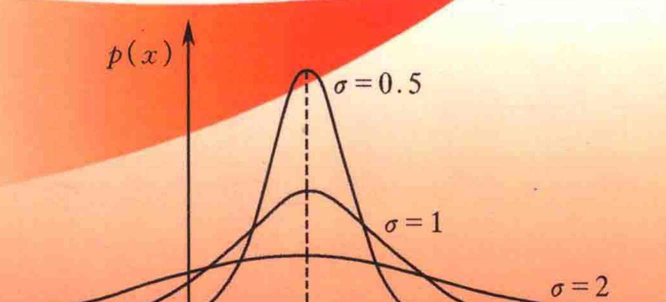
概率论与数理统计

关颖男 张雪峰 王洪岩 伊宏伟 编



東北大學出版社
Northeastern University Press

概率论与数理统计

关颖男　张雪峰　王洪岩　伊宏伟　编

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 关颖男等编 .—2 版． —沈阳 ：东北大学出版社，2008.2

ISBN 978-7-81006-542-9

Ⅰ.概…　Ⅱ.关…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 011699 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）

E-mail：neuph @ neupress.com

http：//www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市北陵印刷厂有限公司

发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：140mm×203mm

印　　张：13.625

字　　数：354 千字

出版时间：2008 年 2 月第 2 版

印刷时间：2008 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑：刘　莹　　责任校对：辛　思

封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81006-542-9　　定　价：25.00 元

再版前言

随着科学技术的发展，概率论与数理统计这一工程数学方法被广泛地应用于工程技术各个领域，成为工程技术人员必须掌握的数学工具。另外，概率论与数理统计又是工科大专院校学生的必修课。如何使学生在较短的学时内能灵活掌握工程技术中常用的数学方法，这是工科大学教育的一个重要问题。

《概率论与数理统计》一书满足了上述两种需要。本书第1版出版至今，大学概率与数理统计的教学内容已经有了一定的变动，许多读者来信，建议该书修订再版。我们经过进一步的教学实践，积累了不少经验，并吸收了广大读者的意见，再版稿是在这一基础上编写出的。我们修改了第1版中存在的不当之处，并致力于教材质量的提高。在选材和叙述上，尽量做到联系工科专业的实际，注重应用，力图将概念写得清晰易懂，做到便于教学。在例题和习题选择上，作了一些修改，这些题目既具有启发性，又有广泛的应用性，从题目的广泛性也可以看到本门课程涉及生活和技术应用领域的广泛性。读者将会发现，这些例题和习题是饶有趣味的。与第1版比较，再版书有以下特点：

内容新颖 再版书力求做到内容现代化，对第1版的部分内容做了精简，数学符号和单位尽可能遵照国际标准；

习题量大 再版书中每节课后附有大量的习题，书末附有综合测试题。这些习题一部分保留了第1版的内容，另一部分从多年积累的考题中选择一些加以补充；除了增加大量的习题外，再版习题中收入了2000—2007年考研试题中的概率部分，这可为考研同学把握考研中概率的复习方向，希望能为有志考研的同学提供有益的帮助；

重视应用 随着计算机科学技术的迅速发展并日益渗透到各个学科中，一些计算机软件已经成为概率与数理统计这门学科中强有利的分析工具。为此，附录中增加了MATLAB，SPSS，EXCEL，SAS等概率与数理统计中常用的计算机软件的相关内容，为有兴趣的同学提供一定的参考作用。

参加再版书编写的有：东北大学关颖男、张雪峰，辽宁科技学院王洪岩，铁岭师范高等专科学校伊宏伟。

苏湛和洪成昱为该书的编辑与整理做了大量的工作，谨此致谢。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和疏漏之处，恳请读者不吝指正。

编 者

2007年11月

目　　录

1 随机事件及其概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机事件

(1) 随机现象与概率统计

在现实世界中，经常遇到两种现象，即确定性现象和随机性现象. 在一定条件下，某种现象必然发生或必然不发生，则称此种现象为确定性现象. 例如，在一个标准大气压下，水被加热到 100℃，"水沸腾"就是必然发生的现象，而"水结冰"就是必然不发生的现象，所以"水沸腾"和"水结冰"都是确定性现象.

