



“新课程学习能力评价”课题研究资源用书

刘德 林旭◎主编

新课程学习能力评价专家组编写

学习高手

状元塑造车间

学习 技术化

STUDY TECHNOLOGY

专业眼光探知学习需求

专业方法解决学习难题

专业流程简化学习过程



数学

【必修4】

配新课标人教A版

图书在版编目(CIP)数据

学习高手. 数学. 4: 必修/刘德, 林旭主编. —北京: 光明日报出版社, 2006. 11(2007. 9 重印)
配新课标人教 A 版
ISBN 978-7-80206-366-2

I. 学... II. ①刘... ②林... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 128109 号

学习高手(必修 4)

主 编: 刘 德 林 旭

责任编辑: 温 梦

封面设计: 刘 洋

责任校对: 徐为正

版式设计: 懿 林

责任印制: 胡 骑

出版发行: 光明日报出版社

地 址: 北京市崇文区珠市口东大街 5 号, 100062

电 话: 010-67078234(咨询), 67078235(邮购)

传 真: 010-67078227, 67078233, 67078255

网 址: <http://book.gmw.cn>

E - mail: gmcbs@gmw.cn

法律顾问: 北京盈科律师事务所郝惠珍律师

印 刷: 山东鸿杰印务有限公司

装 订: 山东鸿杰印务有限公司

本书如有破损、缺页、装订错误, 请与本社联系调换。

开 本: 890×1240 1/32

字 数: 4311 千字

版 次: 2007 年 9 月第 2 版

书 号: ISBN 978-7-80206-366-2

印 张: 142

印 次: 2007 年 9 月第 1 次印刷

总定价: 198.80 元(全 12 册)

版权所有 翻印必究

目录

第一章 三角函数 1

走近学科思想 1

本章导读 1

1.1 任意角和弧度制 2

1.1.1 任意角 2

高手支招 1 细品教材 3

高手支招 2 基础整理 5

高手支招 3 综合探究 6

高手支招 4 典例精析 6

高手支招 5 思考发现 8

高手支招 6 体验成功 8

教材习题点拨 10

1.1.2 弧度制 12

高手支招 1 细品教材 12

高手支招 2 基础整理 14

高手支招 3 综合探究 14

高手支招 4 典例精析 15

高手支招 5 思考发现 18

高手支招 6 体验成功 18

教材习题点拨 21

1.2 任意角的三角函数 24

1.2.1 任意角的三角函数 24

高手支招 1 细品教材 24

高手支招 2 基础整理 28

高手支招 3 综合探究 29

高手支招 4 典例精析 29

高手支招 5 思考发现 33

高手支招 6 体验成功 34

教材习题点拨 37

1.2.2 同角三角函数的基本

关系 39

高手支招 1 细品教材 39

高手支招 2 基础整理 40

高手支招 3 综合探究 40

高手支招 4 典例精析 41

高手支招 5 思考发现 43

高手支招 6 体验成功 43

教材习题点拨 46

1.3 三角函数的诱导公式 49

高手支招 1 细品教材 49

高手支招 2 基础整理 52

高手支招 3 综合探究 52

高手支招 4 典例精析 53

高手支招 5 思考发现 56

高手支招 6 体验成功 56

教材习题点拨 59

1.4 三角函数的图象与性质 62

1.4.1 正弦函数、余弦函数的

图象 62

高手支招 1 细品教材 62

高手支招 2 基础整理 64

高手支招 3 综合探究 64

高手支招 4 典例精析 65

高手支招 5 思考发现 68

高手支招 6 体验成功 69

教材习题点拨 72

1.4.2 正弦函数、余弦函数的

性质 73

高手支招 1 细品教材 73

高手支招 2 基础整理 76

高手支招 3 综合探究	76
高手支招 4 典例精析	76
高手支招 5 思考发现	80
高手支招 6 体验成功	80
教材习题点拨	82

1.4.3 正切函数的性质与图象

高手支招 1 细品教材	84
高手支招 2 基础整理	86
高手支招 3 综合探究	86
高手支招 4 典例精析	87
高手支招 5 思考发现	92
高手支招 6 体验成功	92
教材习题点拨	96

1.5 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

高手支招 1 细品教材	100
高手支招 2 基础整理	106
高手支招 3 综合探究	106
高手支招 4 典例精析	107
高手支招 5 思考发现	111
高手支招 6 体验成功	111
教材习题点拨	115

