# 高等数学教程

第二卷　第二分册

В. И. 斯米尔诺夫著
孙　念　增　译

人民教育出版社

## 简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。希鉴谅。


高等数学教程

第二卷 第二分册

В. И. 斯米尔诺夫著

孙 念 增 译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

湖北省新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0330 开本 787×1092 1/32 印张 9 12/16

字数 282,000 印数 98,501—198,500 定价 0.76 元

1956 年 4 月新 1 版 1959 年 2 月第 2 版(修订本)

1979 年 4 月湖北第 18 次印刷

# 第三章 重积分、曲綫积分、反常积分及依賴于参变量的积分

## §6. 重积分

**54. 容积** 到現在为止我們所講作为和的極限的定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

是就函数 $f(x)$ 确定在 $OX$ 軸的一个綫段 $(a, b)$ 上的情形考慮的。換句話說，积分区域总是某一个直綫段。

在这一节中我們把积分概念推广到下列情形：积分区域是平面上某一个区域，或是空間中某一个区域，或者甚至于是随便一个曲面上的某一个区域。在这一节的討論中，我們利用对面积与容积的直覚看法，而不細講有关取極限时一些論点的根据。在本章的最末一节我們再講严格討論的基本关鍵。我們由两次积分的概念开始，它連系着計算容积的問題，就像上面写的积分連系着計算面积的問題一样，所以，在引进两次积分的概念之前，我們先看計算容积的問題。

我們知道，計算界于曲綫 $y=f(x)$，$OX$ 軸以及两个縱坐标：$x=a$, $x=b$ 之間的面积問題，是利用定积分的概念解决的，而这面积正是由上面写的定积分来表达的[I, 87]。

現在我們来看一个类似的問題，就是計算物体的容积 $v$，这物体的界面是：已知的曲面 $(S)$，它的方程是

$$z=f(x, y), \tag{1}$$

平面 $XOY$，以及一个柱面 $(C)$，这个柱面的母綫平行于 $OZ$ 軸，

它把$(S)$投影到平面 $XOY$ 的区域$(\sigma)$上(圖 33)。

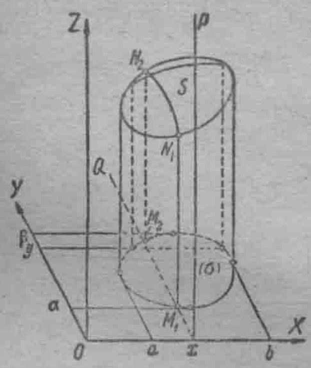


圖 33

在[I, 104]中我們講过用定积分計算物体的容积，为此只需要知道物体的平行断面；对于現在的問題我們也应用这个方法。

为簡單起見，我們設曲面$(S)$整个在平面 $XOY$ 之上，并且平行于坐标軸的直綫与$(\sigma)$的界綫$(l)$相交时至多交于两点。

用平行于平面 $YOZ$ 的平面把所考虑的物体分开，这些平面与平面 $XOY$ 的交綫是平行于 $OY$ 軸的直綫(圖 33 与 34)。把两个極端断面的横坐标各記作 $a$ 与 $b$。这也就是界綫$(l)$上把該界綫分为两部(1)与(2)的点的横坐标，这两部分(1)与(2)中，一个是

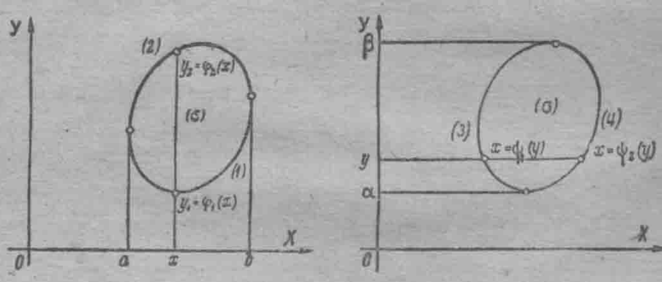


圖 34

平行于 $OY$ 軸的直綫穿入区域$(\sigma)$的位置，一个是穿出的位置(圖 34)。每一部分各有它的方程

$$y_1=\varphi_1(x);\ y_2=\varphi_2(x)。\tag{2}$$

与 $YOZ$ 距离为 $x$ 的平面 $PQ$ 在物体上截下的断面，它的面积是依賴于 $x$ 的，我們把它記作 $S(x)$。于是就有[I, 104]

