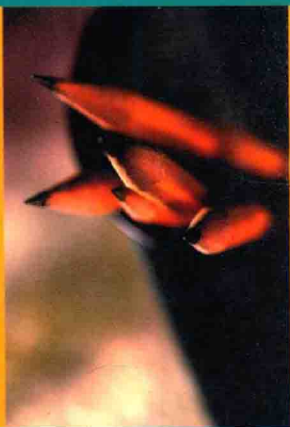


中学数学专题丛书

叶老斌 主编



方延伟 编著

数学 归纳法

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社



叶尧城 主编

中学数学专题丛书

数学 归纳法

方延伟 编著

11

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

数学归纳法/方延伟编著. —武汉:湖北教育出版社, 2001

(中学数学专题丛书/叶尧城主编)

ISBN 7-5351-3167-0

I. 数… II. 方… III. 数学归纳法 - 中学 - 教学参考资料

IV. G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 085389 号

出版 发行:湖北教育出版社

网 址:<http://www.hbedup.com>

武汉市青年路 277 号

邮编:430015 传真:027-83619605

邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店

印 刷:文字六〇三厂印刷

(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)

开 本:787mm×1092mm 1/32

7.5 印张

版 次:2002 年 4 月第 1 版

2002 年 4 月第 1 次印刷

字 数:144 千字

印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3167-0/G·2572

定价:10.00 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

总 序

随着素质教育的深入推进,需要在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁,以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建?改革教材成为了人们选择的突破口!当前,国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用,新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而,我国幅员辽阔,地区间的教育水平的差异大,个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”,发展学生的个性特长,让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高,还需要通过特定的教学过程来完成,其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等)。因此,我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物,以专题讲座的形式,帮助学生了解知识的发生、发展过程,学会分析、解决问题的思想方法,深化、拓宽相关知识。

有鉴于此,我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子,各册相对独立又相互联系,小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触,介绍一点数

学史料,有助于学生吸收各种不同的数学经验,理解各种不同的数学思想观点,体会数学的人文价值;着力反映知识的纵横联系,并以范例的形式予以说明;精选典型例题,揭示重难点,说明重在何处,难在哪里,如何理解,着重分析解题思路,阐释思想方法;选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题,引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题,供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生,可系统阅读,也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲,该套丛书具有如下特点:

1. **帮助学生夯实基础。**通过知识精讲、典例剖析、归纳小结,落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力。**精选思想性强的综合题,启迪学生的思维,开阔学生的思路,落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用。**精选密切联系生活实际和社会实践的应用题,促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新。**精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题,培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功。**选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型,有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩,走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试,难免出现这样或那样的疏漏和不足,敬请读者提出批评和建议,以便再版时修改,使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

数学归纳法“自述”	1
一、演绎和归纳	8
§ 1.1 三段论与演绎法	8
§ 1.2 归纳思想及应用	12
二、数学归纳法的原理和步骤	24
§ 2.1 皮亚诺公理与数学归纳法	25
§ 2.2 两步缺一不可	31
三、如何正确运用数学归纳法	37
§ 3.1 验证是基础	37
§ 3.2 递推乃关键	40
§ 3.3 正确寻求递推关系	48
§ 3.4 由 $P(k+1)$ 到 $P(k)$	52
四、数学归纳法应用初步	59
§ 4.1 证明恒等式	59
✓ § 4.2 整除性与几何问题	70
✓ § 4.3 证明不等式	77
✓ § 4.4 数列有关问题	84
✓ § 4.5 归纳猜想证明	96
五、点击高考	118
§ 5.1 高考试题选析	118
§ 5.2 高考试题是如何编写的	145

六、数学归纳法的其它形式 156

§ 6.1 第二数学归纳法 156

§ 6.2 跳板数学归纳法 162

§ 6.3 反向数学归纳法 165

§ 6.4 螺旋式数学归纳法 170

§ 6.5 双重数学归纳法 174

七、数学归纳法的证明技巧 179

✓ § 7.1 起点前移或后挪 179

§ 7.2 起始步中觅蹊径 183

§ 7.3 因势利导要善“退” 186

§ 7.4 转化或强化命题 189

§ 7.5 增设辅助条件 195

§ 7.6 $A_n - B_n$ 型命题的证明 199

八、考一考你的归纳思维 206

答案与提示 212

数学归纳法“自述”

