数学奥赛辅导丛书

第二辑

趣味的图论问题

Quwei de Tulun Wenti

第2版

单墫 著

中国科学技术大学出版社

数学奥赛辅导丛书·第二辑

趣味的图论问题

第2版

单 墫 著

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

趣味的图论问题/单墫著. —2 版. —合肥:中国科学技术大学出版社,2011. 12
(数学奥赛辅导丛书·第二辑)
ISBN 978-7-312-02916-5

Ⅰ. 趣… Ⅱ. 单… Ⅲ. 图论—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 236620 号

中国科学技术大学出版社出版发行
地址:安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
网址:http://press. ustc. edu. cn
合肥学苑印务有限公司印刷
全国新华书店经销
*
开本:880 mm×1230 mm 1/32 印张:5 字数:112 千
1980 年 9 月第 1 版 2011 年 12 月第 2 版
2011 年 12 月第 2 次印刷
定价:12. 00 元

再版前言

这本小册子，是31年前写的.

其时“文化大革命”刚刚过去，广大青少年迫切需要学习科学文化.我的几本小册子就是作雪中送炭之用.

图论，当时国内很少有人研究，中学界更是乏人问津.中国人写的系统介绍图论的普及读物，这本《趣味的图论问题》，或许是第一本.我写的时候，缺少借鉴，甚至很多名词术语的中译，都得自己杜撰.

很快，图论的研究就在我国迅猛地发展起来.数学竞赛中，图论的问题也频繁出现.这本小册子在普及、传播数学方面起了一点作用，对于参加数学竞赛活动的师生也提供了一点帮助.

这次再版，表明这样的小册子仍有读者需要.特别是目前的中学师生，他们中很多人以前没有看过这本小册子.

这次再版，我曾考虑要不要作较大的更改.仔细想了想，觉得还是保持原貌，基本不动为好.因为这本小册子仍然有两个方面的作用：

第一，有利于普及、传播数学.这本小册子对图论作了较为系统的（当然也是初步的）介绍.当时就有一位复旦大学学图论的青年教师（现在是复旦大学的教授）告诉我：他们的老师推荐他们读这本小册子.目前市场上有不少的数学书，实际上只是习题集.有些人以为读这种书可以立竿见影，收到奇效.其实，学习需要循序渐进，按部就班.“欲速则不达”.做习题，不能代替系统

的学习.只有在对数学的理解上比其他人高出一筹的学生,才有可能在前进的道路上走得更好.

第二,有利于数学竞赛.书中例题和习题较多,有各种难度,并有解答,适合各种层次的学生选用.而且对问题的背景与蕴含的思想着重介绍.目前我国的数学竞赛,题目有愈来愈难的趋势.一味追求难,而忽视其中的数学思想,不是一种好的趋势.

所以,这次再版,仅作了很少的改动.例如,术语"偶图"改成现在通用的"两部分图".

感谢中国科学技术大学出版社重新出版这本小册子.

单 墫

前　言

写这本小册子的目的是向中学生介绍一些图论的基本知识、图论中常用的初等方法，以扩大中学生的知识领域，提高他们的思维能力.

图论的应用现在已经渗入许多基础科学和工程技术科学，考虑到中学生的阅读兴趣，这本小册子比较多的是通过一些有趣的数学难题和数学游戏来展开讨论的，读者不难看出这些内容的理论意义和实际背景.

阅读这本小册子不需要太多的预备知识，只需要读者有一定的数学推理能力，并且知道什么是数学归纳法——这是这本小册子中经常用到的一种证明方法. 虽然如此，为了完整起见，有些章的后半部分还是介绍了一些比较复杂的概念与定理. 这些内容已用“*”隔开，初学者可以略去这些内容而不致影响下面的阅读. 本书还需要极少的集论知识，它是现行中学数学教学大纲中的内容，为了读者的方便，我们在书末加上一个附录，供读者查阅.

全书共 8 章，有不少例题与习题，习题均有解答.

李克正同志仔细地阅读了这本小册子的初稿，并提出许多宝贵的意见与建议，作者谨在此表示衷心的感谢.

单　墫

目　　录

1 基本概念

图论是一个应用十分广泛而又极其有趣的数学分支.物理、化学、生物、科学管理、计算机等各个领域都可以找到图论的足迹.图论与数学的其他分支,如群论、矩阵论、概率论、拓扑、数值分析、组合数学等都有着密切的联系.

在历史上,有很多数学家对图论学科的形成做出过贡献,特别要提到的是欧拉(Euler)、基尔霍夫(Kirchhoff)与凯莱(Cayley).

