运用解析函数双准周期边值问题的结果来研究了几类双周期全平面应变问题，尤其是以 Weierstrass σ 函数 (σ 函数定义为 $\sigma(z) = z\prod_{m,n}'\left(1-\dfrac{z}{\Omega_{mn}}\right)\cdot\exp\left(\dfrac{z}{\Omega_{mn}}+\dfrac{z^2}{2\Omega_{mn}}\right)$) 和 ζ 函数为基础构造了一系列复杂的辅助椭圆函数，在国际上首次得到了某些情况下双周期弹性问题的解析解 (特别地，该解析解在一些具体算例中当一个周期 $\omega_1 \to \infty$ 另一个周期 $\omega_2 = a\pi$ 时结果与经典的单周期为 $a\pi$ 的结果完全一致，当两个周期 $\omega_1 \to \infty, \omega_2 \to \infty$ 时结果与 Muskhelishivili(非周期) 经典结果完全一致). 而且此解近几年开始被力学专家认可并直接成功运用于求解其他力学问题，如刊发于*Mechanics of Materials* 上的一文 (Jiang et al., 2004) 主要利用我们的方法进行求解，并认为“基于这种优美的双准周期 Riemann 边值问题理论 ···”(based the elegant theory of doubly quasi-periodic Riemann boundary problems···) 和《力学学报》(徐耀玲等, 2003, 2004) 以及*International Journal of Solids and Structures* (Xu et al., 2007) 等，特别是后一文中主要利用我们的方法求解其问题，并认为我们的方法为“一种优美的解析方法”(an elegant analytical method)(路见可, 2009; Li X, 2001a).

本书共 3 部分 10 章，第一部分 3 章，主要介绍了双周期函数的定义、几何意义及其性质；特别给出了椭圆函数一般表达式的构造，为求解双周期 Riemann 边值问题、双周期或双准周期核奇异积分方程提供了有效的方法；分别研究了封闭曲线、开口弧段上双周期、加法双准周期 Riemann 边值问题的提法和解法，特别是给出了双周期 Riemann 边值问题的样条逼近解；分别讨论了双周期、双准周期函数核的奇异积分方程的解的存在唯一性等，为后两部分的研究奠定数学理论基础. 第二部分 3 章，主要研究了具双周期孔洞、裂纹与孔洞平面弹性第一、第二基本问题以及具双周期孔洞不同材料弹性平面焊接第一、第二基本问题. 第三部分 4 章，主要研究了三维弹性断裂的全平面应变问题，包括具双周期裂纹非均匀弹性体的全平面应变第一、第二基本问题，具双周期孔洞非均匀弹性体的全平面应变混合边值问题，具相对位移的双周期全平面应变变态第二基本问题的三种提法和解法，特别是最后一章给出了几种特别情况的解析解或封闭解，这在国内外其他文献中尚未见到. 近年来，作者的研究团队又在新材料双周期弹性、断裂问题方面作了一些探索性工作，如压电复合材料、压电压磁复合材料中双周期圆柱形夹杂的反平面问题，压电材料中双周期裂纹的反平面应变问题和具双周期裂纹的一维六方准晶电弹性全平面应变基本问题等，但尚未形成系统成果，所以没有列入本书，有兴趣的读者可查阅相关论文 (常莉红等, 2006, 2011, 2013; Li et al., 2013; 崔江彦等, 2014; 时朋朋等, 2014).

感谢各位师长、同行和同事的鼓励和帮助；感谢曾试用过本书或部分内容的

第一作者在上海交通大学和宁夏大学指导的多届博士、硕士研究生, 他们的意见和建议对本书的形成起到了积极的作用, 感谢博士生苗福生组织了本书大部分书稿的录入和排版工作; 本书形成经过 20 余年漫长的过程, 感谢国家自然科学基金 (10161009, 10661009, 10962008, 51061015, 11362018), 高等学校博士学科点专项科研基金资助课题 (博导类, 20116401110002) 以及 "973 计划" 前期研究专项 (2008CB617613) 的慷慨资助; 本书的出版得到了宁夏大学应用数学创新团队经费的大力支持; 感谢科学出版社的李欣编辑的热情联系和大力帮助.