1.6 三角函数模型的简单应用

高手支招 1 细品教材	119
高手支招 2 基础整理	119
高手支招 3 综合探究	119
高手支招 4 典例精析	120
高手支招 5 思考发现	124
高手支招 6 体验成功	125
教材习题点拨	128

本章总结	130
------------	-----

本章测试	135
------------	-----

教材习题点拨	140
--------------	-----

第二章 平面向量

走近学科思想	145
--------------	-----

本章导读	145
------------	-----

2.1 平面向量的实际背景及基本概念

高手支招 1 细品教材	147
高手支招 2 基础整理	150
高手支招 3 综合探究	151
高手支招 4 典例精析	151
高手支招 5 思考发现	155
高手支招 6 体验成功	155
教材习题点拨	159

2.2 平面向量的线性运算

2.2.1 向量加法运算及其几何意义

高手支招 1 细品教材	162
高手支招 2 基础整理	166
高手支招 3 综合探究	166
高手支招 4 典例精析	167
高手支招 5 思考发现	170
高手支招 6 体验成功	170
教材习题点拨	175

2.2.2 向量减法运算及其几何意义

高手支招 1 细品教材	176
高手支招 2 基础整理	178
高手支招 3 综合探究	178
高手支招 4 典例精析	179

高手支招 5 思考发现	181
高手支招 6 体验成功	182
教材习题点拨	185
2.2.3 向量数乘运算及其几何意义	186
高手支招 1 细品教材	186
高手支招 2 基础整理	188
高手支招 3 综合探究	189
高手支招 4 典例精析	189
高手支招 5 思考发现	192
高手支招 6 体验成功	192
教材习题点拨	194
2.3 平面向量的基本定理及坐标表示	199
2.3.1 平面向量基本定理	199
高手支招 1 细品教材	199
高手支招 2 基础整理	201
高手支招 3 综合探究	201
高手支招 4 典例精析	201
高手支招 5 思考发现	204
高手支招 6 体验成功	204
2.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示	209
2.3.3 平面向量的坐标运算	209
高手支招 1 细品教材	209
高手支招 2 基础整理	212
高手支招 3 综合探究	213
高手支招 4 典例精析	214
高手支招 5 思考发现	219

高手支招 6 体验成功	219
2.3.4 平面向量共线的坐标表示	223
高手支招 1 细品教材	223
高手支招 2 基础整理	225
高手支招 3 综合探究	226
高手支招 4 典例精析	226
高手支招 5 思考发现	231
高手支招 6 体验成功	231
教材习题点拨	234
2.4 平面向量的数量积	237
2.4.1 平面向量数量积的物理背景及其含义	237
高手支招 1 细品教材	237
高手支招 2 基础整理	241
高手支招 3 综合探究	241
高手支招 4 典例精析	242
高手支招 5 思考发现	244
高手支招 6 体验成功	244
教材习题点拨	247
2.4.2 平面向量数量积的坐标表示、模、夹角	248
高手支招 1 细品教材	248
高手支招 2 基础整理	251
高手支招 3 综合探究	251
高手支招 4 典例精析	253
高手支招 5 思考发现	257
高手支招 6 体验成功	257
教材习题点拨	260
2.5 平面向量应用举例	264
高手支招 1 细品教材	264

高手支招 2 基础整理	265	高手支招 3 综合探究	311
高手支招 3 综合探究	266	高手支招 4 典例精析	312
高手支招 4 典例精析	267	高手支招 5 思考发现	316
高手支招 5 思考发现	273	高手支招 6 体验成功	317
高手支招 6 体验成功	273	教材习题点拨	320
教材习题点拨	278	3.1.3 二倍角的正弦、余弦、正切公式	321
本章总结	281	高手支招 1 细品教材	321
本章测试	287	高手支招 2 基础整理	323
教材习题点拨	292	高手支招 3 综合探究	324
第三章 三角恒等变换	296	高手支招 4 典例精析	325
走近学科思想	296	高手支招 5 思考发现	331
本章导读	297	高手支招 6 体验成功	332
3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式	298	教材习题点拨	335
3.1.1 两角差的余弦公式	298	3.2 简单的三角恒等变换	340
高手支招 1 细品教材	298	高手支招 1 细品教材	340
高手支招 2 基础整理	300	高手支招 2 基础整理	343
高手支招 3 综合探究	300	高手支招 3 综合探究	344
高手支招 4 典例精析	300	高手支招 4 典例精析	344
高手支招 5 思考发现	304	高手支招 5 思考发现	348
高手支招 6 体验成功	304	高手支招 6 体验成功	349
教材习题点拨	307	教材习题点拨	352
3.1.2 两角和与差的正弦、余弦、正切公式	308	本章总结	359
高手支招 1 细品教材	308	本章测试	363
高手支招 2 基础整理	310	教材习题点拨	369
		综合测试	377