欧拉在1736年发表了第一篇有关图论的论文,解决了著名的七桥问题(见第2章).拓扑学中著名的欧拉公式同时也是图论中的重要公式(见第5章).

基尔霍夫对电路网络的研究(学过电学的人一定知道著名的基尔霍夫定律)及凯莱在有机化学的计算中运用了树、生成树等(见第3章)图论概念.

很多有趣的数学游戏与谜语也促进了图论的发展,哈密顿(Hamilton)的周游世界的游戏(见第6章)就是其中最著名的一个.

对四色定理的研究(见第5章)也很大地促进了图论的发展.

这一章,我们先介绍一些图论的基本概念和它们的简单应用.

图论研究的对象是图.什么是图呢?我们先看图1.1(书中的插图,我们分章编上序号,记为图1.1、图1.2等等,而图论中所说的图,本书就直接称为图).

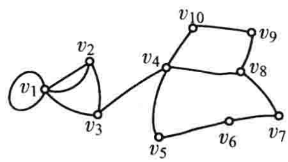

图 1.1

图1.1就是一个图,它有若干个不同的点 $v_1, v_2, \cdots$,我们称之为**顶点**,或简称为**点**(图1.1中顶点个数为10),这些顶点中有一些是用直线(段)或曲线(段)连接的,我们把这些直线(段)或曲线(段)称做**边**.例如,图1.1中,v_1 与 v_2 之间有两条边,v_2 与 v_3 之间有一条边,v_2 与 v_4 之间没有边,等等.图1.1中,v_1 与 v_1 本身也有边相连,这样的边称为**环**.

由若干个不同的顶点与连接其中某些顶点的边所组成的图形就称为图.

要注意的是在图的定义中,顶点的位置以及边的曲直长短都是无关紧要的,而且,也没有假定这些点、边都要在一个平面中(比如说,正多面体的顶点和棱也构成一个图).我们只关心顶点的多少及这些边是连接哪些顶点的.确切地说,如果两个图 G 与 G' 的顶点之间可以建立起一对一的对应,并且当且仅当 G 的顶点 v_i 与 v_j 之间有 k 条边相连时,G' 的相应的顶点 v'_i 与 v'_j 之间也有 k 条边相连,我们就说 G 与 G' 有相同的结构,简称为**同构**.同构的两个图我们认为是没有区别的.

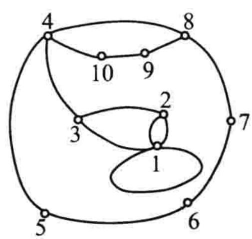

图 1.2

图 1.2 与图 1.1 乍看起来很不一样，其实这两个图却是同构的，这只要将图 1.2 中的顶点 i 与图 1.1 中的 v_i 相对应（$1\leqslant i\leqslant 10$）就明白了.

通常用一个大写字母 G 来表示图，用 V 来表示所有顶点的集合，E 表示所有边的集合，并且记成 $G=(V,E)$. G=(V,E)

如果顶点的个数 $|V|$ 与边的个数 $|E|$ 都是有限的，图 G 称为有限图. 如果 $|V|$ 或 $|E|$ 都是无限的，图 G 称为无限图.

图 1.3 中有五个图 G_1,G_2,G_3,G_4,G_5，读者可以数一下这五个图的顶点数与边数. 熟悉正多面体的人能够看出，这五个图分别与五种正多面体（即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体）的顶点与棱所构成的图同构.

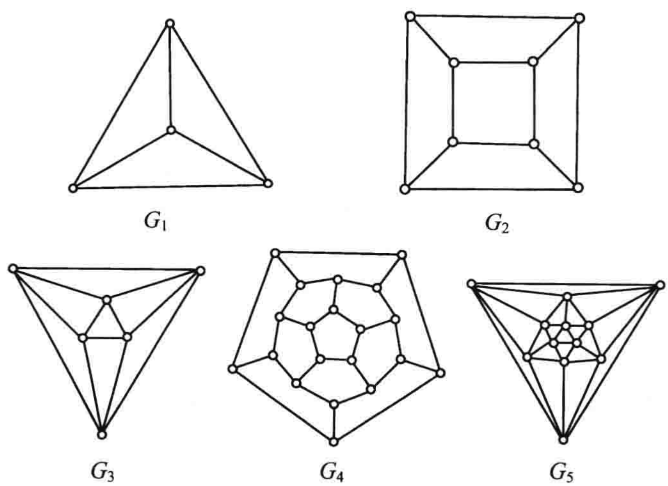

图 1.3

如果对图 $G=(V,E)$ 与 $G'=(V',E')$ 有 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，也就是说图 G' 的顶点都是图 G 的顶点，图 G' 的边也都是图 G 的

边，我们就说 G' 是 G 的子图. 例如，一个正方形就可以看做图 1.3中 G_2 的子图.

