中学数学专题丛书

叶尧城 主编

董方博 编著

排列组合与二项式定理

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

13

中学数学专题丛书

叶尧城 主编

排列组合与二项式定理

董方博 编著

13

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

排列与组合/董方博编著 .—武汉:湖北教育出版社,2001
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3169-7

Ⅰ.排… Ⅱ.董… Ⅲ.①排列-中学-教学参考资料②组合-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 078194 号

出版 发行:湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号
网　址:http://www.hbedup.com　　邮编:430015　传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经　销:新　华　书　店
印　刷:文字六〇三厂印刷　　(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开　本:787mm×1092mm　1/32　　6.75 印张
版　次:2002 年 4 月第 1 版　　2002 年 4 月第 1 次印刷
字　数:131 千字　　印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3169-7/G·2574　　定价:9.00 元

总　　序

随着素质教育的深入推进，需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁，以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建？改革教材成为了人们选择的突破口！当前，国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用，新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而，我国幅员辽阔，地区间的教育水平的差异大，个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”，发展学生的个性特长，让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高，还需要通过特定的教学过程来完成，其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等)。因此，我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物，以专题讲座的形式，帮助学生了解知识的发生、发展过程，学会分析、解决问题的思想方法，深化、拓宽相关知识。

有鉴于此，我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有18个小册子，各册相对独立又相互联系，小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触，介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础**。通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力**。精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用**。精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新**。精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功**。选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

目录

第一章 排列

1.1 两个基本原理

在研究排列与组合的有关问题之前,先理解两个基本原理是必要的,这就是加法原理和乘法原理.

一、加法原理

加法原理是非常基本的,它其实就是整体等于其部分之和的一种表述.让我们先来看一个例子:一个学生想选学一门数学课或一门生物课,但不能同时选两门课,如果该生对4种数学课和3种生物课具备选课的条件,问共有多少种不同的选择方法?

在数学课中有4种选择方法,在生物课中有3种选择方法.以上两种情况既互相独立,又包括了所有可能的情况,因此该生的选课方法共有 $4+3=7$(种).

一般地,有如下原理:

加法原理　完成一件事,有 n 类办法,在第1类办法中有 m_1 种不同的方法,在第2类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

加法原理还可以用另一种方式表述为:假若可用 m 种方法从一组物品中选取一件物品,而且还可以用 n 种方法从另一组物品中选取一件物品,则不管从哪一组中选取一件物品,可以有 $m+n$ 种方法,这种做法可以推广到两组以上的各种情况.

【例1】 高二(1)班有学生50人,男生28人,女生22人;高二(2)班有学生52人,男生30人,女生22人;高二(3)班有学生60人,男生25人,女生35人.

(1)从高二这三个班的学生中选一名学生任校学生会主席,有多少种不同的选法?

(2)从这三个班中选一名女生任学生会文体部长,有多少种不同的选法?

【解】 学生会主席可在三个班的学生中选取,而文体部长只能在三个班的女生中选取,依加法原理:

(1)学生会主席共有 $50+52+60=162$(种),即有162种不同的选法.

(2)文体部长共有 $22+22+35=79$(种),即有79种不同的选法.

【例2】 求满足不定方程 $x+y\leqslant 7$ 的正整数解有多少组.

【分析】 我们采用分类计数的方法,满足条件 $x+y\leqslant 7(x\in N^{+},y\in N^{+})$ 的 x 的取值可能是1,2,3,4,5,6.把上述问题分成六类方式分别解决,再用加法原理求和数.

【解】 $x=1$ 时，y 可取 1,2,3,4,5,6 共 6 种；

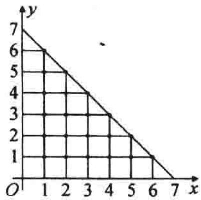
$x=2$ 时，y 可取 1,2,3,4,5 共 5 种；

$x=3$ 时，y 可取 1,2,3,4 共 4 种；

$x=4$ 时，y 可取 1,2,3 共 3 种；

$x=5$ 时，y 可取 1,2 共 2 种；

$x=6$ 时，y 可取 1 共 1 种.



依加法原理知：共有 $6+5+4+3+2+1=21$，此不定方程的正整数解有 21 组.

另外说明一点，此问题也可用图像方法，如图，化成求直线 $x+y=7$ 与 x 轴、y 轴围成的三角形区域内（包括直线 $x+y=7$ 构成的边界），正整数坐标点的个数，由图可知，正整数坐标点共有 21 个.

二、乘法原理

让我们再看一个例子：

某钟厂采用统一机心生产一种座钟，设计了 3 种不同的钟面数字，4 种不同的钟面颜色，5 种不同的外壳形状，以满足市场的需求. 问此种座钟在市场上共有多少种不同的款式供顾客挑选？

顾客在挑选此种统一机心的座钟时，可先看钟面数字形式，再挑选钟面颜色，最后决定外壳形状，共有 $3\times4\times5=60$ 种不同的款式供大家挑选.

一般地，我们有下面的基本原理：

乘法原理　完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法 …… 做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法.

