

新编科技大博览



XuanAoShenMiDe
SHUXUEWANGGUO

宋涛◎主编

采撷科学世界明珠的数学王国
数学的发现是人类长期实践活动的结果
方砖地启示毕达哥拉斯发明勾股定理
摘取数学王冠的华人数学家陈景润

玄奥神秘的 数学 王国

辽海出版社

文化
百科丛书

新编科技大博览



XuanAoShenMiDe
SHUXUEWANGGUO

玄奥神秘的

数学 王国

宋涛 主编

采摘科学世界明珠的数学王国
数学的发现是人类长期实践活动的结果
方砖地启示毕达哥拉斯发明勾股定理
摘取数学王冠的华人数学家陈景润

辽海出版社

目 录

一、数学的起源	(1)
数学的起源	(1)
数的来历	(3)
数的演进	(5)
实用数学	(9)
巴比伦算术	(13)
代数技巧	(14)
几何概念	(15)
$+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 、 $=$ 这些符号的来历	(16)
π 的由来	(17)
二、数学中的发明与发现	(23)
勾股定理的发现	(23)
什么是“贾宪三角”	(27)
16 岁的巴斯卡发现几何定理	(29)
模糊数学的发现	(30)
“代数学”的由来	(31)
负数的出现	(32)
无理数的发现	(34)
虚数的发现	(38)
函数的发现	(41)
代数式与多项式的发现	(43)

韦达定理的发现	(44)
神奇的黄金分割的发现	(45)
奇妙的数与形	(49)
“天外来客”根数	(51)
康托尔的集合论	(53)
分形几何的发现	(54)
射影几何的发现	(55)
自然数的发现	(56)
刘徽发明“重差术”	(56)
三、数学史上的巨人	(61)
古希腊大数学家毕达哥拉斯	(61)
几何学之父欧几里得	(62)
“代数之父”韦达	(64)
解析几何之父笛卡儿	(67)
独领风骚的“数学王子”高斯	(70)
帕斯卡	(73)
子承父业的鲍耶	(74)
命运多舛的数学之星	(75)
家喻户晓的华罗庚	(78)
惟一获沃尔夫奖的华人数学家陈省身	(79)
摘取数学王冠明珠的陈景润	(80)
哥德巴赫猜想	(81)
四、数学与生活	(83)
测量太阳高度	(83)
地球的丈量	(85)
先抽签后抽签哪个中奖机会大	(85)

购买奖券时买连号的好还是不连号的好	(87)
用淘汰制进行的比赛场数的计算	(88)
怎样渡河才更好	(90)
用什么方法挑选自己满意的商品	(91)
怎样巧算圆木堆垛	(93)
趣味几何	(95)
青蛙的对称跳	(96)
巷中行	(97)
园丁的难题	(99)
正方形的维纳斯	(100)
从田忌赛马说起	(101)
不查日历,推算某一天是星期几	(105)
怎样把 250 只苹果巧装在 8 只篮子里	(107)
巧分奖金	(108)
不添篱笆扩羊圈	(109)
爱因斯坦的舌头	(110)
百羊问题	(112)
兔子问题	(112)
韩信点兵	(113)
连成多少三角形	(115)
伐木人的争论	(117)
龟与鹤	(118)
两支蜡烛	(119)
你来当裁判	(120)
丢蕃都的年龄	(121)
蛋铺的生意	(122)

哪些灯还亮着	(122)
计算黄浦江的宽度	(124)
用墙上的树影测树高	(125)
测堤面的坡度	(126)
要在楼梯上铺地毯,如何快速量出所需购买地毯的 尺寸	(128)
怎样使修路的费用最少	(129)
车站应设在哪里	(130)
疾病普查怎样进行最省力	(132)
五、奇妙的数学问题	(135)
数字中的周期现象	(135)
数字趣谈——奇妙的9	(136)
含义丰富的0	(139)
数学黑洞	(140)
跷跷板与不等式	(141)
两栖的数	(142)
神秘的纵横图	(145)
“科克曼女生问题”	(146)
什么是“ $3x + 1$ 问题”	(148)
牛顿问题	(149)
欧拉问题	(151)
百鸡问题	(153)
六人集合问题	(154)
破碎砝码的妙用	(155)
奇妙的追击	(156)
博弈论	(157)

