高等学校教材

线性代数

第二版

王玉杰　邱玉文　吴天毅　编

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

（第二版）

王玉杰　邱玉文　吴天毅　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是依据高等学校线性代数课程教学基本要求，针对非数学类专业本科学生的专业学习与专业发展需要，结合教学实际在第一版的基础上修订而成。全书共分六章，主要内容包括：行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等，每一章都有一节应用实例内容，前五章都有一节数学实验内容。各章都配有适量的习题，书末附有部分习题参考答案。

本书注重阐明线性代数的基本理论、基本概念和基本方法，理论联系实际，由浅入深，突出重点，可作为高等学校非数学类专业线性代数课程教材使用，也可供科技人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王玉杰，邱玉文，吴天毅编．--2版．--北京：高等教育出版社，2015.7

ISBN 978-7-04-042343-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… ②邱… ③吴… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第057170号

策划编辑 贾翠萍　责任编辑 贾翠萍　封面设计 王琰　版式设计 童丹
插图绘制 尹文军　责任校对 陈杨　责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京汇林印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 16.25
字　　数 290千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2011年2月第1版
　　　　 2015年7月第2版
印　　次 2015年7月第1次印刷
定　　价 25.70元

物 料 号 42343-00

第二版前言

线性代数是高等学校理工类和经管类专业的一门重要基础课,在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有着广泛的应用。本书是依据高等学校线性代数课程教学基本要求,针对非数学类专业本科学生的专业学习与专业发展需要,结合教学实际在第一版的基础上修订而成,是天津科技大学线性代数课程教学改革的结晶,可作为高等学校非数学类专业线性代数课程教材使用,也可供科技人员学习参考。修订后的主要特点如下:

一、将最新的教学研究成果和教学改革经验融入教材的修订之中,使课程体系和教学内容得到进一步优化,更易于教与学。

二、突出线性代数的基本理论、基本概念和基本方法教学,目的是使学生理解基本理论,清楚基本概念,掌握基本方法。

三、采取由具体到抽象的方式构建知识,每一部分新内容的引入都由实际问题入手,以使学生更容易理解和接受。

四、注重现代科技发展与传统线性代数教学内容相结合,突出对学生应用能力的培养,每一章都有一节应用实例内容,前五章都有一节数学实验内容。

五、例题设计启发性强,习题配置利于学生学习和巩固知识。

在本次修订过程中,编者参考了许多线性代数教材,天津科技大学理学院数学系同仁也提出了一些中肯的改进意见,在此对相关作者及数学系同仁致以衷心的感谢!

全书由王玉杰教授主编并负责统筹定稿,其中第一章由吴天毅教授执笔,第二、三章由邱玉文副教授执笔,第四、五、六章由王玉杰教授执笔。

虽然本书的编者长期从事线性代数课程的教学工作,具有丰富的教学经验。但是由于水平所限,错误与不妥之处在所难免,恳请广大读者和同行批评指正。

编　者

2014 年 11 月

第一版前言

线性代数是普通高等学校理工类和经管类专业的一门重要基础课，在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有着广泛的应用。本书是依据高等学校线性代数课程教学基本要求、结合教学实际编写而成的，可作为普通高等学校非数学类专业线性代数课程教材使用，也可供科技人员阅读和参考。本书的主要特点如下：

一、注重将现代数学思想与传统线性代数教学内容结合起来，特别注意线性代数内容与数学软件的结合，每章后面都配以数学实验题目。

二、突出线性代数的基本理论、基本概念和基本方法，目的是使学生理解基本理论，清楚基本概念，掌握基本方法。

三、采取由具体到抽象的方式，每个新内容的引入都由实际问题入手，由于有实际背景，学生易于接受和理解。

四、注重培养学生的实际应用能力，适当增加了实际应用方面的例题和习题，使学生学会用线性代数知识解决问题。

五、注重教学内容的改革，将编者的实际教学经验与体会融入教材之中，使其在内容的取舍和结构的编排上更合理，更易于教与学。

本书编者长期从事线性代数课程的教学工作，具有丰富的教学经验，特别是对新形势下如何改革线性代数的教学内容和教学方法、加强课程建设、提高教学质量等方面有着比较深入的研究。本书是编者多年教学经验和研究成果的结晶。全书由吴天毅教授主编并负责统筹定稿，其中第一章由吴天毅教授执笔，第二、三章由邱玉文副教授执笔，第四、五、六章由王玉杰教授执笔。