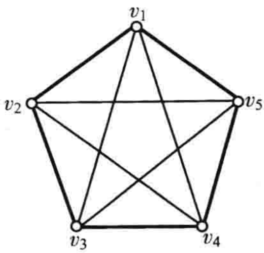

图 1.4 完全图 K_5

如果一个图没有环，并且每两个顶点之间至多只有一条边，这样的图称为简单图. 在简单图中，连接 v_i 与 v_j 的边可以记成(v_i,v_j).

如果图 G 是一个简单图，并且每两个顶点之间都有一条边，我们就称 G 为完全图. 通常将具有 n 个顶点的完全图记为 K_n. 图 1.4 就是一个完全图.

我们还要介绍一下相邻与次数这两个术语.

如果图 G 的两个顶点 v_i 与 v_j 之间有边相连，我们就说点 v_i 与 v_j 是相邻的，否则就说点 v_i 与 v_j 是不相邻的. 如果顶点 v 是边 e 的一个端点，就说点 v 与边 e 是相邻的，e 是从 v 引出的边. 从一个顶点 v 引出的边的条数，称为 v 的次数，记做 $\deg_G v$，在不致混淆的时候，也可以写成 $\deg v$. 例如在图 1.1 中，$\deg v_9=2$，$\deg v_2=3$. 约定一点上的环算两条边，所以在图 1.1 中 $\deg v_1=5$.

注 除非特别说明，本书以后所说的图都是指没有环的有限图.

上面所给出的一些概念都是非常简单、直观的. 这些简单直观的概念可以帮助我们思考并解决一些问题. 下面来看几个例题.

例 1 某次会议有 n 名代表出席，已知任意的四名代表中

都有一个人与其余的三个人握过手. 证明:任意的四名代表中必有一个人与其余的 $n-1$ 名代表都握过手.

解 我们将这 n 名代表用 n 个点来表示. 如果两名代表没有握过手,我们就在相应的两个点之间连一条边. 这样就得到一个简单图 G. 已知的条件就是在 G 的任意四个顶点之中,有一个点与其余的三个点不相邻. 要证明的结论就是在任意的四个点之中,有一个点与其余的 $n-1$ 个顶点都不相邻.

用反证法,设结论不成立,那么在 G 中有四个顶点 v_1, v_2, v_3, v_4,每一个点 $v_i(1\leqslant i\leqslant 4)$都有与之相邻的点. 设 v_1', v_2', v_3', v_4' 分别与 v_1, v_2, v_3, v_4 相邻(v_1', v_2', v_3', v_4' 不一定是互不相同的).

根据已知条件,v_1, v_2, v_3, v_4 中有一个点,不妨设它为 v_1,与其余的三个点 v_2, v_3, v_4 均不相邻. 于是,v_1' 不同于 v_2, v_3,或者说 $v_1'\neq v_2$, $v_1'\neq v_3$, $v_2'\neq v_1$.

如果 $v_2'\neq v_1'$,那么由图 1.5 明显地看出,在 v_1, v_2, v_1'、v_2' 这四个点中,没有一个点与其余的三个点均不相邻,这是和已知条件相矛盾的. 所以必有$v_2'=v_1'$. 同理 $v_3'=v_1'$. 这就成了图 1.6,但可以看出在 v_1, v_2, v_3, v_1' 这四个点中,又没有一个点与其余的三个点均不相邻,仍与已知条件相矛盾. 所以在任意四个顶点中必有一个点与其余的 $n-1$ 个点均不相邻.

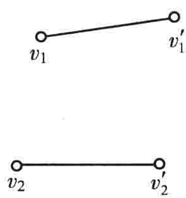

图 1.5

如果一个图 G 中的点 v 与 G 中除 v 外的每一个点均不相邻,那么 v 就称为 G 的*孤立点*.

根据上面的证明,例 1 中的图 G 至多只有三个点不是孤立

点，因而这个图的形状为图 1.7.

如果 G 是一个有 n 个顶点的简单图，从完全图 K_n 中把属于 G 的边全部去掉后，得到的图称为 G 的补图，通常记为 $\overline{G}$.

