"十二五"应用型本科系列规划教材

线性代数

Linear Algebra

主编 杜洪艳

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

线性代数

主　编　杜洪艳

副主编　胡满姑　高　萍

参　编　刘　军　张馨元　姚维山　洪　宁

机械工业出版社

本书根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求编写而成，编写的主导思想是在满足教学基本要求的前提下，注重分析问题、解决问题的方法，对理论推导的要求适当降低；在内容选择上突出精选够用，语言表达力求通俗易懂、深入浅出.

全书分为行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量的线性关系、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换等7章，各章均配有总习题及例题选讲. 其中，第1章至第6章符合本科专业教学基本要求，前4章为基础部分，第5章及第6章为应用提高部分，第7章可供对数学要求较高的专业选用.

本书可以作为普通高等院校本、专科线性代数课程的教材，也可以作为科技工作者的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/杜洪艳主编. —北京：机械工业出版社，2015.1

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-48982-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①杜… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第301998号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 陈崇昱
封面设计：路恩中 责任校对：陈秀丽
责任印制：刘 岚
北京京丰印刷厂印刷
2015年5月第1版·第1次印刷
190mm×210mm·12.5印张·370千字
标准书号：ISBN 978-7-111-48982-5
定价：39.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

前　言

科学的飞速发展和计算机的快速普及，使得数学在其他科学领域中的应用空前广泛，社会各个领域对数学的需求也越来越多，对各专业人才的数学素养要求也越来越高. 本书是以高等教育本科线性代数课程的教学基本要求为标准，以提高学生的专业素质为目的，在充分吸收编者多年来的教学实践和教学改革成果的基础上编写而成的.

线性代数是高等院校的基本课程之一，这门课程的思想和方法是人类文明发展史上理性智慧的结晶，它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，同时还给学生提供了一种思维的训练方法，帮助学生提高作为应用型、创造型、复合型人才所必需的文化素质和修养.

本书在编写过程中，注重培养学生的抽象思维能力，力求提高学生的数学素养，从而体现出数学既是一种工具，同时又是一种文化的思想. 在内容上增加了综合例题的讲解，从而加强学生对所学知识的理解并引导学生对综合问题进行分析. 通过对本书的学习，学生不仅能达到学会数学，更要达到会用数学的目的.

本书共分 7 章，在内容上既紧密联系又相对独立. 在对数学的基本概念和原理的讲述上既通俗易懂又兼顾了数学的科学性与严谨性. 对定义和定理等的叙述准确、清晰. 在每节后面配有相应的习题，每章最后一节配有例题选讲及总习题. 本书适用于普通高等院校本、专科线性代数课程的教学，也可作为科技工作者的参考用书.

参加本书编写的人员是武昌理工学院的杜洪艳、胡满姑、高萍、张馨元、洪宁、刘军、姚维山等. 全书的框架结构由主编杜洪艳负责，统稿及定稿由杜洪艳、胡满姑负责. 在此，特别感谢武汉大学黄本文教授在本书编写过程中所给予的指导。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请各位专家及读者批评指正.

目　　录

第1章 行 列 式

线性代数学的核心内容是：研究线性方程组的解的存在条件、解的结构以及解的求法. 所用的基本工具是矩阵，而行列式是研究矩阵的很有效的工具之一. 行列式作为一种数学工具，不但在本课程中极其重要，而且在其他数学相关学科中都是必不可少的.

本章将从二阶和三阶行列式出发，引入 n 阶行列式的概念，并讨论行列式的一些基本性质与计算方法，最后给出用行列式来解线性方程组的克莱姆法则.

1.1 二、三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

考察二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

消元法求解线性方程组(1.1)，分别消去 x_1 和 x_2，得同解方程组

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases} \tag{1.2}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得方程组(1.1)的唯一解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

为便于记忆求解公式(1.3)，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，常记为 D，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.4)的**元素**或元．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列．位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1.4)的 (i,j) 元．（如图 1.1 所示），把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**．于是二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积．该法则称为**"对角线法则"**．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-}_{+}$$

图 1.1

若将行列式D中的第一列元素换成方程组中的常数项，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

同理，将行列式 D 中的第二列元素换成方程组中的常数项，得到行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

于是式(1.3)可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.5}$$

例 1.1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ x_1-3x_2=-1. \end{cases}$$

解 因为$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-6-1=-7$,

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-15+1=-14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-5=-7,$$

所以方程组的解是 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=2$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=1$.