本书的编写得到天津科技大学理学院领导的大力支持，同时也得到数学系同仁的热情帮助，许多同仁对本书的编写提出了宝贵的意见和建议，使编者受益匪浅。在此，对给予我们支持和帮助的各位领导、同仁表示衷心的感谢！

编　者

2010 年 8 月

目　录

第一章　行列式 …… 1

§1.1　行列式的定义 …… 1

§1.2　行列式的性质 …… 8

§1.3　行列式的展开 …… 13

§1.4　克拉默法则 …… 23

§1.5　应用实例 …… 26

§1.6　数学实验 …… 28

习题一 …… 30

第二章　矩阵 …… 33

§2.1　矩阵的概念 …… 33

§2.2　矩阵的运算 …… 36

§2.3　矩阵的转置与方阵的行列式 …… 42

§2.4　逆矩阵 …… 46

§2.5　分块矩阵 …… 50

§2.6　初等变换与初等矩阵 …… 56

§2.7　矩阵的秩 …… 65

§2.8　应用实例 …… 68

§2.9　数学实验 …… 72

习题二 …… 77

第三章　向量与线性方程组 …… 82

§3.1　线性方程组的解法 …… 82

§3.2　向量的线性表示与等价 …… 91

§3.3　向量组的线性相关性 …… 97

§3.4　向量组的秩 …… 103

§3.5　向量空间 …… 106

§3.6　线性方程组解的结构 …… 108

§3.7　向量的内积与正交化方法 …… 116

§3.8　应用实例 …… 123

§3.9　数学实验 …… 125

习题三 …… 128
第四章 矩阵的特征值与特征向量 …… 133
§4.1 矩阵的特征值与特征向量 …… 133
§4.2 相似矩阵 …… 140
§4.3 实对称矩阵的对角化 …… 150
§4.4 应用实例 …… 158
§4.5 数学实验 …… 160
习题四 …… 162
第五章 二次型 …… 165
§5.1 二次型及其矩阵表示 …… 165
§5.2 二次型的标准形 …… 168
§5.3 化二次型为标准形的几种方法 …… 171
§5.4 二次型的规范形 …… 181
§5.5 二次型的分类 …… 183
§5.6 应用实例 …… 191
§5.7 数学实验 …… 195
习题五 …… 196
第六章 线性空间与线性变换 …… 199
§6.1 线性空间的定义及其性质 …… 199
§6.2 基、维数与坐标 …… 202
§6.3 基变换与坐标变换 …… 210
§6.4 线性子空间 …… 214
§6.5 线性空间的同构 …… 215
§6.6 线性变换的定义及其性质 …… 218
§6.7 线性变换的矩阵 …… 222
§6.8 应用实例 …… 230
习题六 …… 233
附录 部分习题参考答案 …… 237

第一章　行　列　式

行列式在线性代数中是一个基本工具,我们研究许多问题时都需要用到它.本章在引进二阶、三阶行列式定义的基础上,介绍 n 阶行列式的定义、性质及行列式按行(列)展开,并给出利用行列式求解线性方程组的克拉默法则.

§1.1　行列式的定义

一、二阶和三阶行列式

行列式是由线性方程组的公式解引出来的,因此我们先讨论二元和三元线性方程组的公式解,并由此给出二阶和三阶行列式的定义.

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

利用加减消元法容易求出方程组(1)的唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{2}$$

式(2)中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得到的.为了便于记忆,引入二阶行列式的概念.

将 4 个数排成 2 行 2 列,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{3}$$

称式(3)左边为**二阶行列式**(determinant),右边的式子为**二阶行列式的展开式**(expansion).数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的**元**(element),其中 a_{ij} 的第一个下标 i 表示该元位于第 i 行,第二个下标 j 表示该元位于第 j 列.

由式(3)可知,二阶行列式的计算满足**对角线法则**,即:主对角线(自左上至右下)上元之积减去副对角线(自右上至左下)上元之积.二阶行列式的计算结

果是一个数.

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则二元线性方程组(1)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{4}$$

注 D 是用方程组(1)的系数所确定的二阶行列式,称为方程组的系数行列式.D_1 是用方程组(1)的常数项 b_1,b_2 分别代替 D 中第 1 列元 a_{11},a_{21}所得的二阶行列式,D_2 是用方程组(1)的常数项 b_1,b_2 分别代替 D 中第 2 列元 a_{12},a_{22}所得的二阶行列式.