在一定条件下，既可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且在事前不能准确预言哪一种结果一定会出现，则称此现象为随机性现象. 例如，掷一颗骰子，观察它出现的点数. 骰子可以重复掷，掷骰子之前，虽然知道所有可能出现的结果是"1 点""2 点""3 点""4 点""5 点""6 点"，但每掷一次之前，究竟会出现哪一点数，事先不能确定. 此种现象即是随机性现象.

对于随机性现象，人们经过长期实践并深入研究之后发现，这类现象虽然就每次试验或观察结果来说，具有不确定性，但在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性，即所谓统计规律性. 例如，在上面例子中，经过多次重复掷骰子会发现，出现"1 点"的次数约占总次数的 1/6. 再如，向桌面上抛掷一枚均质的硬币，抛掷之前虽然不能准确预言哪一面朝上，但多次重复抛掷会发现，正面朝上的次数大致有一半. 历史上，曾经有许多人作过千万

次抛掷硬币的试验，结论都是相同的. 表 1.1.1 列出了 DeMorgan 等人的试验记录. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

表 1.1.1

实验者	抛掷次数 n	出现“正面朝上”的次数 μ(频数)	频率 $=\mu/n$
Buffon	4040	2048	0.5069
DeMorgan	2048	1061	0.5181
Feller	10000	4979	0.4979
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005
Romanovski	80640	39699	0.4923

虽然一次随机试验的结果不能完全预言，但在相同条件下，大量重复此试验时，试验的结果则会呈现出一定的数量规律性. 这一点被历史上许多人的试验结果所证明. 表 1.1.1 列出了 Buffon 等人连续抛掷均匀硬币所得的结果. 从表 1.1.1 中数据可以看出，当抛掷次数很大时，正面出现的频率非常接近 0.5.

从 19 世纪末到 20 世纪初，在现代工业技术蓬勃发展的大潮中，概率论也取得快速的发展. 特别是 Kolmogorov 等人建立了概率论的公理化体系，既奠定了概率论严格的数学基础，也沟通了概率论与现代数学中其他分支之间的联系.

(2) 随机试验与随机事件

随机现象总是同随机试验相联系的，随机试验有下述特点：① 在相同条件下，试验可以重复进行；② 试验的所有结果事先是已知的；③ 进行一次试验时，究竟会出现哪一种结果，事先不能确定. 在概率论中，具有上述三个特点的试验或观察都称为随机试验，简称试验.

研究一个随机试验，首先关心的是试验的可能结果是什么. 把试验的结果称为随机事件，简称**事件**. 例如，在掷骰子这个随机试验中，“出现 1 点”“出现奇数点”“出现点数不大于 4”等结果都是事件. 通常用大写拉丁字母 A，B，C 等表示事件.

(3) 样本点与样本空间

随机试验中，每一次试验的结果称为一个基本事件或样本点. 所有样本点的集合称为样本空间. 常用希腊小写字母 ω 表示样本点，大写字母 Ω 表示样本空间. 在具体讨论某随机试验时，首先要根据此随机试验的具体内容来确定进行一次试验可能出现的所有结果，以确定样本空间是由哪些基本事件构成的.

【例 1.1.1】 抛一枚硬币，观察正面 H (有花的一面)、反面 T 出现的情况.

“出现 H”“出现 T”是此试验中进行一次试验可能出现的所有结果，所以

$$\Omega = \{\text{“出现 } H\text{”“出现 } T\text{”}\}.$$

【例 1.1.2】 将一枚均质硬币抛两次，将两次结果作为一个考察单元，则此抛两次硬币的随机试验的样本空间是

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}.$$

【例 1.1.3】 记录某电话交换台在一天中接到的呼唤次数，样本点是非负整数，由于不好确定呼唤次数的上界，所以可以认为每个非负整数都是一个可能的结果，即

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

【例 1.1.4】 向某一目标射击一发炮弹，观察着弹点的分布情况，每次试验的结果是“炮弹落在某平面区域 G 的某一点上”. 在平面直角坐标系中，若着弹点的坐标为(x, y)，则每一个$(x, y) \in G$ 都是样本点，所以样本空间是 $\Omega = G$.