$$v=\int_a^b S(x)dx。 \tag{3}$$

現在只要求函数 $S(x)$的表达式,这函数就是圖形 $M_1N_1N_2M_2$ 的面积;它位于平面 $PQ$ 上,它的界綫是:平面 $PQ$ 与曲面($S$)相交的曲綫 $N_1N_2$,平行于 $OY$ 軸的直綫 $M_1M_2$ 以及两个縱标 $M_1N_1$ 与 $M_2N_2$。

因为对所考虑的断面来講,所有的点的 $x$ 是常数,曲綫 $N_1N_2$ 的縱标可以算作是 $y$ 的函数,这个函数是当 $x$ 是常数时由下面这方程确定的

$$z=f(x, y),$$

这时自变量 $y$ 取在区間 $(y_1, y_2)$ 上,其中 $y_1$ 与 $y_2$ 是直綫 $M_1M_2$ 穿入区域($\sigma$)与穿出这个区域的点的縱坐标。

根据[**I**, 87]可以写成:

$$S(x)=\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy;$$

代入到(3)中就有:

$$v=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy。 \tag{4}$$

如此,我們得到容积的一个表达式是两次积分的形状,这里先把 $x$ 看作常数,对 $y$ 求出积分,然后把所得到的結果对 $x$ 求积分。

用平行于平面 $XOZ$ 的平面分割所給的物体,我們得到同一个容积的另一个表达式:

$$v=\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)dx, \tag{5}$$

其中 $x_1$ 与 $x_2$ 是 $y$ 的已知函数:

$$x_1=\psi_1(y);\ x_2=\psi_2(y), \tag{6}$$

而 $\alpha$ 与 $\beta$ 表示界綫($l$)上的 $y$ 的两个極端值(圖 33 与 34)。

公式(4)与(5)是在两个假定下推出的:1. 曲面($S$)整个位于平面 $XOY$ 之上;2. 曲面($S$)在平面 $XOY$ 上的投影($\sigma$)的界

綫($l$)与平行于一个坐标軸的任何直綫最多交于两点。若不滿足条件1，則公式(4)与(5)的右边所給出的不是眞正的容积，而是容积的代数和，其中位于平面 $XOY$ 之上的容积带(+)号；位于其下的带(−)号。若不滿足条件2，例如(圖35)，界綫($l$)与直綫 $x=$常数的交点有好几对，則需要把区域($\sigma$)分为几部分，使得每一部分滿足条件2，与这对应的，曲面($S$)与容积 $v$ 也就被分为几部分，計算每一部分的容积时公式(4)是适用的。

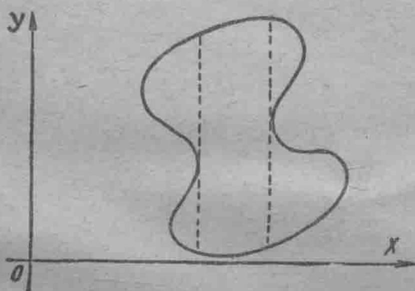


圖 35

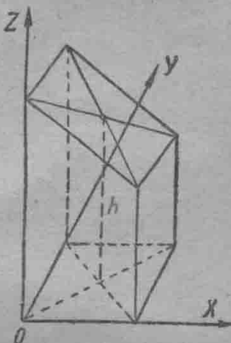


圖 36

例 1. 正棱柱的截断的容积(圖36)。底是由坐标軸 $OX$, $OY$ 与直綫 $x=k$, $y=l$ 形成的。截面的方程是

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}+\frac{z}{\nu}=1。$$

在这情形下公式(4)給出：

$$v=\int_0^k dx\int_0^l z\,dy=\int_0^k dx\int_0^l \nu\left(1-\frac{x}{\lambda}-\frac{y}{\mu}\right)dy=\nu\int_0^k dx\left(y-\frac{xy}{\lambda}-\frac{y^2}{2\mu}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=l}=$$

$$=\nu\int_0^k\left(l-\frac{xl}{\lambda}-\frac{l^2}{2\mu}\right)dx=\nu\left(kl-\frac{k^2l}{2\lambda}-\frac{kl^2}{2\mu}\right)=kl\cdot\nu\left(1-\frac{k}{2\lambda}-\frac{l}{2\mu}\right)=\sigma h,$$