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=2 \\ 3x_1+2x_2=1 \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1\times2-(-1)\times3=5\neq0$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times2-(-1)\times1=5$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1\times1-2\times3=-5$$

所以

$$x_1=\frac{5}{5}=1,\quad x_2=\frac{-5}{5}=-1$$

类似地,考虑三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

其中 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq0.$

利用加减消元法也可得到线性方程组(5)的求解公式：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases} \tag{6}$$

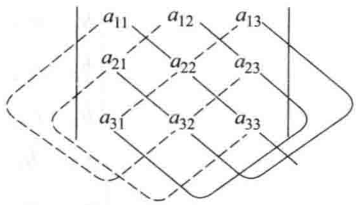
要记住这个求解公式是很困难的.为了便于对式(6)的记忆，引入三阶行列式的概念.

将9个数排成3行3列，记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{7}$$

称式(7)左边为三阶行列式，右边的式子为三阶行列式的展开式.

由式(7)右边的式子可知，三阶行列式的展开式中共有6项，这6项的确定可按右图所示的对角线法则进行，即：三阶行列式的展开式为右图中实线上3个元的乘积(3项)减去虚线上3个元的乘积(3项).



例2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\times0\times5+4\times1\times7+2\times9\times6- 7\times0\times2-9\times1\times(-1)-5\times4\times6 = 25$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则当 $D\neq0$ 时,三元线性方程组(5)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{8}$$

注 D 是用方程组(5)的系数所确定的三阶行列式,称为方程组的系数行列式.$D_j(j=1,2,3)$ 是用方程组(5)的常数项 b_1,b_2,b_3 依次代替 D 中第 j 列元 a_{1j},a_{2j},a_{3j}所得到的三阶行列式.

例 3 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x+y-z=0 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=18\neq0$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-7$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-8$$

所以原方程组有唯一解 $x=-\dfrac{1}{18},y=-\dfrac{7}{18},z=-\dfrac{4}{9}$.

注 类似地,也可引入四阶及四阶以上的行列式,但这些行列式的展开不适合用对角线法则,需从其他方面给出其定义.为此介绍排列的概念与性质.

二、逆序数与对换

为了把二阶和三阶行列式的定义推广到一般的 n 阶行列式,需要用到逆序数和对换的概念.

定义 1　将 n 个数 $1,2,3,\cdots,n$ 按某种次序排成一排，称为这 n 个数的一个**全排列**，简称为一个 n 级**排列**(permutation).n 个数按自然次序由小到大的排列称为**标准排列**.

显然，n 个数 $1,2,3,\cdots,n$ 的全排列共有 $n!$ 种.

定义 2　在 n 个数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个全排列中，若两个数的前后次序和标准次序不一致，则称这两个数构成一个**逆序**(inverse order).一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$(1 到 n 的一个排列)中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**(number of inverse order)，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例 4　求排列 32514 的逆序数.

解　在排列 32514 中，从左至右考察：

3 在首位，按定义有 0 个逆序；

2 在第二位，前面的数 3 大于 2，有 1 个逆序；

5 在第三位，前面的数都小于 5，有 0 个逆序；

1 在第四位，前面的数 3,2,5 都大于 1，有 3 个逆序；

4 在第五位，前面的数 5 大于 4，有 1 个逆序.

因此这个排列的逆序数 $\tau(32514)=0+1+0+3+1=5$.

定义 3　如果一个排列的逆序数是奇(偶)数，那么称这个排列为**奇(偶)排列**.

定义 4　在一个排列中，任意对调两个元素，其余元素不动，这一过程称为**对换**(transposition).相邻两个元素的对换称为**相邻对换**.

定理 1　**一个排列进行奇数次对换，排列改变奇偶性；进行偶数次对换，排列的奇偶性不变.**

证　设 a,b 是一个排列中的两个数.

(1) 若 a 与 b 是相邻的两个数，对换 a 与 b 后，只有 a 与 b 之间的逆序发生了变化，因此对换 a 与 b 后的排列的逆序数与原排列的逆序数相差 1，从而改变了排列的奇偶性.由此可推知：一个排列进行奇数次相邻对换，排列改变奇偶性；进行偶数次相邻对换，排列不改变奇偶性.

(2) 若 a 在 b 之前 i 位，只要将 a 向后进行 i 次相邻对换，再将 b 向前进行 $i-1$ 次相邻对换，就能将 a 与 b 对换.此过程共进行了 $2i-1$ 次相邻对换，由(1)可知对换 a 与 b 后该排列改变了奇偶性.

由(1)和(2)可知，对换一次则排列改变奇偶性，由此即可推知定理结论成立.

如果定义标准排列为偶排列，则可由定理 1 得到下面的推论.