乘法原理的另一种表述方法是:如果第1个事物可用 m_1 种方式选择,且不论第1个事物怎么选择,第2个事物都有 m_2 种选择方式……不论前面的事物怎么选择,第 n 个事物都有 m_n 种选择方式;那么同时选择第1个、第2个……第 n 个事物的方式有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种.

【例3】 现有高一学生8名,高二学生12名,高三学生10名组成数学课外活动小组.

(1) 选其中一人为组长,有多少种不同的选法?

(2) 每一个年级选一名组长,有多少种不同的选法?

【解】 (1) 完成这件事就是在这三个年级的所有学生之中选出一个人当组长,依加法原理共有 $8 + 12 + 10 = 30$ 种不同的选法.

(2) 完成这件事,需分成三个步骤:先在高一的8名学生中选一名组长,再在高二的12名学生中选一名组长,最后在高三的10名学生中选一名组长,依乘法原理,共有 $8 \times 12 \times 10 = 960$ 种不同的选法.

【例4】 在1000与9999之间有多少个各数位上数字不同的奇数?

【解】 在1000与9999之间的数都是由4个数字按某个顺序排列的,我们需要4种选择分别确定个位、十位、百位和千位上的数字.因为是奇数,我们先确定个位数字只能在1,3,5,7,9中,共有5种选择;千位数字不能为零,且要求各数位上数字不同,于是它有8种选择;十位数字在余下的8个数中任意选择,

有8种方式；百位数字在剩下的7个数字中有7种选择，依乘法原理，共有 $5\times8\times8\times7=2240$ 个各数位上数字不同的奇数.

加法原理和乘法原理的区别在于前者和分类有关，后者与分步有关.如果完成一件事有 n 类办法，这 n 类办法彼此之间是相互独立的，无论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事，求完成这件事的方法的种数，就用加法原理；如果完成一件事需要分成 n 个步骤，缺一个不可，而完成每一个步骤又各有若干种不同的方法，这就是说需要完成所有的步骤，才能完成这件事，求完成这件事的方法种数，就用乘法原理.因此，认真地读懂题意，恰当地分类或分步是掌握两个基本原理的关键，有些问题还需要将两个基本原理结合使用.

【例5】 设有5幅不同的国画，2幅不同的油画，7幅不同的水彩画.

(1) 从中任选一幅布置房间，有几种不同的选法？

(2) 从这些国画、油画、水彩画中各选一幅布置房间，有几种不同的选法？

(3) 从这些画中选出两幅不同画种的画布置房间，有几种不同的选法？

【解】 (1) 依加法原理有 $5+2+7=14$(种)；

(2) 依乘法原理有 $5\times2\times7=70$(种)；

(3) 由于可选择国画和油画各一幅共 $5\times2=10$(种)，也可选择国画和水彩画各一幅共 $5\times7=35$(种)，还可选择油画和水彩画各一幅共 $2\times7=14$(种).再依加法原理共有 $5\times2+5\times7+2\times7=59$(种)，有59种不同的选法.

【例6】 把7个不同颜色的球，(1) 放入两个颜色不同的

布袋中;(2) 放入两个颜色相同的布袋中.各有多少种不同的放法?

【解】 (1) 每一个小球放入两个颜色不同的布袋中,都面临着两种不同的选择,共有 2^7 种不同的放法.

(2) 将第一个球放入两个同色的布袋中,放到哪一个布袋中都是一回事,只有一种放法;再放后面的每一个球时,由于前面有的袋子里已经有球了,就都有两种不同的选择了,共有 2^6 种不同的放法.

【例7】 3张1元币,4张1角币,1张5分币,2张2分币,可以组成多少种不同的币值?

【解】 分币可组成0分、2分、4分、5分、7分、9分6种币值;角币可组成0角、1角、2角、3角、4角5种币值;元币可组成0元、1元、2元、3元4种币值.在这3类币值中各选一种,依乘法原理共有 $4\times5\times6=120$(种),减去其中0元0角0分的一种情况,可以组成119种不同的币值.

【例8】 在连结正八边形的三个顶点组成的三角形中,与正八边形有公共边的三角形有多少个?

【解】 与正八边形有两个公共边的三角形有8个;与正八边形只有一个公共边的三角形以八边形的任一条边为底可作出4个,有 $4\times8=32$ 个三角形.共有 $8+4\times8=40$ 个三角形.

【例9】 某社会福利彩票规定:从01至36共36个号中抽出7个号为一注,每注2元,某人想从01至10中选出3个连续的号,从11至20中选2个连续的号,从21至30中选1个号,从31至36中选1个号组成一注.问这个人把这种特殊要求的号买全,共要花多少钱?

【解】 先确定共要买多少注,从01至10中选3个连续的号,分别为“01,02,03”……“08,09,10”共8种选择.从11至20中选2个连续的号,分别为“11,12”……“19,20”有9种选择.从21至30中选1个号,有10种选择.从31至36中选1个号,有6种选择.依乘法原理,共有$8\times9\times10\times6=4320$(注).每注2元,共需$4320\times2=8640$(元).这个人把这种特殊要求的号买全,共要花8640元.