其中 $\sigma$ 是底面积，$h$ 是上截面的对角綫交点$\left(对应于\ x=\frac{k}{2},\ y=\frac{l}{2}\right)$的縱标。

2. 求橢圓体
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
的容积。用平面 $z=$常数截这橢圓体时，得到橢圓，具有半軸長

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},\ b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

于是利用

$$S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

因而所求的容积是

$$v=\int_{-c}^{+c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{3}\pi abc。$$

**55. 二重积分** 为要得到曲綫 $y=f(x)$ 下的面积的近似式，我們[I, 87]把它分为竪条，并且用一些矩形来替代每一个竪条的面积，这些矩形的底各是每一个竪条的底，而高等于这个竪条上曲綫的縱坐标的某一个中間值。当竪条的数目增加而每一个都趋向零时，差誤→0，于是由近似式取極限就成为定积分，它給出面积的准确表达式。

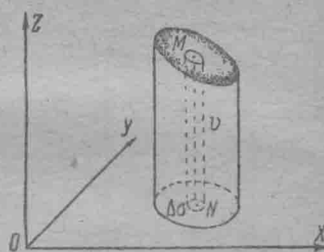


圖 37

計算容积时也可以用类似的作法。把区域$(\sigma)$(圖 37)分成很多个任意形状的小單元 $\Delta\sigma$，这里我們一方面用 $\Delta\sigma$ 記这些个小区域，另一方面也用 $\Delta\sigma$ 記它們的面积。以每一个这样的單元为底作一个柱体直到与曲面$(S)$相交，就把容积 $v$ 分为單元容积。显然，我們可以取一个柱体的容积作为这样的單元容积的近似値，这个柱体的底也是 $\Delta\sigma$，而高是一个縱标，也就是投影为 $\Delta\sigma$ 的曲面單元上任何一点的 $z$ 的值。換句話說，这就是在 $\Delta\sigma$ 上任取一点 $N$，为簡短起見，把曲面$(S)$上对应于点 $N$ 的点 $M$ 的縱标記作 $f(N)$，也就是函数 $f(x, y)$ 在 $N$ 点的値，我們就得到單元容积为 $f(N)\Delta\sigma$，于是

$$v\sim\sum_{(\sigma)}f(N)\Delta\sigma,$$

这里要对于填滿面积$(\sigma)$的所有的單元面积 $\Delta\sigma$ 求和。

每一个單元 $\Delta\sigma$ 愈小，而且單元的数目 $n$ 愈多时，所得到的近

似公式就愈准确，取極限后可以写成：

$$\lim \sum_{(\sigma)} f(N) \Delta\sigma = v。$$

抽去几何的形象，不管函数 $f(N)$ 的几何意义，我們还是可以确定这个和的極限，这个極限叫做函数 $f(N)$ 沿区域 $(\sigma)$ 的二重积分，并且表示成：

$$\iint_{(\sigma)} f(N) d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(N) \Delta\sigma。$$

这个極限的存在是很明显的，因为像我們以上所講的，这个極限应当給出以上我們所作的容积 $v$。自然这种論証不是严格的，不过，对于具有一般条件的 $f(N)$ 以及所有的連續函数的任何情形，上述極限的存在可以严格証明。

若我們設 $f(N)=1$，則得到区域 $(\sigma)$ 的面积 $\sigma$ 的一个表达式，而是二重积分的形状：

$$\sigma = \iint_{(\sigma)} d\sigma。$$

我們来叙述二重积分的完全定义：設 $(\sigma)$ 是一个有界的平面区域，$f(N)$ 是这个区域上的点的函数，就是說，在区域 $(\sigma)$ 的每一点 $N$ 取确定値的一个函数。把区域 $(\sigma)$ 分为 $n$ 个部分区域，并設 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ 是这些部分的面积，而 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 各为这些部分上的任一点。作出乘积的和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k) \cdot \Delta\sigma_k。$$