我,就是大名鼎鼎的数学归纳法,生活在神奇的自然数王国中,荣任令人艳羡的递推部部长一职,工作职责是帮助世人通向真理的天堂。

我生活过得很惬意,出色的工作也赢得了世人广泛的尊敬.惟一令我十分苦恼的是,世人总是忽视我的性别,不知我是“巾帼”还是“须眉”.偶有那些专家级的学者三五聚在一起谈论,也是公说公有理,婆说婆有理,似乎也无定论.为平息这场无谓的争论,也为了那些交了学费理应享有“知情权”的莘莘学子,今天,我正式宣告:我——数学归纳法,是一名地地道道的“假小子”。

这得从我悠久辉煌的家族史谈起。

我的高祖,人称不完全归纳法,诞生于远古,几乎与人类同龄,是一位让我引以自豪的大英雄.他,是一名真正不畏艰难险阻的勇士,在一切未知世界中,敢为人先,勇于探索,从不后退半步;他,又是一名眼光独到的预言家,在经过有限次的历险探索后,凭着过人的智慧与灵感,往往能提出一些具有伟大战略意义和深远历史意义的观点和结论.高祖是人类文明大智大勇的先驱者,他的业绩功昭日月.不过,人无完人,金无足赤.高祖生性放达,不拘小节,疏于检点,为此,也常常犯些

错误,甚至闹些笑话.但同他的历史功绩相比,还是瑕不掩瑜,伟人的错误与功绩不也是“三七开”么?!高祖如今仍然健在,并且精神焕发,老当益壮,丝毫没有“夕阳无限好,只是近黄昏”的哀叹.

2

我的父亲,人称完全归纳法,他主要从事为高祖弥补过错和完善结论的工作.也许是经历了漫长的历史进程,高祖的遗传基因在父亲身上已发生了不少变异.父亲的性格和工作作风与高祖迥然有别,他是一名严谨而追求完善的学者,对他所有的工作对象都要逐一考证,细加检验.只有当他考证完毕并确信正确无疑后,才向世人宣布大功告成.正因为如此勤恳地工作,他也获得了人类的青睐和美誉.他得出的结论人们是可以完全放心的,因为它是那样的完美无缺,就像文学家、艺术家笔下的美女,增一分则胖,减一分则瘦.但是,物极必反,正因为父亲事无巨细,事必躬亲,颇有“鞠躬尽瘁,死而后已”的风范,奈何一个人精力、能力、时间都是有限的,所以父亲的工作虽很完善,但业绩却不十分理想.为此,父亲烦闷不已.经过一番思考,他作出了一个英明而大胆的抉择:找一位贤内助.一方面为自己的验证工作分忧,另一方面就是幻想有朝一日能有一个超越自己并能继承和完成自己未竟事业的接班人.

父亲的贤内助——我的母亲,是完美女神的化身,被人们称作演绎法.母亲从小就生活在一个高度理念化的社会中,她不仅美丽无比,而且聪慧过人,思维缜密.靠着三段论推理的专长为人类的文明作出了杰出的贡献.据说在母亲16岁花季,距今两千多年前,一位名叫欧几里得的学者正是借助母亲出色的工作,完成了他公理化体系的宏篇巨著《欧氏几何》.这篇

巨著的问世,使得作者能得以流芳千古,同时也让母亲大红大紫起来。

母亲除了完成自己的本职工作外,确实帮了父亲不少忙。父亲验证工作中的很多步骤,都是靠母亲完成的。同时,从不爱幻想的父亲,生平第一个幻想竟变成了现实,就是父母的结合孕育了让他们十分骄傲的我。

大约在16世纪下半叶,在一位名叫马拉鲁克斯的助产士的帮助下,我呱呱坠地了。后来在“热心红娘”帕斯卡的大力引荐下,世人才真正认识了我,并承袭旧习,让我随了父姓,叫做数学归纳法。

我的高祖和父亲被人们合称为归纳法,母亲是演绎法,而我在前面曾声明我是地道的“假小子”,读到这里,你知道我的性别了吗?

这样给你说吧,我归依父姓,运用母亲的思维、推理方式,化无限为有限,而从事的是父亲未竟的事业。也许这样给我的性别下定义比较恰当而准确吧!

对于那些有理想、有追求的人,我是十分愿意为他们效劳的,我将尽我所能让他们达到真理的天堂。无论是初入道的莘莘学子,还是大师级学者,我都将一视同仁。不过,在你请我为你工作之前,你必须满足我两条不算太苛刻的要求,这必须先给你说明白了。

其一,“食有鱼”。身体是工作的本钱,你得给我基本的营养,让我的体能在出发前有个良好而坚实的基础。“鱼”不在大小,但一定要新鲜,要保证质量,不能吃了对身体有任何副作