本书付梓之际, 恰逢宁夏师范学院四十华诞, 忝膺校长之职, 谨以此书铭记!

当代自然科学日新月异, 新的研究成果层出不穷, 限于作者水平, 书中难免有不妥之处, 谨请同行和读者不吝指正. 作者希望本书能对数学、力学、材料科学、工程技术等学科的研究生、高年级本科生和相关领域的科研人员和工程技术人员有所帮助和裨益.

李 星

2015 年 3 月 11 日

目　录

《现代数学基础丛书》序

前言

第 1 部分　双周期函数、双周期 Riemann 边值问题和双周期核奇异积分方程

第 1 章　双周期函数 ······ 3

1.1　双周期函数的一般问题 ······ 3

1.1.1　双周期函数的定义 ······ 3

1.1.2　双周期函数的几何意义 ······ 4

1.1.3　双周期函数、椭圆函数的性质 ······ 5

1.2　椭圆函数 ······ 7

1.2.1　二阶椭圆函数 ——Weierstrass 椭圆函数 $\mathscr{P}(z)$ ······ 7

1.2.2　Weierstrass 加法准椭圆函数 $\zeta(z)$ ······ 10

1.2.3　Weierstrass σ 函数 ······ 12

1.2.4　椭圆函数的一般表达式的构造 ······ 13

1.2.5　给定加数或乘数的加、乘法椭圆函数及广义加、乘法椭圆函数的构造 ······ 15

第 2 章　双周期 Riemann 边值问题 ······ 17

2.1　关于 Weierstrass ζ 核积分的推广 Plemelj 公式 ······ 17

2.2　封闭曲线上的双周期 Riemann 边值问题 ······ 20

2.2.1　双周期 Riemann 边值跳跃问题的提法和解法 ······ 21

2.2.2　封闭曲线上的双周期 Riemann 边值问题的解法 ······ 23

2.3　封闭曲线上的加法双准周期 Riemann 边值问题 ······ 26

2.4　开口弧段上的双周期 Riemann 边值问题 ······ 28

2.5　开口弧段上的加法双准周期 Riemann 边值问题 ······ 36

2.6　双周期 Riemann 边值问题的样条逼近解 ······ 40

2.6.1　双周期 Riemann 边值跳跃问题的逼近解 ······ 40

2.6.2　双周期非齐次 Riemann 边值问题的逼近解 ······ 45

第 3 章　双周期、双准周期函数核的奇异积分方程 ······ 49

3.1　封闭曲线上的双周期、双准周期函数核奇异积分方程 ······ 49

3.1.1 封闭曲线上的双周期核奇异积分方程 …… 49
3.1.2 封闭曲线上的加法双准周期核奇异积分方程 …… 51
3.2 开口弧段上的双周期核、双准周期核奇异积分方程 …… 53
3.2.1 开口弧段上的双周期核奇异积分方程 …… 53
3.2.2 开口弧段上的双准周期核奇异积分方程 …… 54

第 2 部分　双周期平面弹性理论

第 4 章　具双周期孔洞平面弹性基本问题 …… 59
4.1 复应力函数表达式 …… 59
4.2 具双周期孔洞平面弹性第一基本问题 …… 61
4.3 具双周期孔洞平面弹性第二基本问题 …… 68
第 5 章　具双周期裂纹与孔洞平面弹性基本问题 …… 72
5.1 引言与说明 …… 72
5.2 复应力函数的一般表达式 …… 73
5.3 具有双周期裂纹与孔洞平面弹性第一基本问题 …… 76
5.3.1 第一基本问题的解的构造 …… 78
5.3.2 第一基本问题的解的存在唯一性 …… 81
5.4 具双周期裂纹与孔洞平面弹性第二基本问题 …… 81
第 6 章　具双周期孔洞不同材料弹性平面焊接基本问题 …… 86
6.1 具双周期孔洞不同材料弹性平面焊接第一基本问题 …… 86
6.1.1 一般说明 …… 86
6.1.2 复应力函数的一般表达式 …… 87
6.1.3 第一基本问题的提法 …… 88
6.1.4 第一基本问题化为第二型 Fredholm 方程 …… 88
6.1.5 第一基本问题解的存在与唯一性 …… 91
6.2 具双周期孔洞不同材料弹性平面焊接第二基本问题 …… 95
6.2.1 引言与说明 …… 95
6.2.2 第二基本问题的提法 …… 96
6.2.3 第二基本问题的解法 …… 97
6.2.4 第二基本问题解的存在唯一性 …… 101

