

# 高等数学教程

第二卷 第二分册

B. И. 斯米尔诺夫著  
孙 念 增 译

## 简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。希鉴谅。

## 高等数学教程

第二卷 第二分册

---

В. И. 斯米尔诺夫著

孙念增译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

湖北省新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

---

统一书号 13012·0330 开本 787×1092 1/32 印张 9 12/16  
字数 282,000 印数 98,501—198,500 定价 0.76 元

1956年4月新1版 1959年2月第2版(修订本)

1979年4月湖北第18次印刷

### 第三章 重积分、曲綫积分、反常积分及依赖于参变量的积分 .....157

#### § 6. 重积分

54. 容积(157) 55. 二重积分(161) 56. 二重积分的計算法(163)  
57. 曲綫坐标(167) 58. 三重积分(171) 59. 柱面坐标与球面坐标  
(176) 60. 空間的曲綫坐标(181) 61. 重积分的基本性質(183) 62.  
曲面的面积(184) 63. 曲面积分与奥斯特洛格拉得斯基公式(187) 64.  
沿确定一側的曲面积分(191) 65. 矩(193)

#### § 7. 曲綫积分

66. 曲綫积分的定义(197) 67. 力場作的功,例(201) 68. 面积与曲綫  
积分(205) 69. 格林公式(207) 70. 司鐸克斯公式(210) 71. 平面  
上曲綫积分与路徑的无关性(213) 72. 复通区域的情形(213) 73. 空  
間中曲綫积分与路徑的无关性(221) 74. 流体的稳定流动(223) 75.  
积分因子(224) 76. 三个变量的全微分方程(230) 77. 二重积分的換  
元法則(231)

#### § 8. 反常积分与依赖于参变量的积分

78. 积分号下求积分法(234) 79. 狄义赫利公式(236) 80. 积分号下  
求导数法(239) 81. 例(242) 82. 反常积分(246) 83. 非絕對收斂  
积分(251) 84. 一致收斂积分(254) 85. 例(257) 86. 反常重积  
分(260) 87. 例(265)

#### § 9. 关于重积分理論的补充知識

88. 預备概念(270) 89. 集合論中的基本定理(271) 90. 外面积与內  
面积(273) 91. 可求面积的区域(275) 92. 与坐标軸的选择的无关  
性(277) 93. 任何多維空間的情形(278) 94. 达尔补定理(279) 95.  
可积函数(281) 96. 可积函数的性質(282) 97. 二重积分的計算法  
(283) 98.  $n$ 重积分(285) 99. 例(286)

### 第四章 矢量分析及場論 .....288

#### § 10. 矢量代数基础

100. 矢量加減法(288) 101. 矢量乘以数量,矢量的共面性(290) 102.  
矢量沿三个不共面的矢量的分解法(291) 103. 数量积(292) 104.  
矢量积(294) 105. 数量积与矢量积之間的关系(297) 106. 剛体轉动  
时速度的分布;矢量的矩(300)

## § 11. 場論

107. 矢量的微分法(301) 108. 数量場及其梯度(304) 109. 矢量場、旋度与散度(307) 110. 势量場与管量場(311) 111. 定向曲面單元(313) 112. 矢量分析中几个公式(316) 113. 剛体的运动及微小形变(317) 114. 連續性方程(319) 115. 理想流体的流体动力方程(323) 116. 声的傳播方程(324) 117. 热傳导方程(325) 118. 馬克士威方程(328) 119. 拉普拉斯算子在正交坐标系的表达式(330) 120. 对于变場情形求导数的运算(337)

## 第五章 微分几何基础 .....342

## § 12. 在平面和空間中的曲綫

121. 平面曲綫, 它的曲率与漸屈綫(342) 122. 漸伸綫(349) 123. 曲綫的本質方程(350) 124. 空間曲綫的基本元素(351) 125. 富列耐公式(355) 126. 密切平面(356) 127. 螺旋綫(357) 128. 單位矢量場(359)

## § 13. 曲面理論初步

129. 曲面的參变方程(360) 130. 高斯第一微分式(363) 131. 高斯第二微分式(365) 132. 关于曲面上的曲綫的曲率(367) 133. 杜潘指示綫与尤拉公式(371) 134. 主曲率半徑与主方向的确定(373) 135. 曲率綫(375) 136. 杜潘定理(378) 137. 例(379) 138. 高斯曲率(381) 139. 面积單元的变值与曲率中值(382) 140. 曲面族与曲綫族的包絡(386) 141. 可展曲面(389)