从上述例子可以看出，随着试验内容和观察目的不同，相应的样本点和由样本点构成的样本空间是不同的.

基本事件是不可分解的事件. 某些事件是由基本事件复合而成的, 叫做复合事件. 例如, 上面的掷骰子试验中, $\{1\}$, $\{2\}$, $\cdots$, $\{6\}$这 6 个事件都是基本事件. 样本空间是 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 而"出现偶数点" $=\{2, 4, 6\}$和"出现点不大于 3" $=\{1, 2, 3\}$都是复合事件, 它们都是由 Ω 的某些基本事件复合而成的. 由于每个随机事件都是由某些样本点组成的, 所以可以说, 每个随机事件都是样本空间的一个子集. 因此, 当且仅当该子集中一个样本点出现时, 这一事件才发生. 如设事件 A 表示"出现偶数点", 即 $A=\{2, 4, 6\}$, 则在一次掷骰子试验中, 当且仅当样本点 2, 4, 6 中的一个出现时, 事件 A 才发生.

(4) 必然事件与不可能事件

在每次试验中, 必然发生的事件称为必然事件; 在每次试验中, 必然不发生的事件称为不可能事件. 必然事件和不可能事件本来没有不确定性, 它们都不是随机事件, 但为了讨论方便, 把它们当成一种特殊的随机事件. 显然, 必然事件就是样本空间 Ω, 不可能事件通常记为 Φ.

1.1.2 事件间的关系及运算

在一个随机试验中, 有许多随机事件, 有的随机事件本身就是一个基本事件, 有的随机事件是由多个基本事件复合而成的复合事件. 为了便于研究复合事件, 有必要考察事件之间的关系及运算.

(1) 事件的包含和相等

若事件 A 发生, 必然导致事件 B 发生, 则称事件 B 包含事件 A(或称 A 被 B 包含), 记做

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A.$$

如在掷骰子试验中, 令 $A=$"出现 2 点", $B=$"出现偶数点", 则显然有 $A \subset B$(或 $B \supset A$).

若 $B \supset A$ 和 $A \supset B$ 同时成立, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记做

$A=B$.

(2) 事件的和(并)

事件 A 与事件 B 的和(并)是一个事件 C，它表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，记做

$$C=A+B \quad 或 \quad C=A\cup B.$$

【例 1.1.5】 电路由两个元件并联而成. 如图 1.1.1 所示.

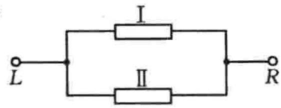


图 1.1.1

设 $A=$“元件 I 导通”，

$B=$“元件 II 导通”，

$C=$“电路由 L 到 R 导通”，则易知

$$C=A+B.$$

(3) 事件的积(交)

事件 A 与事件 B 的积(交)是一个事件 C，它表示事件 A 与事件 B 同时发生，记做

$$C=AB \quad 或 \quad C=A\cap B.$$

【例 1.1.6】 电路由两个元件串联而成，如图 1.1.2 所示.

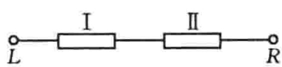


图 1.1.2

设 $A=$“元件 I 导通”，

$B=$“元件 II 导通”，

$C=$“电路由 L 到 R 导通”，则易知

$$C=AB \quad 或\ C=A\cap B.$$

【例 1.1.7】 在如图 1.1.3 所示电路中，以 B 表示“信号灯亮”这一事件，以 A_1，A_2 和 A_3 分别表示继电器 I，II 和 III 闭合，则有

$$B=A_1A_2+A_1A_3.$$

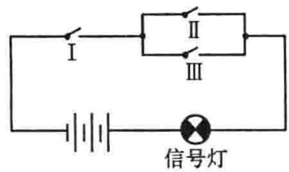


图 1.1.3

事件的和与事件的积的概念，可以推广到事件为有限个乃至无穷多个的情况. 例如，$A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，表示“$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，

…中至少有一个发生”的事件. $B=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$，表示“$B_1$，$B_2$，…，$B_n$，…同时发生”的事件.