用；另外也不在于多寡，正常情况下，一条足够，特殊状态下，可能要多吃几条。

其二，“坐有车”。通往天堂的路很遥远，完全靠步行可不行。更重要的是，这不是一般的马车，虽然车不需要十分的华丽，但是驾车的马可有讲究，需要齐天大圣在天宫中豢养的那种天马。惟有天马，才有足够的气力，使我们在到达通天之路的某一驿站时，还能坚持奔向下一站。

舍此两条中的任一条，我都将爱莫能助。我只能弹琴低吟：“食无鱼，坐无车。宝剑，我们还是归去吧！”

这两条中，比较难以办到的，自然是第二条，毕竟天马不是人人都能借到的。缺了这一条，即使你给我吃更多的鱼，让我的身体更强壮些，我也只能带你走到有限个驿站，无论如何是不可能把你带入天堂的。充其量只能像我的高祖一样，给你一个大胆的预测。这样的工作你最好还是去找我的高祖，他更擅长。

如果你有幸借来了天马，满足了我的第二个要求，却飘飘然，忽视了我的第一个基本要求，便一意孤行，那也是万万不可的。由于营养没跟上，身体的基本条件没得到保证，我是无力控制和驾驭马车的，很可能不但没把你带向真理的天堂，却把你带入了错误的万丈深渊。对那些好高骛远总想一步登天却不知天高地厚的“初生牛犊”来说，这一点一定可要记牢了。

为了满足不同类别的人一些特殊需求，递推部里共有我们姐妹多人供你选择。我们统称数学归纳法，简姓“归”。根据我们姐妹几人不同的性格特点，不同的工作风格，有好事者还

给我们取了不同的浑名，也不管我们是否乐意。

“多面手”归老大。老大毕竟是老大，不仅博学多才，而且工作作风踏实，中规中矩。更难能可贵的是它和蔼可亲，乐于助人，从不摆老大架子。对于初登递推部大门者，都会端茶让座，热情有加。那些扬风鼓帆，跃跃欲试，第一次去真理天堂漫游的人，去找老大办事，准没错。

“滚雪球”归小二，她的工作原理很有趣，就像从山坡上往下滚雪球，越滚越大，越滚越远。在自然数王国中，她是这样递推的：当 $n = 1$ 时成立，就可推出 $n = 2$ 成立；当 $n = 1, 2$ 成立就可推出 $n = 3$ 成立；当 $n = 1, 2, 3$ 成立就可推出 $n = 4$ 成立……一直这样干下去，就会把你送往真理天堂。

“老顽童”归小三。老三虽然也老大不小了，可是顽童秉性不改，连走路都爱一蹦三跳，总是大跨步前进。她有一个小秘密，就是跑得快吃得多。你找她办事，可得多让她吃几条鲜鱼哟。

“筋斗云”归小四。她思维奇特，常逆向而行，却往往能收到奇效，是个地道的“怪才”。据传，她曾拜大闹天空的齐天大圣为师，善腾云驾雾，能一个筋斗十万八千里。她的工作方式与其他几姐妹大不相同，首先她就会一个筋斗让你一步登天（当然这还得借助大姐的帮助），给你一个意外的惊喜。等你回过神来，一定有些不满意，由于跑得太快（不是“跑”，应该是“飞”。三姐“老顽童”和她相比，那自然是小巫见大巫了。）沿途景色都没看到呀！别慌，她老四有办法，她会驾着天马，从天而降，再沿途一站站返回，悠悠然让你尽情观赏个够。

“鸳鸯鸟”归小五。老五夫妻俩真正是举案齐眉，恩爱有

加。“在天愿作比翼鸟，在地愿为连理枝”，谁也休想拆散这对“鸳鸯鸟”。即使在带你通往天堂的途中，他们也是如影随形，寸步不离。如果你硬要棒打“鸳鸯”，则天堂之旅事休矣。

“独行侠”归小六。老六人虽不大，独立性却很强，一贯信奉的原则是“独立自主、自力更生”。她有一亲密女友，偏偏和她一样性格，两人虽合租一间房，却各付各的房租，各忙各的事。由于工作性质关系，在天堂之旅中，她俩得和你一同上路，千万记住了，对她俩可得一视同仁，不偏不倚。否则，褒一个贬一个，肯定有人会生你的气，闹得旅途不愉快。

我们几姐妹各有各的特长，就看你选谁当你的向导和马夫了。凭心而论，只有大姐“多面手”是个通才，加上她为人随和，容易接近，一般来讲，选择她就足够了。如果你是位智慧超群的英才，不妨再找其他几姐妹帮帮忙。

通往天堂的路并非都是一帆风顺，有时候，会遇上暴风骤雨，电闪雷鸣，甚至有不怀好意的天兵天将蛮横地阻拦。这就要求我们不仅要“晴带雨伞，饥带干粮”，还要练就一套过关斩将的杀敌绝技。……