## 第六章 富里埃級数 .....392

## § 14. 調和分析

142. 三角函数的正交性(392) 143. 狄义赫利定理(397) 144. 例(398) 145. 在区間 $(0, \pi)$ 上的展开式(401) 146. 以 $2l$ 为周期的周期函数(405) 147. 平方中值誤差(407) 148. 一般的正交函数系(412) 149. 实用的調和分析(417)

## § 15. 富里埃級数理論中的补充知識

150. 富里埃級数展开式(423) 151. 第二中值定理(429) 152. 狄义赫利积分(431) 153. 狄义赫利定理(434) 154. 用多項式作連續函数的逼近(436) 155. 封閉性公式(441) 156. 函数系的封閉性質(444) 157. 富里埃級数收敛性的特征(447) 158. 富里埃級数收敛性的改善(451) 159. 例(453)

## § 16. 富里埃积分及重富里埃級数

160. 富里埃公式(456) 161. 复数式富里埃級数(463) 162. 重富里埃級数(464)

### 第三章 重积分、曲綫积分、反常积分 及依赖于参变量的积分

#### § 6. 重积分

54. 容积 到现在为止我們所講作为和的極限的定积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

是就函数  $f(x)$  确定在  $OX$  軸的一个綫段  $(a, b)$  上的情形考虑的。換句話說, 积分区域总是某一个直綫段。

在这一节中我們把积分概念推广到下列情形: 积分区域是平面上某一个区域, 或是空間中某一个区域, 或者甚至于是随便一个曲面上的某一个区域。在这一节的討論中, 我們利用对面积与容积的直觉看法, 而不細講有关取極限时一些論点的根据。在本章的最末一节我們再講严格討論的基本关键。我們由两次积分的概念开始, 它連系着計算容积的問題, 就像上面写的积分連系着計算面积的問題一样, 所以, 在引进两次积分的概念之前, 我們先看計算容积的問題。

我們知道, 計算界于曲綫  $y=f(x)$ ,  $OX$  軸以及两个縱坐标:  $x=a$ ,  $x=b$  之間的面積問題, 是利用定积分的概念解决的, 而这面积正是由上面写的定积分来表达的 [I, 87]。

現在我們来看一个类似的問題, 就是計算物体的容积  $v$ , 这物体的界面是: 已知的曲面  $(S)$ , 它的方程是

$$z=f(x, y), \quad (1)$$

平面  $XOY$ , 以及一个柱面  $(O)$ , 这个柱面的母綫平行于  $OZ$  軸,

它把  $(S)$  投影到平面  $XOY$  的区域  $(\sigma)$  上(圖 33)。

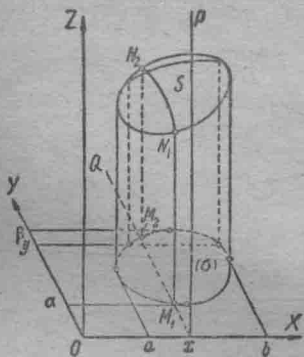


圖 33

在 [I, 104] 中我們講過用定積分計算物體的容積, 為此只需要知道物體的平行断面; 對於現在的問題我們也應用這個方法。

為簡單起見, 我們設曲面  $(S)$  整個在平面  $XOY$  之上, 並且平行於坐標軸的直線與  $(\sigma)$  的界綫  $(l)$  相交時至多交於兩點。

用平行於平面  $YOZ$  的平面把所考慮的物體分開, 這些平面與平面  $XOY$  的交綫是平行於  $OY$  軸的直綫(圖 33 與 34)。把兩個極端斷面的橫坐標各記作  $a$  與  $b$ 。這也就是界綫  $(l)$  上把該界綫分為兩部(1)與(2)的點的橫坐標, 這兩部分(1)與(2)中, 一個是