当分成的数目 $n$ 无限增加，而每一个部分区域无限减小，这个和的極限就叫做函数 $f(N)$ 沿区域 $(\sigma)$ 的二重积分

$$\iint_{(\sigma)} f(N) d\sigma = \lim \sum_{k=1}^{n} f(N_k) \Delta\sigma_k。$$

附注　設 $d_k$ 是面积为 $\Delta\sigma_k$ 的部分区域中两点間的最大距离

(这个区域的直徑),而 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中的最大的数是 $d$。在定义中所說的每一个部分区域 $\Delta\sigma_k$ 无限减小这句話就具有 $d\to 0$ 的意义。如果用字母 $I$ 来記积分的数値,則上述定义就相当于:对于給定的任何正数 $\varepsilon$,存在这样一个正数 $\eta$,使得[参考 **I, 87**]只要 $d\leqslant\eta$,則

$$\left|I-\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta\sigma_k\right|\leqslant\varepsilon。$$

在本章末,討論重积分的完整理論时,我們才引出面积的严格定义,并且更准确的講可以求积分的那样的区域$(\sigma)$的概念,以及如何把它分成各部分区域,并且对于連續函数 $f(N)$ 以及某些类的間断函数,来証明上述和的極限的存在。

**56. 二重积分的計算法** 把二重积分考虑作容积,我們可以把二重积分化为两次积分。

对于区域$(\sigma)$应用直角坐标,設用平行于坐标軸的直綫,把区域$(\sigma)$的面积分割成具有边为 $\Delta x, \Delta y$ 的矩形,得到單元 $\Delta\sigma$(圖 38),并設$(x, y)$是点 $N$ 的坐标。这时可以写成:

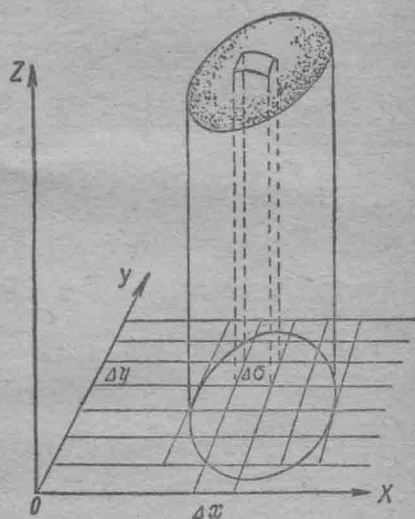

圖 38

$$f(N)=f(x, y);\quad \Delta\sigma=\Delta x\Delta y;\quad d\sigma=dx\,dy,$$

并且

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma=\lim\sum_{(\sigma)} f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y=\iint_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy。$$

另一方面，应用[54]中所講的用两次积分来表达容积的方法，这可以写成：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy=\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx, \quad (7)$$

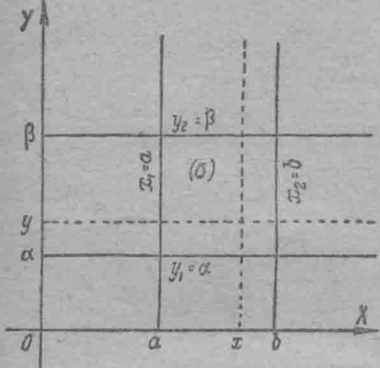


圖 39

这就給出計算二重积分的法則，而与函数 $f(x, y)$ 的几何意义无关。

若是先对 $y$ 求积分，則这时 $x$ 算作常数，而积分限 $y_1$ 与 $y_2$ 是 $x$ 的函数，这两个函数是由[54]中公式（2）所确定的。若先对 $x$ 求积分，也有类似的情况。只有当积分区域是个矩形，它的边平行于坐标軸时，在两次积分中先求积分的积分限才可能是常数，而不依賴于第二次积分的积分变量。若$(\sigma)$是界于直綫（圖 39）：