讲了这么多，你对我——大名鼎鼎的数学归纳法有所了解了吗？或许你还是一头雾水，不知所云，认为我在杜撰一则子虚乌有、令人忍俊不禁的故事。不过，没有关系，这仅仅是故事梗概。如果你想真正读懂我，请随我来。

如果

你要看那山花

请到山上来

如果
你要看那浪花
请到海上来
如果
你想认识我
请随我到《数学归纳法》这本书中来

演绎和归纳

人们认识事物,有两个认识过程,一个是由一般到特殊的演绎,一个是由特殊到一般的归纳.演绎和归纳是人们认识事物的两个对立的认识方法的总结.在认识过程中这两者是对立的,也是统一的,缺少任何一方面都无法认识真理.

§ 1.1 三段论与演绎法

8

首先我们看一则寓意深刻的故事.

从前有一个懒人,他有一大瓮米.一天,他躺在米瓮边的一张席子上,开始想入非非:

“我若卖掉这些米,并买来尽可能多的小鸡.这些鸡长大后就会下很多蛋.然后,我把鸡和蛋卖了,再买来许多猪.当这些猪长大的时候,便会生许多小猪.那时,我再把它们卖掉,买回一些水牛.有了水牛,就会有許多小水牛.如果我把它们卖了,我就有钱买一块地.有了地,便可以种稻米、甘蔗和谷物.有了收成,我还可以买更多的地.再经营几年,我就能够盖上一幢漂亮的房子.”

“当我盖好房子,我将娶一个世上最美的女人做妻子.”

“那时，我是多么地富有，多么地幸福啊！”

懒人兴奋了，手舞足蹈起来，一脚踢翻了米瓮。瓮破了，米像水一般倾泻出来，落在肮脏的地面上。此时，邻居的一大群鸡蜂拥而至，把地上的米啄食精光。小鸡、猪、土地、房子和美丽的女人，一切的一切全都成了泡影。留给这个懒人的只是一只破了的瓮。

这个故事告诉人们：光想是不够的，更重要的是要付诸行动。不过，尽管懒人的结局是可悲的，但他的演绎术却颇值称道。

演绎是一种推理方法，它不是基于经验和尝试，也不依赖于人们的感官，而是建立在严格的推理之上的。数学大厦的基础，正是用这种演绎的方法砌成的。

下面我们研究一下懒人是怎样进行一连串推理的。首先，他从一瓮米开始，提出命题：“如果有米，那么可以卖掉米，买来尽可能多的小鸡”。简记为：“若有米，则有鸡”。懒人的第二个命题是：“我有一瓮米”，这是小前提。如果上述两个命题为真，那么推出的结论一定不假。用 P 代表“有米”， Q 代表“有鸡”，于是有：

[大前提] $P \rightarrow Q$ ，若有米，则有鸡。

[小前提] P ，我有一瓮米。

[结论] Q ，我有尽可能多的鸡。

懒人接下去的推理是：

[大前提] 若有鸡，则有蛋。

[小前提] 我有鸡。

[结论] 我有蛋(我的鸡会生蛋)。

[大前提] 若有鸡和蛋, 则有猪.

[小前提] 我有鸡和蛋.

[结论] 我有尽可能多的猪.

.....

以上这些都是演绎法的简单例子. 这种由大前提、小前提和结论三部分组成的演绎推理方法, 称为“三段论法”.

两千多年前的古希腊数学家欧几里得 (Euclid, 前 330? ~ 前 275?), 正是使用“点”、“线”、“圆”、“相交”、“重合”等基本砖石, 在公理的基础上, 通过科学的演绎, 建筑起宏伟的几何学大厦的. 这就是我们今天初中课本上讲的平面几何.

下面我们看一看如何通过演绎的方法证明“三角形内角和等于 180° ”.

例 1 已知 $\triangle ABC$, 各角如图标. 求证: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

(1)[大前提] 过直线外一点, 有且仅有一条直线与已知直线平行.

[小前提] C 是直线 AB 外一点.

[结论] 存在唯一直线 $CD \parallel AB$.

(2)[大前提] 两直线平行, 同位角相等(定理).

[小前提] $CD \parallel AB$.

[结论] $\angle 1 = \angle 4$.

(3)[大前提] 两直线平行, 内错角相等(定理).

[小前提] $CD \parallel AB$.

[结论] $\angle 2 = \angle 5$.

(4)[大前提] 若是平角, 则等于 180° (定义).

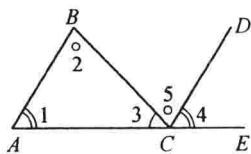


图 1-1