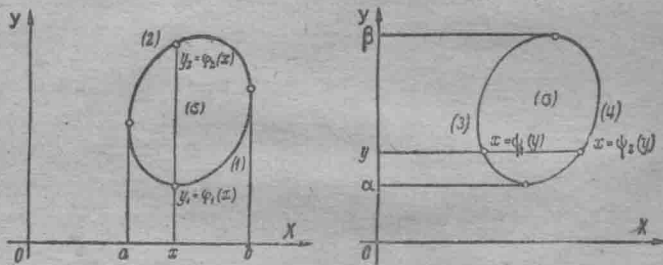


圖 34

平行於  $OY$  軸的直綫穿入區域  $(\sigma)$  的位置, 一個是穿出的位置(圖 34)。每一部分各有它的方程

$$y_1 = \varphi_1(x); \quad y_2 = \varphi_2(x). \quad (2)$$

與  $YOZ$  距離為  $x$  的平面  $PQ$  在物體上截下的断面, 它的面積是依賴於  $x$  的, 我們把它記作  $S(x)$ 。於是就有 [I, 104]

$$v = \int_a^b S(x) dx. \quad (3)$$

现在只要求函数  $S(x)$  的表达式, 这函数就是图形  $M_1N_1N_2M_2$  的面积; 它位于平面  $PQ$  上, 它的界线是: 平面  $PQ$  与曲面  $(S)$  相交的曲线  $N_1N_2$ , 平行于  $OY$  轴的直线  $M_1M_2$  以及两个纵标  $M_1N_1$  与  $M_2N_2$ 。

因为对所考虑的断面来讲, 所有的点的  $x$  是常数, 曲线  $N_1N_2$  的纵标可以算作是  $y$  的函数, 这个函数是当  $x$  是常数时由下面这方程确定的

$$z = f(x, y),$$

这时自变量  $y$  取在区间  $(y_1, y_2)$  上, 其中  $y_1$  与  $y_2$  是直线  $M_1M_2$  穿入区域  $(\sigma)$  与穿出这个区域的点的纵坐标。

根据 [I, 87] 可以写成:

$$S(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy;$$

代入到 (3) 中就有:

$$v = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy. \quad (4)$$

如此, 我们得到容积的一个表达式是 两次积分 的形状, 这里先把  $x$  看作常数, 对  $y$  求出积分, 然后把所得到的结果对  $x$  求积分。

用平行于平面  $XOZ$  的平面分割所给的物体, 我们得到同一个容积的另一个表达式:

$$v = \int_a^{\beta} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx, \quad (5)$$

其中  $x_1$  与  $x_2$  是  $y$  的已知函数:

$$x_1 = \psi_1(y); \quad x_2 = \psi_2(y), \quad (6)$$

而  $\alpha$  与  $\beta$  表示界线  $(l)$  上的  $y$  的两个极端值 (图 33 与 34)。

公式 (4) 与 (5) 是在两个假定下推出的: 1. 曲面  $(S)$  整个位于平面  $XOY$  之上; 2. 曲面  $(S)$  在平面  $XOY$  上的投影  $(\sigma)$  的界

綫( $l$ )与平行于一个坐标轴的任何直綫最多交于两点。若不满足条件 1, 則公式(4)与(5)的右边所給出的不是真正的容积, 而是容积的代数和, 其中位于平面  $XOY$  之上的容积带(+ )号; 位于其下的带(- )号。若不满足条件 2, 例如(圖 35), 界綫( $l$ )与直綫  $x = \text{常数}$  的交点有好几对, 則需要把区域( $\sigma$ )分为几部分, 使得每一部分满足条件 2, 与这对应的, 曲面( $S$ )与容积  $v$  也就被分为几部分, 計算每一部分的容积时公式(4)是适用的。

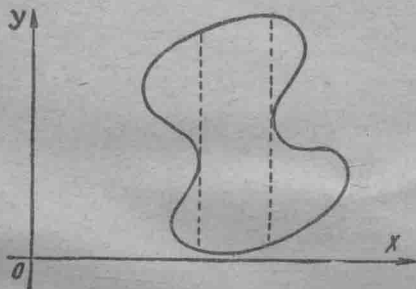


圖 35

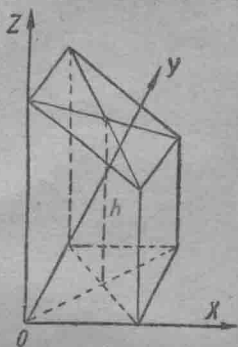


圖 36

例 1. 正棱柱的截断的容积(圖 36)。底是由坐标轴  $OX$ ,  $OY$  与直綫  $x=k$ ,  $y=l$  形成的。截面的方程是

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} + \frac{z}{\nu} = 1.$$

在这情形下公式(4)給出:

$$\begin{aligned} v &= \int_0^k dx \int_0^l z dy = \int_0^k dx \int_0^l \nu \left(1 - \frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\mu}\right) dy = \nu \int_0^k dx \left(y - \frac{xy}{\lambda} - \frac{y^2}{2\mu}\right) \Big|_{y=0}^{y=l} \\ &= \nu \int_0^k \left(l - \frac{x l}{\lambda} - \frac{l^2}{2\mu}\right) dx = \nu \left(kl - \frac{k^2 l}{2\lambda} - \frac{k l^2}{2\mu}\right) = kl \cdot \nu \left(1 - \frac{k}{2\lambda} - \frac{l}{2\mu}\right) = \sigma h, \end{aligned}$$

其中  $\sigma$  是底面积,  $h$  是上截面的对綫交点(对应于  $x = \frac{k}{2}$ ,  $y = \frac{l}{2}$ )的縱标。

2. 求椭圆体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的容积。用平面  $z = \text{常数}$  截这椭圆体时, 得到椭圆, 具有半軸長



$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

于是利用

$$S(z) = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

因而所求的容积是

$$v = \int_{-c}^{+c} \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

**55. 二重积分** 为要得到曲线  $y=f(x)$  下的面积的近似式, 我們 [I, 87] 把它分为竖条, 并且用一些矩形来替代每一个竖条的面积, 这些矩形的底各是每一个竖条的底, 而高等于这个竖条上曲线的纵坐标的某一个中间值。当竖条的数目增加而每一个都趋向零时, 差誤  $\rightarrow 0$ , 于是由近似式取極限就成为定积分, 它给出面积的准确表达式。

計算容积时也可以用类似的作法。把区域  $(\sigma)$  (圖 37) 分成很多个任意形状的小單元  $\Delta\sigma$ , 这里我們一方面用  $\Delta\sigma$  記这些个小区域, 另一方面也用  $\Delta\sigma$  記它們的面积。以每一个这样的單元为底作一个柱体直到与曲面  $(S)$  相交, 就把容积  $v$  分为單元容积。

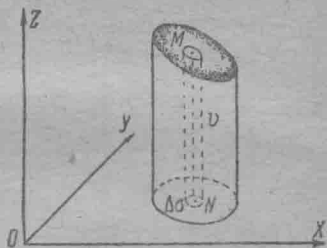


圖 37

显然, 我們可以取一个柱体的容积作为这样的單元容积的近似值, 这个柱体的底也是  $\Delta\sigma$ , 而高是一个纵坐标, 也就是投影为  $\Delta\sigma$  的曲面單元上任何一点的  $z$  的值。換句話說, 这就是在  $\Delta\sigma$  上任取一点  $N$ , 为簡短起見, 把曲面  $(S)$  上对应于点  $N$  的点  $M$  的纵坐标記作  $f(N)$ , 也就是函数  $f(x, y)$  在  $N$  点的值, 我們就得到單元容积为  $f(N)\Delta\sigma$ , 于是

$$v \sim \sum_{(\sigma)} f(N) \Delta\sigma,$$

这里要对于填满面积  $(\sigma)$  的所有的單元面积  $\Delta\sigma$  求和。

每一个單元  $\Delta\sigma$  愈小, 而且單元的数目  $n$  愈多时, 所得到的近

以公式就愈准确,取極限后可以写成:

$$\lim \sum_{(\sigma)} f(N) \Delta\sigma = v.$$

抽去几何的形象,不管函数  $f(N)$  的几何意义,我們还是可以确定这个和的極限,这个極限叫做函数  $f(N)$  沿区域  $(\sigma)$  的二重积分,并且表示成:

$$\iint_{(\sigma)} f(N) d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(N) \Delta\sigma.$$

这个極限的存在是很明显的,因为像我們以上所講的,这个極限应当給出以上我們所作的容积  $v$ 。自然这种論証不是严格的,不过,对于具有一般条件的  $f(N)$  以及所有的連續函数的任何情形,上述極限的存在可以严格証明。

