1

第三版

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б．П．吉米多维奇

数学分析习题集题解

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

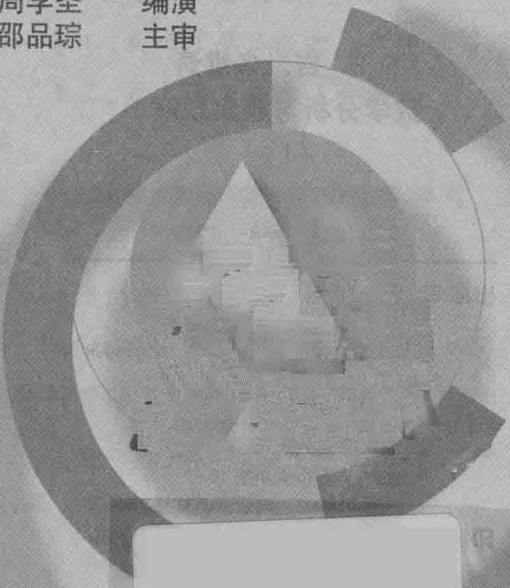
1

第三版

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　　编演
郭大钧　邵品琮　　主审



山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (1)/费定晖 周学圣编演. —3版. —济南:山东科学技术出版社,2005.1(2007.1重印)
ISBN 7-5331-0099-9

Ⅰ.Б… Ⅱ.①费… ②周… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43960号

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(1)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

出版者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002 电话:(0531)82098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn

发行者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002 电话:(0531)82098071

印刷者:济南申汇印务有限责任公司
地址:济南市王官庄12号
邮编:250022 电话:(0531)87966822

开本:850mm×1168mm 1/32
印张:14.125
字数:345千
版次:2007年1月第3版第22次印刷
印数:288401-291400

ISBN 7-5331-0099-9 O·5
定价:18.50元

第三版前言

DISANBANQIANYAN

这套书自1979年出版发行以来,20余年一直畅销不衰,读者称其为学习数学分析"不可替代"之图书,我们对此倍感欣慰。

本次第三版主要做了如下改动:

第一,修正了部分题目的解法,使其更加注重了科学性、规范性和简明性。

第二,改正了第二版的个别印刷错误。

第三,在文字上进行了些润色,力求文字更加准确。

第四,对版面和开本进行了调整,突出了时代感。

这次的修改得到山东科学技术出版社的大力支持,责任编辑宋德万、胡新蓉等对该书的再版付出了艰辛的劳动,在此深表感谢。

在第三版修改过程中由费定晖逐章逐题予以校阅,不当之处恳请指正。

费定晖

2005.1

出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,

特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目录

MULU

第一章 分析引论

§1. 实数

1° 数学归纳法 为了证明某定理对任意的自然数 n 为真,只须证明下面两点就够了:(1)这定理对 $n=1$ 为真,(2)设这定理对任何的一个自然数 n 为真,则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真.

2° 分割 假设分有理数为 A 和 B 两类,使其满足于下列条件:(1)两类均非空集,(2)每一个有理数必属于一类,且仅属于一类,(3)属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数,这样的一个分类法称为分割.(ⅰ)若或是下类 A 有最大的数,或是上类 B 有最小的数,则分割 A/B 确定一个有理数.(ⅱ)若 A 类无最大数,而 B 类亦无最小数,则分割 A/B 确定一个无理数.有理数和无理数统称为实数*.

3° 绝对值 假若 x 为实数,则用下列条件所确定的非负数 $|x|$,称为 x 的绝对值:

$$|x|=\begin{cases}x, & 若\ x\geqslant 0,\\ -x, & 若\ x<0.\end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y,有以下的不等式成立:

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4° 上确界和下确界 设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合,若:

(1) 每一个 $x\in X$** 满足不等式

$$x\geqslant m;$$

* 以后若没有相反的附带说明,数这个字我们将理解为实数.

** 符号 $x\in X$ 表示 x 属于集合 X.

(2) 对于任何的 $\varepsilon>0$,存在有 $x'\in X$,使

$$x'<m+\varepsilon,$$

则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样,若:

(1) 每一个 $x\in X$ 满足不等式

$$x\leqslant M,$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon>0$,存在有 $x''\in X$,使

$$x''>M-\varepsilon,$$

则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界,则通常说

$$\inf\{x\}=-\infty;$$

若集合 X 上方无界,则认为

$$\sup\{x\}=+\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差　设 $a(a\neq0)$ 是被测的量的准确数值,而 x 是这个量的近似值,则

$$\Delta=|x-a|$$

称为绝对误差,而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半,则说 x 有 n 位准确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立:

【1】 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

证　当 $n=1$ 时,等式成立.

设对于 $n=k$(自然数)时,等式成立,即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对于 $n=k+1$ 时等式也成立.