1.1.2 三阶行列式

定义 1.1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

由上述定义可见，三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积并冠以正、负号，其运算的规律性也可用“对角线法则”（如图 1.2 所示）来表述.

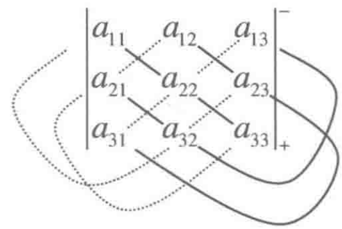

图 1.2

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

$=1\times5\times(-4)+(-1)\times1\times2+2\times1\times2-2\times5\times 2-1\times1\times1-2\times(-1)\times(-4)$

$=-20-2+4-20-1-8=-47.$

例 1.1.3 求解方程 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0.$

解 方程左端 $3x^2-x^2-4x=2x^2-4x=2x(x-2)=0$，

因此 $x=0$ 或 $x=2$.

例 1.1.4 解线性方程组 $\begin{cases} x_1-\ x_2+2x_3=13, \\ x_1+\ x_2+\ x_3=10, \\ 2x_1+3x_2-\ x_3=1. \end{cases}$

解 因为$D=\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&1&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=-5$,

$$D_1=\begin{vmatrix}13&-1&2\\10&1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix}1&13&2\\1&10&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&13\\1&1&10\\2&3&1\end{vmatrix}=-35,$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=7$.

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix}3&7\\-1&2\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}x-1&1\\x^2&x^2+x+1\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}1&4&2\\3&5&1\\2&1&6\end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix}2&-1&5\\3&1&-2\\1&4&6\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$; (8) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

2. 解三元一次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=10,\\x_1+4x_2-2x_3=-8,\\3x_1+2x_2-x_3=1.\end{cases}$$

3. 求解方程$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0$.

4. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$?

1.2 n 阶行列式

在有了二、三阶行列式的概念后，自然想到四阶或更高阶行列式的概念问题. 下面将二、三阶行列式的概念加以推广，引出 n 阶行列式的概念. 为使定义的 n 阶行列式具有统一的性质，并能借以讨论 n 元线性方程组的求解问题，对 $n>3$ 的行列式，前面图 1.1 与图 1.2 的画线法显然将不再适用，故需要用新的规则来定义. 为此，先介绍排列及其逆序数的概念.

1.2.1 排列

定义 1.2 由自然数 1，2，3，…，n 组成的一个有序数组，称为一个 **n 级排列**.

例如，2134 是一个 4 级排列，34125 是一个 5 级排列.

例 1.2.1 写出所有的 3 级排列.

解 自然数 1，2，3 组成的有序数组共有下列 6 个：

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 321,\ 312.$$

这就是全部 3 级排列.

我们知道，n 级排列一共有 $n!$ 个. 显然，1，2，3，…，n 也是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排列起来的，我们称为自然排列.

定义 1.3 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**.

下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

设有 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑排列中任一元素 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数的总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i,$$

即是这个排列的逆序数.

例 1.2.2 求 5 级排列 35412 的逆序数.

解 构成逆序的数对共有 7 对，即 31，32，54，51，52，41，42，因此 $t(35412)=7$.

例 1.2.3 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数.

解 因为在这个排列中，n 后面比它小的数有 $n-1$ 个，$(n-1)$ 后面比它小的数有 $n-2$ 个，…，3 后面比它小的数有 2 个，2 后面比它小的数有 1 个，所以

$$t(n(n-1)\cdots321) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

一个排列的逆序数在一定程度上刻画了这个排列的性质.

定义 1.4 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**，逆序数是奇数的排列称为**奇排列**.