若我們設  $f(N) = 1$ ,則得到区域  $(\sigma)$  的面积  $\sigma$  的一个表达式,而是二重积分的形状:

$$\sigma = \iint_{(\sigma)} d\sigma.$$

我們来叙述二重积分的完全定义:設  $(\sigma)$  是一个有界的平面区域,  $f(N)$  是这个区域上的点的函数,就是說,在区域  $(\sigma)$  的每一点  $N$  取确定值的一个函数。把区域  $(\sigma)$  分为  $n$  个部分区域,并設  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$  是这些部分的面积,而  $N_1, N_2, \dots, N_n$  各为这些部分上的任一点。作出乘积的和:

$$\sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta\sigma_k.$$

当分成的数目  $n$  无限增加,而每一个部分区域无限减小,这个和的極限就叫做函数  $f(N)$  沿区域  $(\sigma)$  的二重积分

$$\iint_{(\sigma)} f(N) d\sigma = \lim \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta\sigma_k.$$

附注 設  $d_k$  是面积为  $\Delta\sigma_k$  的部分区域中两点間的最大距离

(这个区域的直径), 而  $d_1, d_2, \dots, d_n$  中的最大的数是  $d$ 。在定义中所說的每一个部分区域  $\Delta\sigma_k$  无限减小这句话就具有  $d \rightarrow 0$  的意义。如果用字母  $I$  来記积分的数值, 則上述定义就相当于: 对于給定的任何正数  $\varepsilon$ , 存在这样一个正数  $\eta$ , 使得 [参考 I, 87] 只要  $d \leq \eta$ , 則

$$\left| I - \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta\sigma_k \right| \leq \varepsilon.$$

在本章末, 討論重积分的完整理論时, 我們才引出面积的严格定义, 并且更准确的講可以求积分的那样的区域 ( $\sigma$ ) 的概念, 以及如何把它分成各部分区域, 并且对于連續函数  $f(N)$  以及某些类的間断函数, 来証明上述和的極限的存在。

### 56. 二重积分的計算法

把二重积分考虑作容积, 我們可以把二重积分化为两次积分。

对于区域 ( $\sigma$ ) 应用直角坐标, 設用平行于坐标軸的直綫, 把区域 ( $\sigma$ ) 的面积分割成具有边为  $\Delta x, \Delta y$  的矩形, 得到單元  $\Delta\sigma$  (圖 38), 并設  $(x, y)$  是点  $N$  的坐标。这时可以写成:

$$f(N) = f(x, y); \quad \Delta\sigma = \Delta x \Delta y; \quad d\sigma = dx dy,$$

并且

$$\iint_{(\sigma)} f(N) d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta x \Delta y = \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy.$$

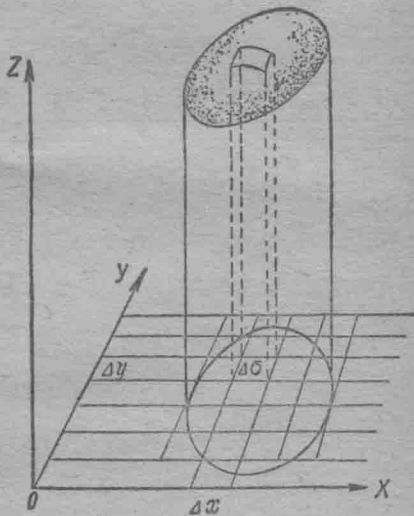


圖 38

另一方面,应用[54]中所講的用两次积分来表达容积的方法,这可以写成:

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx, \quad (7)$$

这就给出计算二重积分的法则,而与函数  $f(x, y)$  的几何意义无关。

若是先对  $y$  求积分,则这时  $x$  算作常数,而积分限  $y_1$  与  $y_2$  是  $x$  的函数,这两个函数是由[54]中公式(2)所确定的。若先对  $x$  求积分,也有类似的情况。只有当积分区域是个矩形,它的边平行于坐标轴时,在