埃及乘法	(157)
向 $\sqrt{2}$ 逼近的梯子	(159)
完全平方数	(160)
迷人的素数问题	(161)
欧几里得对素数无穷的证明	(161)
“一笔画问题”	(162)
你知道什么是“周游世界”游戏吗	(165)

一、数学的起源

数学的起源

数学是研究客观世界数量关系及空间形式的科学。

数学起源于人类文明的创始阶段。

大约在 300 万年前，人类还处于茹毛饮血的原始时代，以采集野果、围猎野兽为生。这种活动是集体进行的，所得“产品”也平均分配。这样，古人渐渐产生了数量的概念。他们可以用一块石子代表一只野兽，或用绳子打一个结代表一头捕获的猎物，或打一个大结代表一头大兽，打一个小结代表一头小兽，如此等等。数量的观念就是在此过程中，逐渐发展起来的。

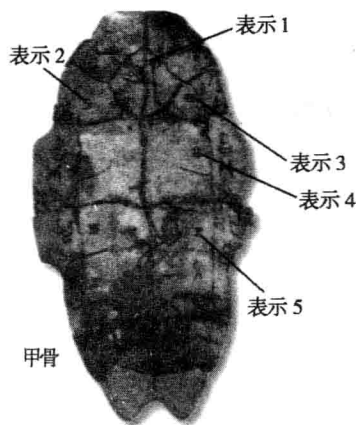
在距今大约五六千年以前，在非洲尼罗河流域出现了一个伟大的文明国家——埃及。埃及人是世界上较早从事农业生产

				⌒	⌒	⌒	⌒	⊖	⊕	⊕	⊕
1	2	3	4	10	11	12	20	100	1000	10000	100000

古埃及数字

活动的。由于尼罗河定期泛滥，淹没大片农田，埃及人通过长期的观察，发现每年 7 月尼罗河定期泛滥，11 月份洪水逐渐退落，而且这种现象大约 365 天重复一次。这样，埃及人就选

择洪水退落后，在淤泥上播种，在6月洪水来临前收割，以此获得好的收成，这是通过天文观测和水文观测来实现的。另外，古埃及的农业制度，是把同样大小的正方形土地分配给每一个人，承租人每年将收成的一部分交给土地所有者——国王。



甲骨

从出土的甲骨上来看，中国古代早就发明了记数符号

王。如果洪水冲垮了他们分得的土地，国王便派人前去丈量受灾的土地面积，适当减少交租的数量。这种土地丈量的方法，为几何学的诞生奠定了基础。

数学正是从打结记数、天文和水文观测、土地测量的实际需要逐渐发展起来的。

继埃及而崛起，世界上还有巴比伦、印度、中国等几个伟大的文明古国雄踞于亚洲，它们分别都产生了各自的记数

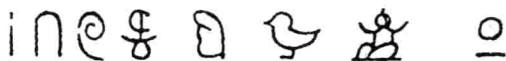
法和最初的数学知识。在距今两千多年以前，古希腊人也积累起较为丰富的数学知识，并将数学发展成为一门系统的理论科学。“数学”的希腊文原意就是“科学或知识”的意思。他们特别注意“论证”在数学中的应用，因此欧几里得的几何学几乎成了希腊数学的代表。古希腊文明被毁灭后，阿拉伯人又继承了他们的文化，后又传回欧洲，使数学重新繁荣，并最终导致了近代数学的创立。