【例10】 某种彩票每注投入号由7位号码组成,每位号码均从0至9这十个数字中产生.某次抽奖特等奖的号码是1236789,一等奖要求前六位数码与特等奖相同,第七位数码无限制;二等奖要求从左边或右边的连续五位数码与特等奖相同(9不含在内),其余两位数码无限制;三等奖要求从左边或右边的连续四位数码与特等奖相同(9不含在内),其余三位数码无限制.即:

特等奖中奖号码1236789;

一等奖中奖号码$123678x$;

二等奖中奖号码$12367xy$或$xy23678$;

三等奖中奖号码$1236xyz$或$xyz3678$.

问这期彩票三等奖中奖的号码共有多少注?

【解】 先以$1236xyz$为例进行分析,前四位的数码已经确定.第五位的数为除7以外的9个数,因为如果为7则至少已中二等奖了,而第六位和第七位的数码均可在0至9中任意选择,各有10种选择,共有$9\times10\times10=900$种,即900注;同理对于$xyz3678$的情况也有相应的900注,故这期彩票三等奖中奖的号码总共有1800注.

练习 1.1

一、选择题

1. 乒乓球队里有男队员6人,女队员5人,从中选出男、女队员各一人组成混合双打队,可以有不同的组队方法(　　)种.

A.11　　B.30　　C.5^6　　D.6^5

2. 从数集 $M=\{1,2,3\}$ 到数集 $N=\{1,2,3,4\}$ 的不同的映射的个数是(　　).

A.81　　B.64　　C.24　　D.12

3. 将4个不同的小球放入3个不同的盒子,其中每个盒子都不空的放法共有(　　).

A.3^4　　B.4^3　　C.18　　D.36

4. 从1,2,3,4四个数字中任意取数(不重复取)作和,则取出这些数的不同的和共有(　　).

A.8个　　B.9个　　C.10个　　D.15个

二、填空题

5. 从甲地到乙地,一天内有汽车8班、火车3班、轮船2班,则在这一天里乘坐不同班次的汽车、火车或轮船,共有______种不同的走法.

6. 从4件不同的礼物中选3件送给3位小朋友,每人一件礼物,不同的送法有______种.

7. 将3封信投入4个不同的邮筒,有______种不同的投法;4名学生从3个不同的楼梯下楼,有______种不同的下法.

8. 某城市的电话号码,由六位数升为七位数(首位数字均不为零),则该城市可增加的电话数是________.

三、解答题

9. 一座山的南坡有山路三条,北坡有山路三条,均通往山顶.(1) 从南坡上山,再由北坡下山;(2) 下山时不走原来上山的路;(3) 任意选择上山和下山的路.问从上山到下山,各有几种不同的走法?

10. 某校外语教研组有9人,每人至少会英语和日语中的一门,其中7人会英语,3人会日语,从中选出会英语与会日语的各1人,有多少种不同的选法?

11. 发黑车间经过优选法试验,其中亚硝酸钠与氢氧化钠的用量在1∶4和1∶5中选择;发黑时间是13,14,15(分钟);控制温度是142℃或145℃.现在对不同的用量比、发黑时间和控制温度进行试验,确定一种最佳的生产方案,问共需做多少次试验?

12. 一个口袋内装有5个小球,另一个口袋装有4个小球,所有这些小球的颜色互不相同.

(1) 从两个口袋内任取一个小球,有多少种不同的取法?

(2) 从两个口袋内各取一个小球,有多少种不同的取法?

1.2 相异元素无重复的排列

在这一节中我们研究相异元素无重复的排列问题,在没有特殊说明的情况下,就称它为排列.

一、排列

我们先来看一个例子:

某火车站有1,2,3,4四个站台,现有3列客车要同时进站停车,问有多少种不同的安排?

在解决这个问题时,我们这样来思考:首先让第1列火车进站,它有4种选择;当第1列火车进站停下后,第2列火车进站时就只有3种选择;而第3列火车进站时,就只剩下2种选择了,依乘法原理共有 $4\times3\times2=24$ 种不同的安排.关于这个问题我们也可以理解为从4个不同的站台中取出3个安排3列火车,由此而给出排列的定义:

一般地,从 n 个不同的元素中,任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

在排列的定义中包含着两个本质的内容,一是这几个元素是相异的,取出的 m 个元素当然也是相异的;二是"按照一定的顺序排成一列"就是要考虑到元素的顺序,这也是排列问题最本质的特征.由于是排成一列,我们也把这种排列叫线排列,以区别环状排列等其它的排列形式.

我们把取出的元素相同,排列顺序也相同的排列叫做"相同的排列",而所取元素不完全相同或元素虽然相同,但排列顺序不完全相同的排列都叫做"不同的排列".

例如,从集合 $\{a,b,c,d\}$ 中任取两个元素构成的排列中:

(1) a,b 与 c,d 所取的元素完全不同;

(2) a,b 与 a,c 所取的元素不完全相同;

(3) a,b 与 b,a 所取的元素完全相同,但排列顺序不同,

上述三组排列都是不同的排列.只有元素完全相同,排列顺序也完全相同的排列,如 a,b 与 a,b,才称为相同的排列.