高等学校教材

高等数学

Advanced Mathematics

下 册

■主编 亓 健 费祥历

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

Advanced Mathematics

下册

■主编　亓　健　费祥历

高等教育出版社·北京

内容简介

本书共12章，分上、下两册出版。上册是第1—6章，包括函数与极限、一元函数的导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用和微分方程与差分方程初步。下册是第7—12章，包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、数量值函数的积分学、向量值函数的积分学、无穷级数和微分方程(续)。上册部分的微分方程是利用一元函数微积分方法求解的微分方程，方便与大学物理等其他课程衔接。下册部分的微分方程(续)是利用多元函数微分法、无穷级数理论求解的微分方程。空间解析几何放在下册可以和多元函数微积分理论形成一个整体。

每章的复习题是对本章内容进行问题式复习，总习题是综合性较强的练习题，后面的选读内容，一是进一步体现数学的应用，二是向读者适度开放了解现代数学的窗口，可作为研究性教学的扩展知识案例。

本书可作为高等学校理工类、经管类专业高等数学课程的教材，也可供其他专业及学习高等数学的读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/亓健，费祥历主编.--北京：高等教育出版社，2015.9

ISBN 978-7-04-043385-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①亓… ②费… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第163853号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 于丽娜 高 丛　封面设计 张申申　版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹　责任校对 窦丽娜　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	29.5	版　　次	2015年9月第1版
字　　数	540千字	印　　次	2015年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	36.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　43385-00

目 录

第 7 章　空间解析几何与向量代数

引述　客观世界的物质是在空间不断运动的.研究物质在空间的运动形式，就要应用空间解析几何的知识.解析几何学的产生是数学史上一个划时代的成就.它通过点和坐标的对应，把数学研究的两个基本对象“形”和“数”统一起来，使得人们既可以用代数方法研究解决几何问题，也可用几何方法解决代数问题.在中学阶段我们学习了平面解析几何，空间解析几何是平面解析几何的直接推广，它把空间图形与三元方程相对应，用来研究空间几何图形的问题，这对于以后学习多元函数微积分是必不可少的.

本章首先建立空间直角坐标系，引进在工程技术上有广泛应用的向量，以向量代数为有力工具，讨论空间的几何图形，主要是空间的平面、直线和常见的曲面及曲线等.空间直角坐标系、向量的线性运算和数量积运算在中学都已学过，本章将进行系统地复习，并引进向量的另一种乘积运算——向量积.

7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间点的直角坐标

研究空间的几何问题，首先要解决怎样用数来确定空间中一点的位置.

我们已经知道，数轴是规定了原点、方向和长度单位的直线，它把直线上的点和实数一一对应起来，直线上的任意一点的位置，可以用一个数来确定；而确定平面上一点的位置，需要两个有序数，在平面上选取两条互相垂直的数轴 Ox，Oy，建立直角坐标系 Oxy，这时平面上任何一点的位置，都可以用有序数对 (x,y) 来确定.现在把这种思想加以推广，用三个有序数来确定空间一点的位置.为此，通过建立三维空间的直角坐标系，来建立空间图形和数之间的联系.

在空间以定点 O 为公共原点，作三条互相垂直的数轴 Ox，Oy 和 Oz，且一般有相同的长度单位，这样就建立了一个空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，其中 Ox，Oy 和 Oz 分别称为 x **轴**(**横轴**)，y **轴**(**纵轴**)和 z **轴**(**竖轴**)，统称为**坐标轴**；它们的公共原点称为**坐标原点**.习惯上，如图 7-1 所示，把 x 轴和 y 轴取在水平面上，x 轴正向朝着前方，y 轴正向由左到右，z 轴取在铅垂线上，其正向由下而上.这种坐标系称为**右手系**.因为它的坐标轴的方向符合**右手法则**.所谓右手法则，指的是：伸平

右手，使拇指与其他四指垂直，当四指从 x 轴的正向转动 $\frac{\pi}{2}$ 的角度指到 y 轴的正向时，拇指的指向应是 z 轴的正向. 本书采用的坐标系都是右手系. 如图 7-2 所示.