于是,由数学归纳法知,对于任何自然数 n,有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【2】 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

证 当 $n=1$ 时,等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

即对于 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

【3】 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$

证 当 $n=1$ 时,等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

【4】 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$

证 当 $n=1$ 时，等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

【5】 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$，求证：

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个元素的组合数，由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时，由于

$$[a+b]^{[1]}=a+b$$

及
$$\sum_{m=0}^{1} C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]} = a + b,$$
所以等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即
$$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}, \tag{1}$$
则对于 $n=k+1$ 时,有
$$(a+b)^{[k+1]} = (a+b)^{[k]} \cdot (a+b-kh). \tag{2}$$
将(1)式代入(2)式得
$$\begin{aligned}
(a+b)^{[k+1]} &= (a+b-kh) \cdot \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]} \\
&= (a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} + \cdots + C_k^k a^{[0]} b^{[k]}\} \\
&= \{(a-kh)+b\} C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + \{[a-(k-1)h] \\
&\quad + (b-h)\} C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} + \cdots + \{a + (b-kh)\} C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \\
&= C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_k^0 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]} \\
&\quad + \cdots + C_k^k a^{[1]} b^{[k]} + C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + (C_k^0 + C_k^1) a^{[k]} b^{[1]} \\
&\quad + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_{k+1}^1 a^{[k]} b^{[1]} \\
&\quad + \cdots + C_{k+1}^k a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},
\end{aligned}$$
故由$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}$可推得下式成立:
$$(a+b)^{[k+1]} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},$$
即对于 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}. \tag{3}$$

在式子

$$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中,令 $h=0$,即得

$$a^{[n]}=a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式,得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m.$$

【6】 证明:贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时,此式取等号.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时,由于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 大于 -1,所以,$1+x_i>0$.因而,有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\&\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\\&\quad+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于 $x_ix_j\geqslant 0$,所以,

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【 7 】 证明若 $x>-1$,则不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1)$$

为真,且仅当 $x=0$ 时,等号成立.

证 只要在6题的贝努里不等式中,设

$$x_i=x \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

即得证

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

从6题的证明过程中看出,仅当 $x=0$ 时,上式才取等号.

【 8 】 证明不等式:

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad 当 n>1.$$

证 当 $n=2$ 时,因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$,故不等式成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2 \quad (k=1,2,\cdots),$$

从而有

$$(k+1)!<\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

【9】 证明不等式：

$$2!\ \cdot 4!\ \cdots (2n)!\ > [(n+1)!]^n \quad \text{当 } n > 1.$$

证 当 $n=2$ 时，因为 $2!\ \cdot 4!\ = 48$，及 $[(2+1)!]^2 = 36$，所以 $2!\ \cdot 4!\ > [(2+1)!]^2$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$2!\ \cdot 4!\ \cdots (2k)!\ > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned} &2!\ \cdot 4!\ \cdots (2k+2)!\ > [(k+1)!]^k (2k+2)! \\ &= [(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2) \\ &> [(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1}, \end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立. 于是，由数学归纳法原理，本题证毕.

【10】 证明不等式：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时，因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式显然成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n=k+1$ 而言，由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$,

而上述不等式由于

$$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4,$$

因而是成立的. 于是, 最后得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立. 由数学归纳法证毕.

【11】 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割, 其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b, 而 A 类包含所有其余的有理数. 求证在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a\in A$. 若 $a\leqslant 0$, 则显然存在 $a'>a(a'>0)$ 且 $a'\in A$. 故可设 $a>0$, 于是 $a^2\leqslant c$. 但不可能有 $a^2=c$. 因若 $a^2=c$, 设 $a=\frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^2}{q^2}=c$. 由于 c 是正整数, 而 p^2 与 q^2 也是互质的, 故必 $q=1$, 从而 $c=p^2$, 此与假定矛盾, 故必 $a^2<c$. 下面我们证明, 存在正整数 n, 使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$ 也属于 A.

上述不等式相当于:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c,\quad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a+1}{n} < c - a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此,只要取

$$n > \frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的.因此,不论 a 为 A 类内怎样的数,在 A 类内总能找到大于它的数,故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中也无最小数.

实质上,此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

【12】 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成:A 类包含所有的有理数 a,而 $a^3<2$;B 类包含所有其余的有理数.证明:在 A 类中无最大数,而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a \in A$,即 $a^3<2$.下证必可取正整数 n,使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3 < 2.$$

事实上,上式相当于 $\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$.若 $a \leqslant 0$,取 $n=1$ 即可.若 $a>0$,注意到 $n \geqslant 1$,即知若取 n 充分大,使 $n > \frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$,则上列各式均成立.从而 $a+\frac{1}{n} \in A$.故 A 中无最大数.

下设 $b \in B$,则 $b^3 \geqslant 2$.下证不可能有 $b^3=2$.事实上,若 $b^3=2$,设 $b=\frac{p}{q}$,p 与 q 为互质的正整数,则 $\frac{p^3}{q^3}=2$,$p^3=2q^3$,从而 p^3 为偶数,因此 p 必为偶数:$p=2r$,r 为正整数.由于 p 与 q 是互质的,故 q 必为奇数,从而 q^3 也为奇数.但 $q^3=4r^3$,故 q^3 又必是偶数,因此矛盾.由此可知必有 $b^3>2$.仿前面的证明,可