$$x=a;\quad x=b;\quad y=\alpha;\quad y=\beta$$

的矩形区域，則

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x, y)\,dx。\quad (8)$$

表达式 $d\sigma=dx\,dy$ 叫做在直角坐标系中的面积單元。

注意，在公式（7）中把 $x$ 看作常数先对 $y$ 求积分这件事，就对应于沿着平行于 $OY$ 軸的一竪条内所含的矩形求和，其中所有的矩形有相同的寬度 $dx$，它被提出在第一次求积分的記号之外。第二次对 $x$ 求积分对应于把沿平行于 $OY$ 軸各条求和所得的所有結果再相加。在本章最后一节中我們要給出公式（8）与（7）的严格論証。

如果平行于坐标軸的直綫与$(\sigma)$的界相交多于两个交点，則应当像在[54]說过的那样来处理。

当然，这里和以后我們假設說到的积分存在[看95]。为此，只要使得被积函数在$(\sigma)$直到它的边界上都連續，我們还假設，区域$(\sigma)$滿足[91]中在論証积分概念时所說的条件。

現在我們用極坐标$(r, \varphi)$来处理区域$(\sigma)$。这时曲面$(S)$的方程应当写成$z=f(r, \varphi)$。

画出曲綫族$r=$常数以及$\varphi=$常数，就是同心圓周以及通过原点的射綫，我們得到單元$\Delta\sigma$(圖40)。半徑为$r$与$(r+\Delta r)$的圓弧以及斜角为$\varphi$与$(\varphi+\Delta\varphi)$的两条射綫交成的曲綫圖形$\Delta\sigma$，可以考慮作边長为$\Delta r$与$r\Delta\varphi$的矩形，所差的只是高級的无穷小，于是

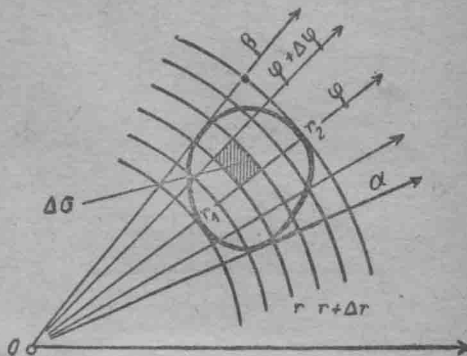

圖 40

$$\Delta\sigma=r\Delta r\Delta\varphi,$$

这时可以写成：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\lim\sum_{(\sigma)} f(r, \varphi)\, r\Delta r\Delta\varphi=\iint\limits_{(\sigma)} f(r, \varphi) r\, dr\, d\varphi。$$

这里我們得到一个二重积分，它的被积函数是$f(r, \varphi)r$。为要計算它，可以应用化为两次积分的法則，不过現在只是$r$与$\varphi$起着$x$与$y$的作用。

先对$r$求积分把$\varphi$算作常数，这对应于沿着界于两条射綫$\varphi$与$(\varphi+d\varphi)$之間的單元$\Delta\sigma$求和，而把$d\varphi$放在第一次求积分的記号之外。第二次对$\varphi$求积分对应于把第一次求和所得到的所有結

果相加。应用上述法则时，我們首先标記出变量 $\varphi$ 的極端值 $\alpha$ 与 $\beta$（对应于[54]中 $x$ 的極端值）。以后对于固定的 $\varphi$ 找出射綫 $\varphi=$ 常数穿入与穿出 $(\sigma)$ 的点的矢徑 $r_1$ 与 $r_2$（这对应于在[54]中确定 $y_1$ 与 $y_2$）。确定了这些已知量，就有：

$$\iint_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\iint_{(\sigma)} f(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{r_1}^{r_2} f(r,\varphi)r\,dr,\quad (9)$$