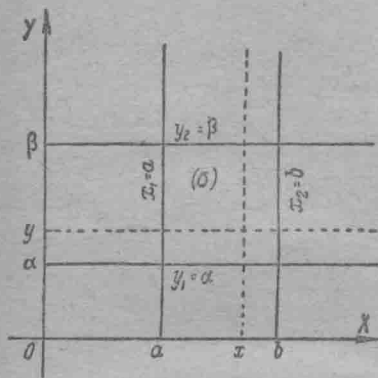


圖 39

两次积分中先求积分的积分限才可能是常数,而不依赖于第二次积分的积分变量。若  $(\sigma)$  是界于直线(圖 39):

$$x=a; \quad x=b; \quad y=\alpha; \quad y=\beta$$

的矩形区域,则

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (8)$$

表达式  $d\sigma = dx dy$  叫做在直角坐标系中的面积单元。

注意,在公式(7)中把  $x$  看作常数先对  $y$  求积分这件事,就对应于沿着平行于  $OY$  轴的一竖条内所含的矩形求和,其中所有的矩形有相同的宽度  $dx$ , 它被提出在第一次求积分的记号之外。第二次对  $x$  求积分对应于把沿平行于  $OY$  轴各条求和所得的所有结果再相加。在本章最后一节中我们要给出公式(8)与(7)的严格论证。

如果平行于坐标轴的直线与 $(\sigma)$ 的界相交多于两个交点,则应当像在[54]说过的那样来处理。

当然,这里和以后我们假设说到的积分存在[看95]。为此,只要使得被积函数在 $(\sigma)$ 直到它的边界上都连续,我们还假设,区域 $(\sigma)$ 满足[91]中在论证积分概念时所说的条件。

现在我们用极坐标 $(r, \varphi)$ 来处理区域 $(\sigma)$ 。这时曲面 $(S)$ 的方程应当写成 $z=f(r, \varphi)$ 。

画出曲线族 $r=\text{常数}$ 以及 $\varphi=\text{常数}$ ,就是同心圆周以及通过原点

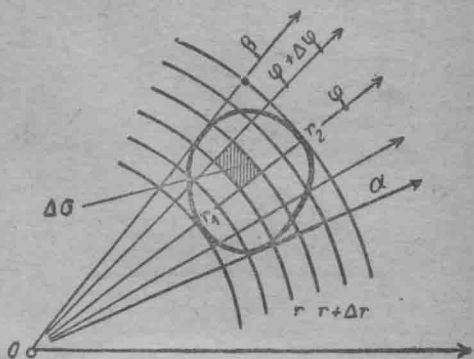


圖 40

的射线,我们得到单元 $\Delta\sigma$ (圖40)。半径为 $r$ 与 $(r+\Delta r)$ 的圆弧以及斜角为 $\varphi$ 与 $(\varphi+\Delta\varphi)$ 的两条射线交成的曲线图形 $\Delta\sigma$ ,可以考虑作边长为 $\Delta r$ 与 $r\Delta\varphi$ 的矩形,所差的只是高级的无穷小,于是

$$\Delta\sigma = r\Delta r\Delta\varphi,$$

这时可以写成:

$$\iint_{(\sigma)} f(N) d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(r, \varphi) r \Delta r \Delta\varphi = \iint_{(\sigma)} f(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

这里我们得到一个二重积分,它的被积函数是 $f(r, \varphi)r$ 。为要计算它,可以应用化为两次积分的法则,不过现在只是 $r$ 与 $\varphi$ 起着 $x$ 与 $y$ 的作用。

先对 $r$ 求积分把 $\varphi$ 算作常数,这对应于沿着界于两条射线 $\varphi$ 与 $(\varphi+d\varphi)$ 之间的单元 $\Delta\sigma$ 求和,而把 $d\varphi$ 放在第一次求积分的记号之外。第二次对 $\varphi$ 求积分对应于把第一次求和所得到的所有结

果相加。应用上述法则时，我們首先标记出变量  $\varphi$  的極端值  $\alpha$  与  $\beta$  (对应于 [54] 中  $x$  的極端值)。以后对于固定的  $\varphi$  找出射綫  $\varphi =$  常数穿入与穿出 ( $\sigma$ ) 的点的矢徑  $r_1$  与  $r_2$  (这对应于在 [54] 中确定  $y_1$  与  $y_2$ )。确定了这些已知量，就有：

$$\iint_{(\sigma)} f(N) d\sigma = \iint_{(\sigma)} f(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r, \varphi) r dr, \quad (9)$$