第 3 部分　双周期弹性体全平面应变理论

第 7 章　具双周期裂纹的非均匀弹性体全平面应变基本问题 …… 105
7.1 具双周期裂纹的非均匀弹性体全平面应变第一基本问题 …… 106
7.1.1 定义和引理 …… 106

7.1.2 Kolosov 函数 ······ 114
7.1.3 全平面应变第一基本问题的提法 ······ 116
7.1.4 第一基本问题的解法 ······ 117
7.1.5 第一基本问题的可解唯一性 ······ 122
7.2 具双周期裂纹的非均匀弹性体全平面应变第二基本问题 ······ 126
7.2.1 全平面应变第二基本问题的提法和解法 ······ 126
7.2.2 第二基本问题的可解唯一性 ······ 131
第 8 章 具双周期孔洞的非均匀弹性体全平面应变混合边值问题 ······ 133
8.1 Kolosov 函数 ······ 133
8.2 全平面应变混合边值问题的提法 ······ 135
8.3 混合边值问题的解法 ······ 136
8.4 混合边值问题的可解唯一性 ······ 141
第 9 章 具相对位移的双周期全平面应变的变态第二基本问题 ······ 147
9.1 变态第二基本问题的三种提法 ······ 147
9.2 变态第二基本问题的解法 ······ 150
第 10 章 几类特别情况的封闭解 ······ 157
10.1 双周期拼接平面弹性问题的解析解 ······ 157
10.2 双周期均匀柱体镶嵌对裂纹影响的全平面应变问题 ······ 164
10.3 双周期非均匀柱体镶嵌的全平面应变问题 ······ 168

参考文献 ······ 173
索引 ······ 179
《现代数学基础丛书》已出版书目 ······ 182

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1部分

双周期函数、双周期 Riemann 边值问题和双周期核奇异积分方程

第 1 章 双周期函数

1.1 双周期函数的一般问题

1.1.1 双周期函数的定义

定义 1.1.1 如果单值解析函数有两个基本周期 $2\omega_1$ 和 $2\omega_2$, 并假定满足

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$$

和

$$f(z+2\omega_1)=f(z),\quad f(z+2\omega_2)=f(z), \tag{1.1.1}$$

则称 $f(z)$ 为**双周期函数**.

双周期函数一般表示为

$$f(z+2m\omega_1+2n\omega_2)=f(z),\quad m,n\in Z. \tag{1.1.2}$$

通常将点 $z'=z+2m\omega_1+2n\omega_2$ 称为与 z **周期合同**的点, 记为 $z'\equiv z(\mathrm{mod}2\omega_j)$ $(j=1,2)$.

注 1.1.1 这里我们假定了它的基本周期的比值 $\tau=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ 是一个虚数, 且不妨设 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)>0$, 即 τ 的虚数部分的系数是正的, 这是因为只要我们改变基本周期之一的符号就可得到.

定义 1.1.1 中的双周期函数 $f(z)$ 只可以有一些极点时称为**椭圆函数**.

定义 1.1.2 定义 1.1.1 中的 (1.1.1) 式替换为

$$f(z+2\omega_1)=f(z)+\alpha_1,\quad f(z+2\omega_2)=f(z)+\alpha_2, \tag*{(1.1.1)$'$}$$

则称 $f(z)$ 为**加法双准周期函数**, 其中 α_1,α_2 称为它的**加数**. 如果该 $f(z)$ 只可以有一些极点, 则称之为**加法准椭圆函数**.

定义 1.1.3 定义 1.1.1 中的 (1.1.1) 式替换为

$$f(z+2\omega_j)=\beta_j f(z),\quad \beta_j\neq 0,\quad j=1,2, \tag*{(1.1.1)$''$}$$

则称 $f(z)$ 为**乘法双准周期函数**, 其中 β_1,β_2 称为其**乘数**, 如果该 $f(z)$ 只可以有一些极点, 则称其为**乘法准椭圆函数**.