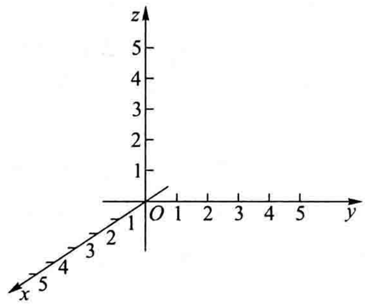

图 7-1

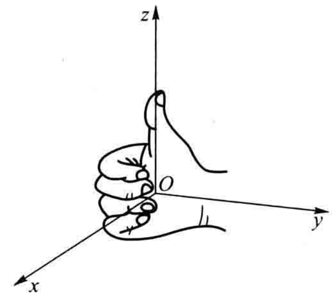

图 7-2

坐标系中每两条坐标轴可以确定一个平面，称为**坐标平面**. 如 x 轴和 y 轴确定 xOy 平面，y 轴和 z 轴确定 yOz 平面，x 轴和 z 轴确定 xOz 平面.

三个坐标面把整个空间分隔成八个部分，每个部分称为一个**卦限**. xOy 坐标面的上方和下方各有四个卦限. 我们把 xOy 平面内第 1,2,3,4 象限上方的对应四个卦限依次称为第Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限，下方的对应四个卦限则依次称为第Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ卦限. 如图 7-3. 例如含有 x 负半轴，y 正半轴，z 负半轴的卦限是第Ⅵ卦限.

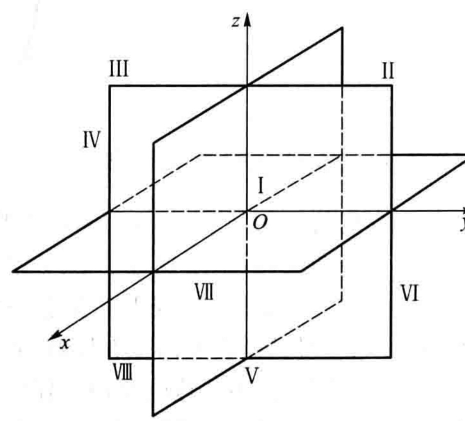

图 7-3

在上面建立的坐标系中，坐标轴、坐标面都是两两垂直的，所以称它为**空间直角坐标系**.

有了空间直角坐标系之后，就可以建立空间的点和有序数组之间的对应关系. 设 M 为空间的一个定点，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，它们与三个坐标轴分别相交于 A,B 和 C 三个点. 设 A,B,C 三点在三个坐标轴上的坐标依次为 x,y,z，这样，空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z). 反过来，任意给定一个有序数组 (x,y,z)，我们可以在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x,y,z 的三个点 A,B,C，然后分别过点 A,B,C 各作垂直于 x 轴、y 轴和 z

轴的平面，这三个平面的唯一的交点 M，就是有序数组(x,y,z)所确定的唯一的一点.见图 7-4.

这样，以空间直角坐标系为桥梁，我们就在空间点集与三个实数的有序数组集合之间建立了一一对应的关系.有序数组中的 x,y,z 称为点 M 的**坐标**，其中 x，y,z 依次称为点 M 的**横坐标**，**纵坐标**，**竖坐标**.坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为$M(x,y,z)$.

坐标轴或坐标平面上的点的坐标各具有一定的特征.例如原点 O 的坐标为$(0,0,0)$；x 轴，y 轴和 z 轴上点的坐标分别为$(x,0,0)$，$(0,y,0)$和$(0,0,z)$；坐标平面 xOy，yOz 和 xOz 内点的坐标分别为$(x,y,0)$，$(0,y,z)$和$(x,0,z)$.

各个卦限内点的坐标的符号，也有一定的规律.例如第Ⅷ卦限内的点，横坐标取正号，纵坐标取负号，竖坐标取负号.其他请读者自己列出.点(x,y,z)关于 xOy 平面的对称点的坐标是$(x,y,-z)$，关于 x 轴的对称点的坐标为$(x,-y,-z)$，关于原点的对称点的坐标为$(-x,-y,-z)$，其余情况可以类推.