例如，$t(31452)=4$，因此，31452 是偶排列；$t(35412)=7$，因此，35412 是奇排列.

定义 1.5 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样的一个变换称为**对换**.

排列 31452 经过 1 和 5 对换，变成排列 35412，记作 $31452 \xrightarrow{(1,5)} 35412$. 由于 31452 是偶排列，35412 是奇排列，因此对换 $(1,5)$ 改变了排列 31452 的奇偶性.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明 先证明相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_i abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b 后，原排列变为 $a_1\cdots a_i bab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1$，…，$a_i$ 和 b_1，…，b_m 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 两元素的逆序数改变可以分两种情况：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_i abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_i bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证明一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_i ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_i abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_i bb_1\cdots b_m ac_1$

$\cdots c_n$. 总之，经过 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_i a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_i b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证明　由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此知推论成立.

例如，$35412 \xrightarrow{(5,2)} 32415 \xrightarrow{(1,4)} 32145 \xrightarrow{(3,1)} 12345$，所作对换次数 3 与 $t(35412)=7$ 都是奇数.

1.2.2　n 阶行列式的定义

为了把二阶和三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，先来分析三阶行列式的特点.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

由上式可以看出：

(1) 等式右边的每一项都是三个取自不同行、不同列的元素的乘积，即每一项都可以写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

其中，$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 为 1，2，3 所有可能的排列中的一个排列，这样的排列一共有 6 种，分别对应等式右端中的 6 项；

(2) 各项的正、负号与列标的排列的逆序数有关.

带正号的三项列标排列是 123，231，312；

带负号的三项列标排列是 132，213，321.

通过计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正、负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

由此，三阶行列式可以写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{t(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中，t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$表示对1，2，3三个数的所有排列取和.

现在我们就可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.6 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号$(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.7}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 n！个，因而形如式(1.7)的项共有 n！项，所有这 n！项的代数和

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 ***n* 阶行列式**，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

简记为 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij}为行列式 D 的(i,j)元.

当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，式(1.7)表示二阶或三阶行列式. 由一个元素 a 构成的一阶行列式$|a|$就是其本身.

例 1.2.4 计算行列式

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};\qquad (2)\ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 根据定义

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3p_4} (-1)^{t(p_1p_2p_3p_4)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}.$$

因为原行列式中有许多零元素，这表明 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 中有许多项应等于零. 于是，只要把不为零的项求出来就可以了. 取一般项

$$(-1)^{t(p_1p_2p_3p_4)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}.$$

显然，只有当 $p_1=4$，$p_2=3$，$p_3=2$，$p_4=1$ 时，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\neq 0$，其他项中都含有零元素，因此它们的乘积为零.

又因为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 的列标的排列的逆序数为 6，所以 $(-1)^{t(4321)}$ 取正号，得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

(2) 与第(1)问相同，我们可以确定它的一般项

$$(-1)^{t(p_1p_2p_3p_4)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

中不为零的项. 显然当 $p_1=2$，$p_2=4$，$p_3=1$，$p_4=3$ 时，$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}\neq 0$，其他各项均为零. 而 2413 的逆序数为 3，所以 $(-1)^{t(2413)}$ 取负号，得

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = -a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}.$$

主对角线下方的元素全为零的行列式称为**上三角形行列式**，反之主对角线上方的元素全为零的行列式称为**下三角形行列式**. 上、下三角形行列式统称为**三角形行列式**.

例 1.2.5 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 根据定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3p_4} (-1)^{t(p_1p_2p_3p_4)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}.$$

显然，当 $p_1=1$，$p_2=2$，$p_3=3$，$p_4=4$ 时，$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\neq 0$，其余各项都等于零，而 1234 的逆序数为 0，所以 $(-1)^{t(1234)}$ 取正号，于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

对于 n 阶上、下三角形行列式，同样可以证明以下结论：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此可知，若能将一般高阶行列式化成三角形行列式再求值，便得到了一种计算行列式的方法.

例 1.2.6 证明 n 阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$