也可将加法、乘法双准周期函数的概念进行推广.

定义 1.1.4　定义 1.1.1 中的 (1.1.1) 式替换为

$$f(z+2\omega_j)=f(z)+\alpha_j(z),\quad j=1,2, \tag{1.1.1)'''$$

其中 $\alpha_j(z)(j$=1, 2), 分别是以 $\omega_j(j$=1, 2) 为周期的双周期函数, 则称 $f(z)$ 为**广义加法双准周期函数**.

如果该 $f(z)$ 只可以有一些极点, 则称其为**广义加法准椭圆函数**.

定义 1.1.5　定义 1.1.1 中的 (1.1.1) 式替换为

$$f(z+2\omega_j)=\beta_j(z)f(z),\quad j=1,2, \tag{1.1.1)''''$$

其中 $\beta_j(z)(j=1,2)$, 分别是以 $2\omega_j(j$=1, 2) 为周期的双周期函数, 则称 $f(z)$ 为**广义乘法双准周期函数**.

如果该 $f(z)$ 只可以有一些极点, 则称其为**广义乘法准椭圆函数**.

1.1.2　双周期函数的几何意义

我们来考虑复平面上的四个点

$$z_0,\quad z_0+2\omega_1,\quad z_0+2\omega_1+2\omega_2,\quad z_0+2\omega_2,$$

其中 z_0 是任意一个复数.

因为比值 $\tau=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ 是虚数, 所以这四个点代表一个平行四边形的顶点 (通常称为基本平行四边形或基本胞腔), 记为 P_{00} 或 P.

令 z_0 的周期合同点

$$z_0'=z_0+2m\omega_1+2n\omega_2.$$

于是, 下列四点

$$z_0',\quad z_0'+2\omega_1,\quad z_0'+2\omega_1+2\omega_2,\quad z_0'+2\omega_2$$

是一个平行四边形 P_{mn} 的顶点, 这个平行四边形 P_{mn} 可以由基本平行四边形 $P=P_{00}$ 经过平移来得到. 给 m 与 n 以一切可能的整数值, 便可得到一组平行四边形 P_{mn}, 它们彼此全等, 形成覆盖全平面的平行四边形的网格 (图 1.1.1).

要想使得组内任何两个平行四边形都没有公共点, 我们算作每一个平行四边形 P_{mn} 只有一部分边界, 即边线 $\widehat{z_0', z_0'+2\omega_1}$, $\widehat{z_0', z_0'+2\omega_2}$, 端点 $z_0'+2\omega_1$ 与 $z_0'+2\omega_2$ 也都除外. 至于平行四边形 P_{mn} 的另外两边, 我们把它们看作是属于与 P_{mn} 紧邻的平行四边形. 这样, 平面上任何一点就属于一个且仅只属于一个平行四边形.

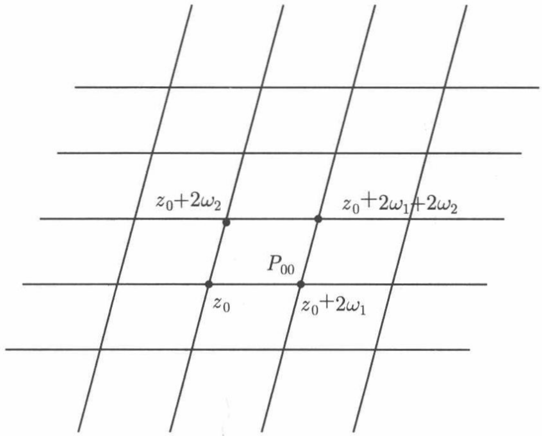

图 1.1.1 双周期函数基本胞腔图

因此, 平面上的任一点只与基本胞腔上唯一的一个点周期合同. 于是关系式 (1.1.2) 表明: 函数 $f(z)$ 在所有的周期合同点上的函数值相等. 因此, 在基本胞腔上来研究双周期函数就足够知道它在整个复平面上的性质.

1.1.3 双周期函数、椭圆函数的性质

双周期函数 (非常数) 的一个重要性质是在其基本胞腔上必有奇点.

定理 1.1.1 没有奇点的双周期函数是一个常数.