设点 $P(a,b,c)$是空间一点，从点 P 向 xOy 平面作垂线，设垂足为 Q，则易知点 Q 的坐标为$(a,b,0)$.点 Q 称为点 P 在 xOy 平面内的**投影**.如图 7-5 所示，同理可知点 P 在 yOz 平面和 xOz 平面内的投影分别是 $R(0,b,c)$和 $N(a,0,c)$.

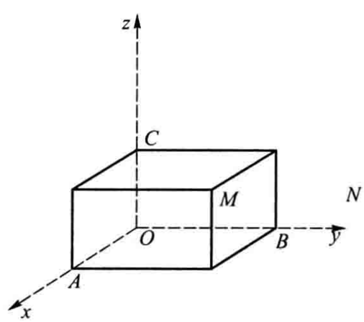

图 7-4

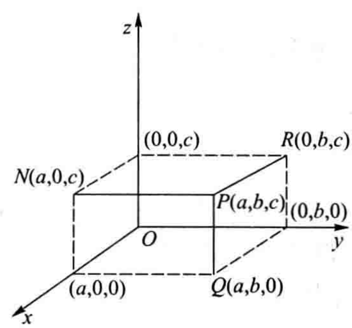

图 7-5

例 1 在空间直角坐标系中，已知定点 $P(4,-3,-2)$，分别求出它关于 xOy 平面、x 轴和坐标原点的对称点的坐标，并求出它在 xOz 平面投影的坐标.

解 点 $P(4,-3,-2)$关于 xOy 平面的对称点为$(4,-3,2)$；

点 $P(4,-3,-2)$关于 x 轴的对称点为$(4,3,2)$；

点 $P(4,-3,-2)$关于原点的对称点为$(-4,3,2)$；

点 $P(4,-3,-2)$在 xOz 平面的投影为$(4,0,-2)$.

7.1.2 两点间的距离

设点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两个定点，可以用两点的坐标来表示它们之间的距离 d.

如图 7-6 所示，过点 M_1，M_2 分别作垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面所围成的长方体以 M_1M_2 为对角线.根据勾股定理，有

$$d^2=|M_1M_2|=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2.$$

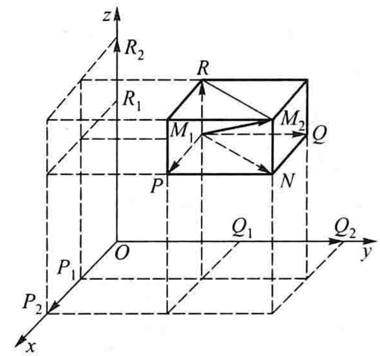

图 7-6

根据数轴上两点间距离公式可知

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1-1)$$

这就是**空间两点间的距离公式**.特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (1-2)$$

例 2 在 z 轴上求一点 M，使 M 到点 $A(1,0,2)$ 和点 $B(1,-3,1)$ 的距离相等.

解 因为所求点 M 在 z 轴上，可设点 M 的坐标为 $(0,0,z)$，根据题意，有 $|MA|=|MB|$，即

$$\sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0+3)^2+(z-1)^2}.$$

两边去根号，解得

$$z=-3,$$

所求点为 $M(0,0,-3)$.

例 3 求证以三点 $A(4,-2,9)$，$B(10,-4,6)$，$C(2,1,3)$ 为顶点的空间三角形是等腰直角三角形.

解 因为

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-4+2)^2+(6-9)^2}=7,$$
$$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(1+2)^2+(3-9)^2}=7,$$

$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(1+4)^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2}.$$

所以

$$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2.$$

故三角形 ABC 是等腰直角三角形.

习题 7.1

A

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在的卦限:

$A(1,-2,3)$;$B(2,3,-4)$;$C(2,-3,-4)$;$D(-2,-3,1)$;$E(-2,3,1)$.

2. 指出下列各点的位置的特殊性:

$A(5,0,0)$;$B(0,-3,0)$;$C(0,0,4)$;$D(1,2,0)$;$E(1,0,2)$;$F(0,2,1)$.