其中 $r_1$ 与 $r_2$ 是 $\varphi$ 的已知函数。

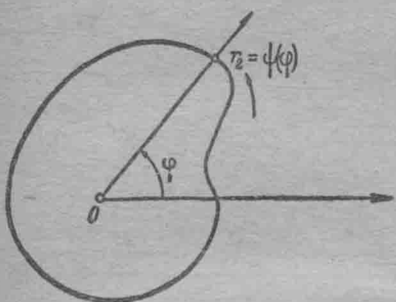


圖 41

圖 40 对应于坐标原点在界綫 $(l)$ 外的情形。若原点在界綫 $(l)$ 內，則可把 $\varphi$ 看作是由 0 变到 $2\pi$，并且对于給定的 $\varphi$ 值 $r$ 由 0 变到 $r_2$，其中 $r_2$ 来自曲綫 $(l)$ 的方程：$r_2=\psi(\varphi)$，这就給出（圖 41）：

$$\iint_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{r_2} f(r,\varphi)r\,dr。$$

表达式

$$r\,dr\,d\varphi \quad (10)$$

叫做極坐标系中的面积單元。

特别是，若 $f(N)=1$，我們就得到在[I, 102]中所講的曲綫所包的面积的極坐标表达式：

$$\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{r_1}^{r_2} r\,dr=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2^2-r_1^2)d\varphi。$$

（[I, 102]中的公式对应于 $r_2=r$，$r_1=0$ 的情形。）

例 求界于半徑为 $a$ 的球与通过球心的半徑为 $\frac{a}{2}$ 的正圓柱之間的容积（圖 42）。

取球心作坐标原点，通过球心垂直于圓柱的軸的平面作为平面 $XOY$，通过球心以及平面 $XOY$ 与圓柱的軸的交点的直綫作为 $OX$ 軸。根据对称性，可以說，所求的容积是界于平面 $ZOX$，$XOY$ 以及上半球之間的一部分圓柱体的容积的四倍。

这里积分区域是圓柱的半个底，它的界綫由半圓周

$$r=a\cos\varphi$$

以及 $OX$ 軸上的綫段組成，其中角度 $\varphi$ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，对应于射綫——由 $OX$ 軸到 $OY$ 軸。

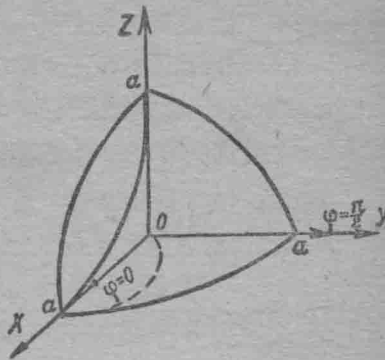

圖 42

球面的方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

在这情形下可以写成：

$z^2=a^2-(x^2+y^2)$； $z=\sqrt{a^2-r^2}$。

所以，所求的容积是：

$$v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,rdr=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3-a^3\sin^3\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left[\varphi+\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)。$$

**57. 曲綫坐标** 在前一段中，我們就直角坐标与極坐标的情形，确定了面积單元，并且考慮了計算积分的問題。現在我們就任何的坐标 $(u, v)$ 来考慮这个問題。依照公式

$$\varphi(x, y)=u;\quad \psi(x, y)=v。\tag{11}$$

引用任何的新的变量 $u$ 与 $v$ 来替代直角坐标 $x$ 与 $y$。

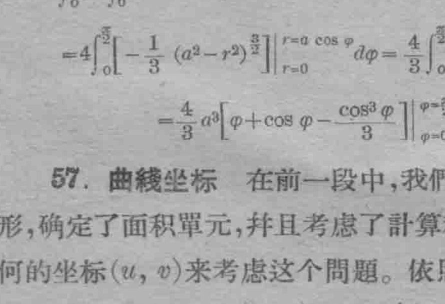

圖 43

給 $u$ 与 $v$ 所有可能的常数値，在平面上就得到两族綫（圖 43），一般說来，这些綫都是曲綫。平面上点 $M$ 的位置是由一对数 $(x, y)$ 来确定的，或者根据 (11)，它就被一对数 $(u, v)$ 所确定。这一对数 $(u, v)$ 叫做点 $M$ 的曲綫坐标。由方程 (11) 解出 $x$ 与 $y$，就得到直角坐标 $(x, y)$ 通过曲綫坐标 $(u, v)$ 的表达式：

$$x=\varphi_1(u,\ v);\quad y=\psi_1(u,\ v)。\tag{12}$$

在極坐标的情形 $u$ 就是 $r$，$v$ 就是 $\varphi$。以上我們講到的 $u$ 为常数以及 $v$ 为常数的綫叫做曲綫坐标 $(u,\ v)$ 的坐标綫。它們形成两族曲綫(在極坐标中是圓周族与射綫族)。