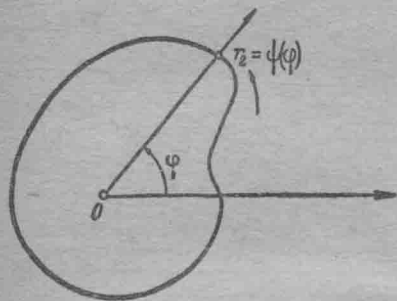


圖 41

其中  $r_1$  与  $r_2$  是  $\varphi$  的已知函数。

圖 40 对应于坐标原点在界綫 ( $l$ ) 外的情形。若原点在界綫 ( $l$ ) 內，則可把  $\varphi$  看作是由 0 变到  $2\pi$ ，并且对于給定的  $\varphi$  值  $r$  由 0 变到  $r_2$ ，其中  $r_2$  来自曲綫 ( $l$ ) 的方程： $r_2 = \psi(\varphi)$ ，这就給出 (圖 41)：

$$\iint_{(\sigma)} f(N) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_2} f(r, \varphi) r dr.$$

表达式

$$r dr d\varphi$$

(10)

叫做極坐标系中的面积單元。

特别是，若  $f(N) = 1$ ，我們就得到在 [I, 102] 中所講的曲綫所包的面积的極坐标表达式：

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2 - r_1^2) d\varphi.$$

([I, 102] 中的公式对应于  $r_2 = r$ ,  $r_1 = 0$  的情形。)

例 求界于半徑为  $a$  的球与通过球心的半徑为  $\frac{a}{2}$  的正圆柱之間的容积 (圖 42)。

取球心作坐标原点，通过球心垂直于圆柱的軸的平面作为平面  $XOY$ ，通过球心以及平面  $XOY$  与圆柱的軸的交点的直綫作为  $OX$  軸。根据对称性，可以说，所求的容积是界于平面  $ZOX$ ,  $XOY$  以及上半球之間的一部分圆柱体的容积的四倍。

这里积分区域是圆柱的半个底，它的界綫由半圓周

$$r = a \cos \varphi$$

以及  $OX$  轴上的线段组成, 其中角度  $\varphi$  由 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ , 对应于射线——由  $OX$  轴到  $OY$  轴。

球面的方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

在这种情形下可以写成:

$$z^2 = a^2 - (x^2 + y^2); \quad z = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

所以, 所求的容积是:

$$\begin{aligned} v &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \sqrt{a^2 - r^2} r dr = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_{r=0}^{r=a \cos \varphi} d\varphi = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3 - a^3 \sin^3 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} a^3 \left[ \varphi + \cos \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right] \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} a^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

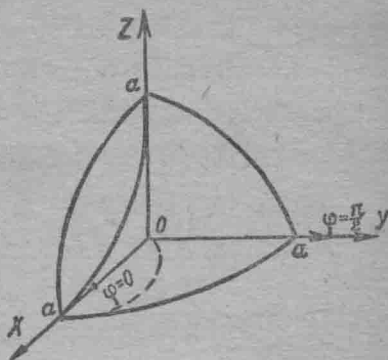


圖 42

**57. 曲线坐标** 在前一段中, 我们就直角坐标与极坐标的情形, 确定了面积单元, 并且考虑了计算积分的问题。现在我们就任何的坐标  $(u, v)$  来考虑这个问题。依照公式

$$\varphi(x, y) = u; \quad \psi(x, y) = v. \quad (11)$$

引用任何的新的变量  $u$  与  $v$  来替代直角坐标  $x$  与  $y$ 。

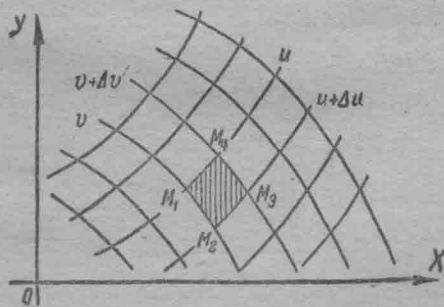


圖 43

給  $u$  与  $v$  所有可能的常数值, 在平面上就得到两族线(圖 43), 一般說来, 这些线都是曲线。平面上点  $M$  的位置是由一对数  $(x, y)$  来确定的, 或者根据 (11), 它就被一对数  $(u, v)$  所确定。这一对数  $(u, v)$