(4) 事件的差

事件 A 与事件 B 的差是一个事件 C，它表示事件 A 发生而事件 B 不发生，记做 $C=A-B$. 如在掷骰子试验中，令 $B=$“出现 2 点”，$A=$“出现偶数点”，则有

$$C=A-B=\text{“出现 4 点或 6 点”}.$$

(5) 互不相容事件（互斥事件）

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容事件，或称为互斥事件. 显然，基本事件是互不相容的. 若一组事件 A_1，A_2，…中任意两个互斥，则称这一组事件互斥. 例如，成品库中的零件是由甲、乙、丙三厂生产的，从中任取一个零件，若 $A=$“取到的零件是甲厂生产的”，$B=$“取到的零件是乙厂生产的”，$C=$“取到的零件是丙厂生产的”，则事件 A，B，C 互斥，这是因为取出一个零件不可能既是甲厂生产的，又是乙厂或丙厂生产的.

(6) 对立事件（互逆事件）

若事件 A 与事件 B 同时满足：① $A+B=\Omega$；② $AB=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 为对立事件，或称为互逆事件，记做 $B=\overline{A}$（读做非 A）. 事件 $\overline{A}$ 是事件 A 的对立事件，$A+\overline{A}=\Omega$，也就是说，在一次试验中，A 与 $\overline{A}$ 相互排斥（即不能同时发生），而且 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生. 显然有 $A-B=A\overline{B}$. 假定三人向同一目标射击，$A=$“至少有一人击中目标”，则其对立事件是 $\overline{A}=$“三人都未击中目标”，这是因为“至少有一人击中目标”包含击中目标的人数是 1 人或 2 人或 3 人，这三种情况与“三人都未击中目标”不能同时发生，而且三人射击的结果，不是“至少一人击中目标”，就是“三人都未击中目标”，两者必居其一.

为了直观起见，经常用图形表示事件及事件之间的关系．一般地，用一个矩形表示必然事件 Ω，而用该矩形内的一个小区域表示一个事件．这样，事件 A 与事件 B 的包含关系、和、积、差以及互斥事件、对立事件分别如图 1.1.4 所示．

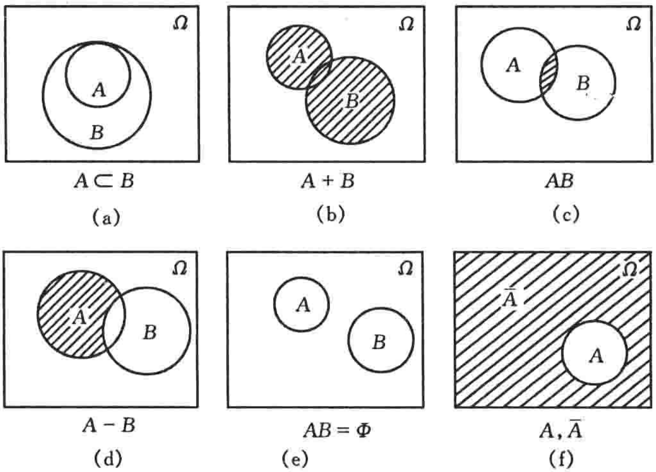


图 1.1.4

关于事件的运算性质，除了事件的加法和乘法具有交换律、结合律及分配律之外，还有下述运算性质：

$$A+\Omega=\Omega,\quad A\Omega=A,\quad A+\Phi=A,\quad A\Phi=\Phi. \tag{1.1.1}$$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}. \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)称为德·摩尔根定律，它说明：在对立运算中，加法与乘法可以互相转化(可利用图 1.1.4 直观说明其正确性)．

【例 1.1.8】 设 A，B，C 是三个事件，试用它们表示下列事件：

D=“A，B，C 中恰好有一个发生”；

E=“A，B，C 中至少有一个发生”；

F=“A，B，C 中至多有一个发生”．