推论　奇(偶)排列经过奇(偶)数次对换可成为标准排列.

三、n 阶行列式的定义

从二阶和三阶行列式的定义式(3)和(7)可以看出：

1. 它们的展开式的每一项都是位于不同行且不同列的元的乘积.

2. 每一项前面的正负号是这样来决定的:当该项各元的行标自左至右组成标准排列时,其列标自左至右组成的排列的逆序数是奇数则取“-”号,逆序数是偶数则取“+”号.

3. 二阶行列式展开后共2!项,三阶行列式展开后共3!项.

根据以上三点,二阶行列式的定义可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2} (-1)^{\tau(p_1p_2)} a_{1p_1} a_{2p_2}$$

其中 p_1p_2 是 1,2 的一个排列,$\tau(p_1p_2)$ 是该排列的逆序数,$\sum\limits_{p_1p_2}$ 表示对所有二阶排列 p_1p_2 求和.三阶行列式的定义可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的一个排列,$\tau(p_1p_2p_3)$ 是该排列的逆序数,$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对所有 3 阶排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

类似二阶和三阶行列式的定义,可给出 n 阶行列式的定义.

定义 5 将 n^2 个数排成 n 行 n 列,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{9}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列,$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是该排列的逆序数,$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.称式(9)左边为 **n 阶行列式**,式(9)右边为 **n 阶行列式的展开式**,称 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 为 n 阶行列式的元.

注 (1) n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项,其中每一项都是位于不同行且不同列的 n 个元的乘积.n 阶行列式可简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

(2) 不要将一阶行列式 $|a|=a$ 与绝对值符号相混淆.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1q_2\cdots q_n} (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{q_11} a_{q_22} \cdots a_{q_nn} \tag{10}$$

其中 $q_1q_2\cdots q_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列，$\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 是该排列的逆序数，$\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}$ 表示对所有 n 阶排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 求和.

证 在式(9)中，将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换成标准排列，此时 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 就对换成 $a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$.由定理 1 的推论可知排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 具有相同的奇偶性，从而有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

又由于排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 一一对应，所以得到

$$\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{11}$$

式(11)即说明式(10)成立.

注 定义 5 中式(9)与定理 2 中式(10)的区别是：前者是以行为标准次序来确定每项中的 n 个元，后者以列为标准次序来确定每项中的 n 个元.

由定义可以看出，直接利用定义计算 n 阶行列式，首先其展开式的所有项共有 $n!$ 个，每一项来自不同行与不同列的 n 个元的乘积.然后确定每一项的符号，可以将 n 个元按行(列)指标的自然顺序排列好，列(行)指标形成的排列的奇偶性决定了该项的正负号.

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&0&0&5\\0&0&6&0\\0&7&0&0\\8&0&0&0\end{vmatrix}$$

解 由行列式定义

$$D=\sum_{p_1p_2p_3p_4}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

和式中只有当 $p_1=4,p_2=3,p_3=2,p_4=1$ 时，$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}\neq0$，所以

$$D=(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^{1+2+3}5\times6\times7\times8=1\ 680$$

例 6 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$$

解 由行列式定义

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

和式中只有当 $p_1=n,p_2=n-1,\cdots,p_n=1$ 时,$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\neq 0$,所以

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

一般地,有如下结论

(1)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{12}$$

若行列式中对任何 $i<j$,都有 $a_{ij}=0$,称该行列式为**下三角形**行列式;若行列式中对任何 $i>j$,都有 $a_{ij}=0$,则称该行列式为**上三角形**行列式;上三角形、下三角形行列式统称为**三角形**行列式;若对于 $i\neq j$ 都有 $a_{ij}=0$,则称该行列式为**对角形**行列式.

(2)
$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \tag{13}$$

注 除一些特殊行列式外,一般行列式用定义计算是非常繁杂困难的,因此实际计算四阶以上(包括四阶)行列式时,并不常用定义去计算.

§1.2 行列式的性质

为进一步讨论 n 阶行列式,简化 n 阶行列式的计算,下面介绍 n 阶行列式的

一些基本性质.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 是将行列式 D 的行、列互换后得到的行列式,D^{T} 称为 D 的**转置行列式**(transpose determinant).

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 记 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,按定义 5 有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

又由定理 2 知

$$D=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

故

$$D^{\mathrm{T}}=D$$

注 性质 1 表明,行列式中的行与列具有同等的地位,所以行列式的性质中凡是对行成立的结论,对列也成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

证 互换行列式 D 的第 i 行和第 j 行,所得行列式记为 D_1,即

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$