数的来历

原始社会，人类在狩猎、种植、捕鱼、采集等活动中，要与野果、鱼、木棒、石头等打交道，久而久之，人们便有了多少、数量的意识。这种对数的认识往往与实物联系在一起，如用“月亮”代表“1”，用“眼睛”、“耳朵”、“鸟的翅膀”代表“2”。这是由于只有一个月亮，人有两只眼睛两只耳朵、鸟有两只翅膀的缘故。原始人还认识到一个苹果和一头羊各是一个个体，三棵树和三把石斧都是三个个体的一堆等，这就是最初的数的概念。

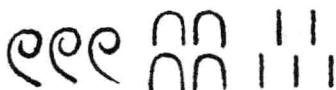
最早用来计数的是手指、脚趾，或小石子、小木棍等。表示1, 2, 3, 4个物体，就分别伸出1, 2, 3, 4个手指，遇到5个物体便伸出一只手，10个物体伸出两只手。当数目很多时，就用小石子来计数，10颗小石一堆就用大一些的一颗石子来代表。中国古代用的是木、竹或骨子制成的小棍，称为算筹。但是，大多数的原始人遇到大一些的数目，往往无法区分。

用手指、脚趾、石子、小木棍等来计数，难以长时间记录一个数字。因此，古人发明了打绳结来记数的方法，或者在兽皮、树木、石头上刻划记数。这些记号，慢慢就变成了最早的数字符号（数码）。



1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000

现在通用的数码是印度—阿拉伯数码，用十进位制来表示数。用 0, 1, 2, …9 十个数码可表示任数，低一位的数满 10 后就进到高一位上去。这种十进制，现在看来简单而平常，可它却是人类经过长期努力才演变成的。如在古埃及，数码记号是这样的：



古埃及 3, 4, 5 的写法

一个数中若某位数超过 1 时，就要将它的符号重复写若干次。如 345 就要写成如下图，写更大的数则是一大串符号了，这样运算当然十分困难。古希腊人也需要 27 个字母互相组合，才能表示 100 以内的数目，非常不便。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	纵式
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥	横式
1	2	3	4	5	6	7	8	9	

算筹计数

245×3 	$2 \times 3 = 6$ 	$4 \times 3 = 12$ 	$4 \times 3 = 12$
--------------------	----------------------	-----------------------	---------------------------

算筹

除了十进制以外，还有五进制、二进制、三进制、七进制、八进制、十二进制、十六进制、二十进制、六十进制等。经过长期实际生活的应用，十进制终于占了上风。

数的概念和数码、进位制的出现和发展，都是人类长期实践活动的结果。



算筹最初是用树枝做成的，后来用竹棍做，也有用象牙制成的

数的演进

人们在从事生产或其他活动中，数目多次反映到人的头脑中来，再通过长期思考，进一步抓住它的特性，从感性认识上升到理性认识，从而形成了数的概念。

(1) 十进位制

数的概念形成于新石器时代末期，完成于奴隶社会初期的商代。商代是我国奴隶制经济发展时期，科学、文化都达到了较高水平：当时已能大规模地炼铜；已经发明了车子；有了历法；农业生产技术也有了很大提高。特别是甲骨文和金文的出现标志着我国的文字从简单的象形逐渐发展到成熟的阶段。所有这些技术和文化成就对于数学的发展都起了推动作用。

在甲骨文中许多数目字，其中最大的数目字已经达到“三万”。现举百以上的例子如下：

二百：“二百人王”

三百：“左右中人三百”

四百：“四百”

九百：“乎……九百人”

一千：“丁未卜……王登千人”

五千：“五千”

八千：“□人八千在驭”

一万、三千：“登妇好三千、登旅万”

三万：“癸卯卜……其□三万”

甲骨文的字形有些和现代文字不同，但是我们可以清楚地看出：后来汉文中的数目字是从甲骨文演变来的。甲骨文中的数目是十进位的，是以前不完善十进制的完善化和必然的发展。从1到10的每个数都有文字表示，还有“百”、“千”、“万”等也都有相当的文字符号。