证明 如果双周期函数在基本胞腔上没有奇点, 则其绝对值应恒小于某正数 M, 根据函数的双周期性, 可知在全平面上都如此. 由 Liouville 定理知该函数为常数.

由此可见, 不是常数的双周期函数一定有奇点.

定义 1.1.6 只以极点为其奇点的双周期函数 (也称为**双周期亚纯函数**) 叫作**椭圆函数**.

椭圆函数在其基本胞腔内的极点的个数 (一个 m 阶 (重) 极点当作 m 个极点计算) 称作椭圆函数的**阶**. 如果基本胞腔的顶点是一个极点, 则只算四个顶点中的一个; 如果在基本胞腔边上有极点, 也只算相对两边中的一个. 有时也可以将基本胞腔略作平移, 使所有极点都在内部, 以便计算极点的个数.

椭圆函数的系列性质:

定理 1.1.2 椭圆函数的导数仍为具有相同周期的椭圆函数.

证明 以 $2\omega_1, 2\omega_2$ 为周期的椭圆函数的一般表示为式 (1.1.2), 对 (1.1.2) 式求导得

$$f'(z+2\omega_1+2\omega_2)=f'(z),$$

$$f''(z+2\omega_1+2\omega_2)=f''(z),$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z+2\omega_1+2\omega_2)=f^{(n)}(z).$$

即 $f^{(n)}(z)$ 也是以 $2\omega_1, 2\omega_2$ 为周期的椭圆函数.

定理 1.1.3 椭圆函数在其基本胞腔内所有极点的留数之和等于零.

证明 取任意点 z_0 为基本胞腔 P 的顶点使得函数的极点在 P 内, 则函数沿 P 的周界线 ∂P 的积分为

$$\int_{\partial P} f(z)\mathrm{d}z=\int_{z_0}^{z_0+2\omega_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{z_0+2\omega_1}^{z_0+2\omega_1+2\omega_2} f(z)\mathrm{d}z+\int_{z_0+2\omega_1+2\omega_2}^{z_0+2\omega_2} f(z)\mathrm{d}z+\int_{z_0+2\omega_2}^{z_0} f(z)\mathrm{d}z.$$

在上式第三项积分中令 $z=t+2\omega_2$, 由周期性知 $f(t+2\omega_2)=f(t)$, 于是

$$\int_{z_0+2\omega_1+2\omega_2}^{z_0+2\omega_2} f(z)\mathrm{d}z=\int_{z_0+2\omega_1}^{z_0} f(t+2\omega_2)\mathrm{d}t=\int_{z_0+2\omega_1}^{z_0} f(t)\mathrm{d}t=-\int_{z_0}^{z_0+2\omega_1} f(t)\mathrm{d}t.$$

故第三项积分与第一项积分相互抵消, 同理可知第二项积分与第四项积分相互抵消, 故

$$\int_{\partial P} f(z)\mathrm{d}z=0.$$

由留数定理知 $f(z)$ 在基本胞腔 P 内各留数之和等于 0.

根据这个定理, 椭圆函数在基本胞腔 P 内不可能仅仅只有一个极点, 它至少有两个极点, 而极点的数目就是椭圆函数的阶. 于是有

推论 1.1.1 椭圆函数的阶数不少于 2, 即不存在一阶椭圆函数.

定理 1.1.4 椭圆函数在基本胞腔 P 内的零点的数目等于极点的数目, 即等于这个椭圆函数的阶.

证明 设 $f(z)$ 为椭圆函数, 于是函数 $\phi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 也是椭圆函数, 而 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在其基本胞腔 P 内的留数之和等于 $f(z)$ 的零点与极点数之差 (证明可参阅文献 (路见可, 2007) 的定理 5.4(辐角原理)), 再由定理 1.1.3 知, 该留数之和等于零, 即 $f(z)$ 的零点数等于极点数.

定理 1.1.5 椭圆函数在其基本胞腔 P 内所有零点之和减去所有极点之和等于该函数的一个周期.

证明 设椭圆函数 $f(z)$ 为 n 阶, 其零点为 a_j, 极点为 b_j, 可由留数定理证明关系式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial P} z\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{n} a_j-\sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1.1.3}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com