叫做点  $M$  的曲线坐标。由方程 (11) 解出  $x$  与  $y$ , 就得到直角坐标  $(x, y)$  通过曲线坐标  $(u, v)$  的表达式:

$$x = \varphi_1(u, v); \quad y = \psi_1(u, v). \quad (12)$$

在極坐标的情形  $u$  就是  $r$ ,  $v$  就是  $\varphi$ 。以上我們講到的  $u$  为常数以及  $v$  为常数的綫叫做曲綫坐标  $(u, v)$  的坐标綫。它們形成兩族曲綫(在極坐标中是圓周族与射綫族)。

現在我們来确定在曲綫坐标  $(u, v)$  中的面积單元  $d\sigma$ 。

为此我們考虑兩对很近的坐标綫：

$$\varphi(x, y) = u; \quad \varphi(x, y) = u + du,$$

$$\psi(x, y) = v; \quad \psi(x, y) = v + dv$$

所形成的面积單元  $M_1M_2M_3M_4$ (圖 43)。

不計高級无穷小, 这个四边形  $M_1M_2M_3M_4$  的頂点的坐标就是 [I, 68]:

$$(M_1)x_1 = \varphi_1(u, v); \quad y_1 = \psi_1(u, v).$$

$$(M_2)x_2 = \varphi_1(u + du, v) = \varphi_1(u, v) + \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial u} du;$$

$$y_2 = \psi_1(u + du, v) = \psi_1(u, v) + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} du.$$

$$(M_3)x_3 = \varphi_1(u + du, v + dv) =$$

$$= \varphi_1(u, v) + \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial v} dv;$$

$$y_3 = \psi_1(u + du, v + dv) =$$

$$= \psi_1(u, v) + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} dv.$$

$$(M_4)x_4 = \varphi_1(u, v + dv) = \varphi_1(u, v) + \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial v} dv;$$

$$y_4 = \psi_1(u, v + dv) = \psi_1(u, v) + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} dv.$$

由这些公式直接推出,  $x_2 - x_1 = x_3 - x_4$  与  $y_2 - y_1 = y_3 - y_4$ , 由这两个等式推知, 綫段  $M_1M_2$  与  $M_4M_3$  相等而且同向。同理綫段  $M_1M_4$  与  $M_2M_3$  也是如此, 就是說, 不計高級无穷小的話,  $M_1M_2M_3M_4$



是个平行四边形，它的面积等于三角形  $M_1 M_2 M_3$  的面积的二倍，依照解析几何学中已知的公式，就有：

$$d\sigma = |x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)|。$$

代入以坐标的表达式，就得到用任何曲线坐标时的面积单元公式：

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left| \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial u} \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial v} \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} \right| du dv = \\ &= |D| du dv, \end{aligned}$$

其中  $D$  叫做函数  $\varphi_1(u, v)$  与  $\psi_1(u, v)$  对变量  $u$  与  $v$  的函数行列式：

$$D = \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial u} \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial v} \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u}。$$

结果二重积分中的换元公式就是：

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma)} F(u, v) |D| du dv, \quad (13)$$

其中  $F(u, v)$  是  $u$  与  $v$  的函数，它是由  $f(x, y)$  经过变换(12)得到的结果。 $u$  与  $v$  的积分限由区域  $(\sigma)$  的形状来确定，就像在[56]中对极坐标所讲的一样。

在变换(11)的公式中，我们把  $u$  与  $v$  看作点的新的曲线坐标，而平面则看作是不改变的。我们也可以把  $u$  与  $v$  仍然看作是直角坐标，那时公式(11)就给出平面的变换，使得具有直角坐标  $(x, y)$  的点变换为具有直角坐标  $(u, v)$  的点。这样的变换使得区域  $(\sigma)$  变形为新的区域  $(\Sigma)$ 。从这样的观点来看，我们应当把公式(13)改写成：

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\Sigma)} F(u, v) |D| du dv,$$

这里  $u$  与  $v$  是区域  $(\Sigma)$  的点的直角坐标，沿  $(\Sigma)$  的积分的积分限像在[56]中所讲的一样来确定。若设  $f(x, y) = F(u, v) = 1$ ，则得到区域  $(\sigma)$  的面积  $\sigma$  的一个表达式，而是写成沿  $(\Sigma)$  的积分的形状的：