在一片甲骨文上有由1到10的全部十个自然数，没有和实物连在一起，说明商代已经有了抽象的自然数概念。

在商代的记数法中还有一种六十循环的办法，这就是主要用在历法上的所谓“天干地支”。天干有十个，即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；地支有十二个，即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。从干、支的头一个字甲、子开始依次各取一各，配成甲子、乙丑、丙寅……干或支完了接着再取，直到癸亥，共取六十次。以后又是甲子等出现了循环。在一片甲骨上就有一个完整的甲子表，至于零散的甲子纪年纪日的甲骨就更多了。这种干支纪年法后来一直沿用，现在农历还在使用。

商代至少应有加法、减法和乘法运算，只是没有明确的记

载。实际上，甲骨文只能记录结果，而不能记载算法和运算过程。但是通过一些实例可看出其算法。在一片甲骨上，记载了如下的数字：

五十犬，五十羊，五十豚，
三十犬，三十羊，三十豚，
二十犬，二十羊，二十豚，
十五犬，十五羊，十五豚。

全是5的倍数，而前三排又都是10的倍数。

周以后有了运算记载，例如在周代的一件铜器上有“东宫乃曰：偿禾十秭，遗十秭为廿秭。（如）来弗偿则倍秭。”秭是后来的大多数名称，指万亿，这段文字是说偿还奴隶主乃庄稼（禾）十秭，同时要送给他四十秭。实际上这已包括 $10 + 10 = 20$ 和 $20 \times 2 = 40$ 两种算法——加和乘。

战国时，李悝倡“尽地力之教”，他算了一笔账：“今一夫挟五口，治田百亩，岁收亩一石半，为粟百五十石（ $1.5 \times 100 = 150$ ），除十一之税十五石（ $150 \div 10 = 15$ ），余百三十五石（ $150 - 15 = 135$ ）。食：人月一石半，五人终岁为粟九十石（ $1.5 \times 12 \times 5 = 90$ ），余有四十五石（ $135 - 90 = 45$ ），石三十〔钱〕，为钱千三百五十（ $45 \times 30 = 1350$ ），除社间尝新春秋之祠用钱三百，余千五十（ $1350 - 300 = 1050$ ）。衣：五人终岁用千五百，不足四百五十（ $1050 - 1500 = -450$ ）。……”这里已讲到了减法、乘法和除法，特别是最后的一次计算出现了不足，用现代的观点来看就是有了负数。李悝未必懂这个意义，但是却为负数概念的出现提供了来源。

由于重复计算的需要，我国古代早已出现了乘法口诀，但是直到春秋战国时代的文献中才有了不完全的记载；而且次序

与现代不同，由“九九八十一”开始，因此又称这种口诀为“九九”。

(2) 分数应用

至迟在春秋战国时代我国已经有了分数的概念。在春秋战国（特别是战国）的著作中记载了许多分数及其应用的例子。当时社会上思想活跃，生产活动的范围有所扩大，技术水平也有提高，实践中提出了许多新的数学问题。比如不够一个整体的物体就不能用自然数表示其数量，而必须创造新数。在《墨子》、《管子》和《商君书》等书中所记载的分数大都是由于分配而引起的。例如《墨子》讲到食盐的分配时就有“二升少半”和“一升大半”的记载。其中“少半”和“大半”即 $1/3$ 和 $2/3$ ，还有“半”为 $1/2$ ，都是当时分数上专门的名词。《管子》在讲土地种植的分配时有“十分之二”、“十分之四”、“十分之五”、“十分之六”、“十分之七”等份数。在另一处也讲到了“五升少半”、“三升少半”。在《商君书》中有这样的记载：“地方百里者，山陵处什一，薮泽处什一，溪谷流水处什一，都邑蹊道处什一，恶田处什二，良田处什四”，就是说一百平方里的地面上各种地貌所占的比例，前四种都是 $1/10$ ，后两种各为 $2/10$ 和 $4/10$ ，加起来为 $10/10$ （=1）。战国时代在制造量器“商鞅量”时也用到了分数，规定“积十六尊五分尊一为升”。“尊”就是寸，这句话是说 $1 \text{ 升} = 16 \frac{1}{5}$ （立方）寸。