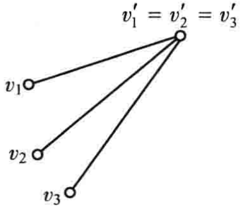

图 1.6

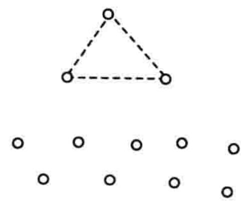

图 1.7　虚线表示可能有边

显然 $\overline{\overline{G}}=G$，即一个图的补图的补图就是原来的那个图.

读者不难做出图 1.7 中图 G 的补图 $\overline{G}$. 例 1 也可以借助于图 $\overline{G}$ 来证. $\overline{G}$ 的顶点与 G 的顶点相同，但 $\overline{G}$ 的边 (v_i, v_j) 表示 v_i 与 v_j 所对应的两个人是握过手的. 推理方法完全相同，读者愿意的话，可以作为一个习题来做.

例 2　九个数学家在一次国际数学会议上相遇，发现他们中的任意三个人中，至少有两个人可以用同一种语言对话. 如果每个数学家至多可说三种语言. 证明：至少有三个数学家可以用同一种语言对话.

解法 1　用九个点 $v_1, v_2, \cdots, v_9$ 表示九个数学家，如果某两个数学家可以用第 r 种语言对话，那么就用一条边将相应的两个点连接起来，并且将这条边涂上第 r 种颜色，这样就得到一个图 G，它的边涂上了颜色（至多有 27 种颜色）.

显然，如果在顶点 v_i, v_j 之间有一条边涂上第 r 种颜色，在顶点 v_i 与 v_k 之间有一条边也涂上第 r 种颜色，那么在 v_j 与 v_k 之间一定也有一条边涂上第 r 种颜色（这种性质可以称为传

递性).

已知的条件就是每三个点之间至少有一条边,并且对任一个顶点 v_i,自 v_i 引出的边至多有三种不同的颜色.要证明的结论是图 G 中至少有一个三角形,这个三角形的三条边是同一种颜色的,这种三角形我们称之为同色的三角形.

根据上面所说的传递性,只要证明图 G 有一个顶点,从这个顶点引出的两条边具有同样的颜色也就可以了.

采用反证法,假定结论不成立,那么从任一个顶点 v_i 引出的边颜色都不相同,因而根据已知条件得

$$\deg v_i \leqslant 3 \quad (1 \leqslant i \leqslant 9).$$

对于顶点 v_1,由于 $\deg v_1 \leqslant 3$,所以至少有 $9-1-3=5$ 个顶点与 v_1 不相邻.不妨设 v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 与 v_1 不相邻,因为 $\deg v_2 \leqslant 3$,在 v_3,v_4,v_5,v_6 这四个点中必有一个点与 v_2 不相邻.设 v_3 与 v_2 不相邻,那么 v_1,v_2,v_3 这三个点之间无边,与已知条件矛盾.

解法 2 仍用 $v_1,v_2,\cdots,v_9$ 这九个点表示九个数学家,但和刚才相反,在两个人不能用同一种语言对话时,才用边来连接相应的两个顶点,这样得到一个简单图 G'.

因为每三个人中至少有两个人可以用同一种语言对话,所以 G' 中每三个点之间至少有两个点是不相邻的,换句话说,在 G' 中没有三角形.

现在我们来证明 G' 中必有一个点 v_i 的次数不大于 4.如果 $\deg v_1 \leqslant 4$,那么 v_1 就是所说的点 v_i.如果 $\deg v_1 > 4$,那么至少有五个顶点与 v_1 相邻,不妨设 v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 与 v_1 相邻,如图 1.8所示.

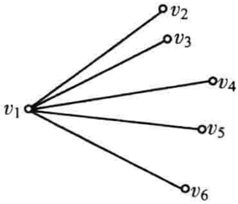

图 1.8

由于 G' 中没有三角形，所以 v_2 与 v_3,v_4,v_5,v_6 均不相邻，从而 $\deg v_2 \leqslant 4$.

上面证明了 G' 中有一个点的次数不大于 4，也就是说在九名数学家中有一个人至少可以同四个人对话. 由于这个人至多会说三种语言，因此至少有两个人与他对话时用的是同一种语言，于是这三个人可以用同一种语言对话.

解法 2 的结尾用到一个极其简单而有用的原则——抽屉原则：如果将 $n+1$ 个球放入 n 个抽屉中，那么必有一个抽屉中有两个或更多个球. 读者可参看常庚哲著《抽屉原则及其他》一书（上海教育出版社，1978 年版）.

例 3 证明：任意的六个人中一定有三个人互相认识（在本书中，我们约定甲认识乙就意味着乙也认识甲）或者有三个人互不相识.