現在我們来确定在曲綫坐标 $(u,\ v)$ 中的面积單元 $d\sigma$。

为此我們考慮两对很近的坐标綫:

$$\varphi(x,\ y)=u;\quad \varphi(x,\ y)=u+du,$$
$$\psi(x,\ y)=v;\quad \psi(x,\ y)=v+dv$$

所形成的面积單元 $M_1M_2M_3M_4$(圖 43)。

不計高級无穷小，这个四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 的頂点的坐标就是[**I**, **68**]:

$$(M_1)x_1=\varphi_1(u,\ v);\quad y_1=\psi_1(u,\ v)。$$

$$(M_2)x_2=\varphi_1(u+du,\ v)=\varphi_1(u,\ v)+\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial u}du;$$

$$y_2=\psi_1(u+du,\ v)=\psi_1(u,\ v)+\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial u}du。$$

$$(M_3)x_3=\varphi_1(u+du,\ v+dv)=$$
$$=\varphi_1(u,\ v)+\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial v}dv;$$

$$y_3=\psi_1(u+du,\ v+dv)=$$
$$=\psi_1(u,\ v)+\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial u}du+\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial v}dv。$$

$$(M_4)x_4=\varphi_1(u,\ v+dv)=\varphi_1(u,\ v)+\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial v}dv;$$

$$y_4=\psi_1(u,\ v+dv)=\psi_1(u,\ v)+\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial v}dv。$$

由这些公式直接推出，$x_2-x_1=x_3-x_4$ 与 $y_2-y_1=y_3-y_4$，由这两个等式推知，綫段 $M_1M_2$ 与 $M_4M_3$ 相等而且同向。同理綫段 $M_1M_4$ 与 $M_2M_3$ 也是如此，就是說，不計高級无穷小的話，$M_1M_2M_3M_4$

是个平行四边形，它的面积等于三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积的二倍，依照解析几何学中已知的公式，就有：

$$d\sigma = |x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+(x_2y_3-x_3y_2)|。$$

代入以坐标的表达式，就得到用任何曲綫坐标时的面积单元公式：

$$d\sigma = \left|\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\right|dudv=$$

$$=|D|dudv,$$

其中 $D$ 叫做函数 $\varphi_1(u,v)$ 与 $\psi_1(u,v)$ 对变量 $u$ 与 $v$ 的函数行列式：

$$D=\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}。$$

結果二重积分中的换元公式就是：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} F(u,v)\,|D|\,dudv, \tag{13}$$

其中 $F(u,v)$ 是 $u$ 与 $v$ 的函数，它是由 $f(x,y)$ 經过变换(12)得到的結果。$u$ 与 $v$ 的积分限由区域 $(\sigma)$ 的形状来确定，就像在[**56**]中对極坐标所講的一样。

在变换(11)的公式中，我們把 $u$ 与 $v$ 看作点的新的曲綫坐标，而平面則看作是不改变的。我們也可以把 $u$ 与 $v$ 仍然看作是直角坐标，那时公式(11)就給出平面的变换，使得具有直角坐标 $(x,y)$ 的点变换为具有直角坐标 $(u,v)$ 的点。这样的变换使得区域 $(\sigma)$ 变形为新的区域 $(\Sigma)$。从这样的观点来看，我們应当把公式(13)改写成：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(\Sigma)} F(u,v)\,|D|\,dudv,$$

这里 $u$ 与 $v$ 是区域 $(\Sigma)$ 的点的直角坐标，沿 $(\Sigma)$ 的积分的积分限像在[**56**]中所講的一样来确定。若設 $f(x,y)=F(u,v)=1$，則得到区域 $(\sigma)$ 的面积 $\sigma$ 的一个表达式，而是写成沿 $(\Sigma)$ 的积分的形状的：