在《考工记》中记载了由于制造各种器具和器具规格的需要而大量使用了分数，特别是有了分数运算。例如“六分其轮崇，以其一为牙围，三分其牙围漆其二”，这里说的是 1

牙围 = $1/6$ 轮崇；一牙围的 $2/3$ 要上漆。《考工记》中还记载了一种叫做殳的竹制兵器的规格，“凡为殳五分其长以其一为之被而围之，叁分其围去一以为晋围，五分其晋围以其一为首围”。意思是说 1 围 = $1/5$ 长， 1 晋围 = $1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ， 1 首围 = $1/5$ 晋围。这些事实有力地说明了我国早在公元前四、五世纪就已建立了分数概念并有了广泛的应用。

春秋战国时由于制造衡器和乐器的需要，也用到了其他一些数学知识。例如战国墓葬中出土的天平砝码的重量以 1、2、4、8、……递增，相当于以等比数列 20、21、22、23、… 递增。这种数列的出现，显然是当时以十六两为一斤的规定而来的。在乐律研究中有“三分损益法”，用到分数运算。在《管子》一书中有“先主一，而四之三开，以合九九”的记载，相当于 $1 \times 3^4 = 9 \times 9 = 81$ ，这已有了指数的初步观念。

实用数学

和数的概念一样，形的概念在我国奴隶社会也有新的发展。为适应各种社会活动（特别是生产实践活动）的需要而大大丰富了几何知识的内容。在夏商时代已开始兴修水利工程，传说夏禹曾领导治水，甲骨文有了“正河”的记载。“正河”就是兴修水利。当时城堡、房屋建筑的规模也很大，所有这些工程都要用到测绘和几何学知识。

(1) 测绘工具的发明

土木工程和工具的制造等都需要测量，而测量又需要一定的几何知识和必要的工具。例如在河南偃师二里头发掘出来的

早商时代宫殿遗址，规模宏伟，光是台基面积就约有一万平方米，墙基很直，柱孔排列整齐，分布均匀。这样的大型建筑，必须通过测量才能办到。

早在商代已经有了“规”、“矩”二字的象形文字，那么规矩的发明可能还要早得多。在汉代的许多画面上常有“伏羲手执规，女娲手执矩”的图象，规是两脚状，和现在的圆规相似，矩是一直角拐尺形。

公元前二世纪成书的《周髀算经》卷上记载：“……故折矩以为句广三，股修四，径隅五。既方其外，半之一矩，环而共盘，得三、四、五。两矩共长二十有五，是谓积矩。故禹之所以治天下者，此数之所由生也。”这是在禹治天下时有了“勾三股四弦五”这个勾股定理的特例。

商代已普遍使用车子，仅在河南安阳殷墟就几次发现车子的遗迹。制造车子需要用到几何知识。轮是圆的，而辐有轂向外射出把圆周角等份，也把圆周形的轮等份。1972年挖掘出来的车轮有22根圆柱形的辐，排列整齐。车的轮牙一般是由几块弧形构件合成，这就产生了用几段圆弧合并成圆的概念。要做到这一点，事先必须作精细的测绘和必要的计算。但是显然应当使用测绘工具，否则车轮是做不成的。

(2) 几何测绘方式

西周以后的春秋战国时代由于战争和生产的需要，各地修建了不少堤防和水利工程。为了使各项工程合乎需要，必需进行测量和计算。早在两千四、五百年前，水利工程中要进行距离、高低、厚薄、土方等测量，同时还包括工程期限、劳力多少和分配、所需粮食、材料等方面的计算。很显然，在这类工程中会遇到大量的几何问题，必需运用几何知识才能解决。如