解法 1 作一个完全图 K_6，六个顶点表示六个人，如果某两个人互相认识，连接相应两点的边就涂上红色，否则就涂上蓝色. 要证明的结论就是这个涂了色的 K_6 中一定有一个各边同色的三角形.

从顶点 v_1 引出的边有五条，而颜色却只有红蓝两种，因此其中必有一种颜色涂了三条或更多条边（不然的话，红色边与蓝色边的条数和小于等于 4）.

不失一般性，假定有三条边 (v_1,v_2)，(v_1,v_3)，(v_1,v_4) 为红色（有三条边为蓝色的证法与此完全相同）.

（ⅰ）如果 $\triangle v_2v_3v_4$ 的三条边都是蓝色的，那么 $\triangle v_2v_3v_4$ 就

是所要求的同色三角形.

(ⅱ) 如果$\triangle v_2v_3v_4$ 有一条边，比如说(v_2,v_3)是红色的，那么$\triangle v_1v_2v_3$ 就是一个三边均为红色的同色三角形.

解法 2 用六个顶点表示六个人，如果两个人互相认识，就在相应的两个点之间连一条边，这样得到一个简单图 G. 要证明的结论就是 G 或者它的补图 $\overline{G}$ 中有一个三角形.

顶点 v_1 与其余的五个顶点不在 G 中相邻就在 $\overline{G}$ 中相邻，因而在 G 或 $\overline{G}$ 中，v_1 至少与三个顶点相邻，不妨假定在 G 中，v_1 与三个顶点 v_2,v_3,v_4 相邻. 如果 v_2,v_3,v_4 这三个点中有两个点在 G 中相邻，那么添上 v_1，就得到一个 G 中的三角形. 如果 v_2，v_3,v_4 这三个点在 G 中均不相邻，那么它们在 $\overline{G}$ 中相邻，即 $\overline{G}$ 中有一个三角形，即$\triangle v_2v_3v_4$.

解法 2 与解法 1 并无太大的差别，只不过是两种不同的说法，但是由这两种说法却可以引出这个问题的两种推广，读者可参看本章习题或第 7 章的内容.

无论是解法 1 还是解法 2 都用到一个简单的原则——平均数原则：如果 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的平均数为 a，那么 $a_1,a_2,\cdots$，a_n 中一定有一个数不小于 a（不然的话，$a_1+a_2+\cdots+a_n<na$），也一定有一个数不大于 a. 这个原则是重叠原则的一种表现形式（在解法 1 中，自 v_1 引出的边共 5 条，因而红色边或蓝色边中必有一种的个数不小于平均数 5/2，也就是不小于 3）. 关于重叠原则也请参看《抽屉原则及其他》一书.

在习题 1 中，读者可以找到这个原则的应用.

例 4 俱乐部里有 99 个人，每个人声称只愿意与他认识的人在一起打桥牌. 证明如果每个人认识的人数大于 66，总可以

从这 99 个人找出四个人，这四个人可以在一起打桥牌. 如果每个人认识的人数小于或等于 66，那就不一定能找出这样的四个人.

解 作一个图 G：用 99 个点表示 99 个人，如果两个人不认识就在相应的两个点之间连一条边.

如果每个人认识的人数大于 66，那么对每个点 v_i，有

$$\deg v_i \leqslant 99 - 1 - 67 = 31.$$

对于 v_1，取一个与它不相邻的点 v_2 后还剩下 97 个顶点，其中与 v_1 或 v_2 相邻的顶点个数不超过

$$\deg v_1 + \deg v_2 \leqslant 31 + 31 = 62,$$

因而必有与 v_1 及 v_2 均不相邻的点 v_3. 与 v_1，v_2，v_3 中至少有一个相邻的顶点个数不超过

$$\deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 \leqslant 31 \times 3 = 93,$$

所以在剩下的 96 个点中必有一个点 v_4 与 v_1，v_2，v_3 均不相邻. 由于 v_1，v_2，v_3，v_4 互不相邻，所以它们代表的四个人是互相认识的，这四个人愿意坐在一起打桥牌.

如果每个人认识的人数小于或等于 66，不一定能找出四个互相认识的人来. 为了举出这样的例子，只要设图 G 是由三个完全图 K_{33} 组成的图，则在 G 的 99 个顶点中找不出四个互不相邻的顶点，从而相应的 99 个人中也找不出四个互相认识的人.

最后介绍一个游戏，作为本章的结束.

例 5 制作四个同样大小的正方体 C_1，C_2，C_3，C_4，将它们的面涂上红、黄、蓝、白四种颜色，所涂颜色如表 1.1 所示.