3. 求点(a,b,c)关于(1) 各坐标面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标($abc\neq 0$).

4. 写出点 $P(-3,5,2)$在各坐标面投影的坐标.

5. 求以点 $A(2,1,0)$,$B(3,3,4)$,$C(5,4,3)$为顶点的空间三角形的周长.

B

1. 判断以下列各点为顶点的三角形 ABC 是否是等腰三角形、直角三角形:

(1) $A(5,5,1)$,$B(3,3,2)$,$C(1,4,4)$; (2) $A(-2,6,1)$,$B(5,4,-3)$,$C(2,-6,4)$;

(3) $A(3,-4,1)$,$B(5,-3,0)$,$C(6,-7,4)$.

2. 判断点 P,Q,R 是否三点共线:

(1) $P(1,2,3)$,$Q(0,3,7)$,$R(3,5,11)$; (2) $P(0,1,2)$,$Q(1,3,1)$,$R(3,7,-1)$.

3. 求点 $M(a,b,c)$到各坐标轴的距离.

4. 在 z 轴上求一点,使其与点 $A(-4,1,7)$和 $B(3,5,-2)$等距离.

5. 在 yOz 平面上求一点,使它到 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$和 $C(0,5,1)$的距离相等.

7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的概念

从质量、长度、密度等只有大小的量,抽象出了数量(或者标量)的概念,从速度、位移、力等既有大小又有方向的量,抽象出的量称为向量(或者矢量).在中学学习了平面向量和空间向量的概念,给出了向量的坐标表示,定义了向量的加法、减法和数乘向量的线性运算和两个向量的数量积运算.

以 A 为起点,B 为终点的向量可以用有向线段表示为$\overrightarrow{AB}$,或者用加粗的单个

字母，比如 $\boldsymbol{a}$ 表示(图 7-7).

线段$\overline{AB}$的长度刻画了向量的大小，称为向量$\overrightarrow{AB}$的**模**，记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或者 $|\boldsymbol{a}|$. 如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向也相同，就称 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为**相等向量**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.从而向量完全由模和方向确定，与向量的起点的位置无关，因此称为自由向量.所有相等的向量都可以用同一条有向线段表示.模为 1 的向量称为**单位向量**，模为 0 的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$，零向量的方向可以看成任意的.

B 为起点，A 为终点的向量$\overrightarrow{BA}$与向量$\overrightarrow{AB}$大小相等，方向相反，称$\overrightarrow{BA}$为$\overrightarrow{AB}$的反向向量或者负向量，记为$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$(图 7-8).

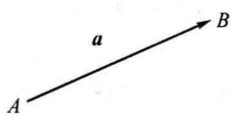

图 7-7

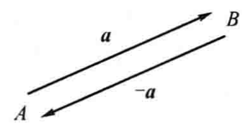

图 7-8

两个方向相同或者相反的向量是互相平行的，可以平移到同一条直线上，因此称为共线向量.三个或者三个以上的一组向量如果都与某个平面平行，就可以平移到同一个平面上，称为共面向量.

7.2.2 向量的加法

在物理学中，我们通过实验知道，物体的两个相继位移$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，等效于一个位移$\overrightarrow{AC}$(图 7-9)，在力学实验中，两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的作用等效于一个力 $\boldsymbol{F}$ 的作用(图 7-10)，从这些实际问题中我们抽象出两个向量的加法的概念.

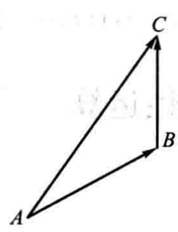

图 7-9

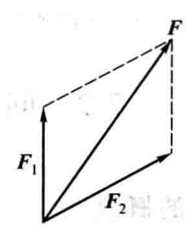

图 7-10

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个向量，将 $\boldsymbol{b}$ 的起点平移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点后，把从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 定义为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.根据力的合成法则和几何原理，向量 $\boldsymbol{c}$ 也可以看成与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 起点相同，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量(图 7-11).这两种加法方法分别称为向量加法的**三角形法则**与**平行四边形**