第一章 三角函数



走近学科思想

ZOUJIN XUEKE SIXIANG

符号思想是数学从实际内容走向抽象化形式系统的关键思想. 符号思想的出现, 是人类知识史巨大飞跃的开端, 是数学成为理性科学的开始. 符号, 无论是采取何种形态(文字的、字母的、图形的还是其他任何约定记号的), 其思想实质是一样的, 即通过建立某种对应, 实现从感性到理性的认识转换. 表达形态的不同, 标志着抽象程度的差异(这种抽象程度的差异往往会导致数学发展水平的巨大鸿沟). 数学语言是一种抽象的符号语言, 符号的发展与进步的直接结果是抽象程度的提高, 从而导致数学日益走向形式化, 符号是这种形式化得以实现的基础. 可以说, 没有符号就没有数学, 三角学更是如此.



本章导读

ZHANGJIAN DUYAO

知识要点	重要指数	链接考题	学习策略
任意角的三角函数	★★★★	P ₃₄ 2(07 上海一模, 3) P ₅₆ 1(07 全国高考Ⅱ, 理 1) P ₁₃₀ 例 1(07 北京高考, 理 1) P ₁₃₁ 例 2(07 陕西高考, 理 4)	学习中要注意结合生活中的实例, 领会概念, 注重采取对比学习的方法, 注意角与平面直角坐标系的关系, 抓住角的终边位置“周而复始”的变化, 借助于信息技术, 使用单位圆和三角函数线将数、形结合起来, 始终利用定义研究三角的公式和结论



知识要点	重要指数	链接考题	学习策略
三角函数的图象与性质	★★ ★★	P_{81} , 4(07 江苏高考, 1) P_{110} , 例 6(07 福建高考, 理 5) P_{110} , 例 7(07 海南、宁夏高考, 理 3) P_{132} , 例 1(07 浙江高考, 理 2) P_{132} , 例 2(07 全国高考 II, 理 2) P_{132} , 例 3(07 安徽高考, 理 6)	要从两方面学习, 一方面是利用正弦函数的定义, 从理论上分析推导; 另一方面, 通过观察函数的图象, 亲身经历一个“看图”学习正、余弦函数性质的过程, 从图象的特征直观地获得函数的性质, 体现数形结合思想的应用. 要将三种三角函数的图象与性质对比学习
三角函数图象的平移	★★★★	P_{133} , 例 1(07 山东高考, 文 4) P_{134} , 例 2(07 湖北高考, 理 2)	正弦函数 $y = \sin x$ 的图象与性质是进行图象变换的基础. 关键是搞清函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中的 ω, φ 均是对 x 而言的. 在变换的过程中关键要看 x 变换了多少

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

在实际生活中, 许多地方都会涉及到角的概念, 如自行车轮子、螺丝扳手、曲轴连杆等, 在按不同方向旋转时都形成了不同的角, 挂在墙上的钟表、戴在手腕上的手表, 更是为我们展示了角的形象. 要准确地刻画角, 必须既知道旋转量, 又要知道旋转方向. 本节课我们对角的概念进行推广.



高手支招① 细品教材

一、正角、负角、零角

1. 一条射线的端点是 O , 它从初始位置 OA 旋转到终止位置 OB , 形成一个角 α , 点 O 是角 α 的顶点, 射线 OA 、 OB 分别是角 α 的始边、终边. 我们规定, 按逆时针方向旋转形成的角叫正角; 按顺时针方向旋转形成的角叫负角; 若射线没有作任何旋转, 形成的角叫零角, 这样就把角的概念推广到了任意角. 旋转一周的角的大小记为 360° , 如图 1-1-1.

引入正角、负角的概念后, 角的减法运算可以转化为角的加法运算, 即可以转化 $\alpha - \beta$ 为 $\alpha + (-\beta)$, 也就是说各角和的旋转量等于各角旋转量的和.

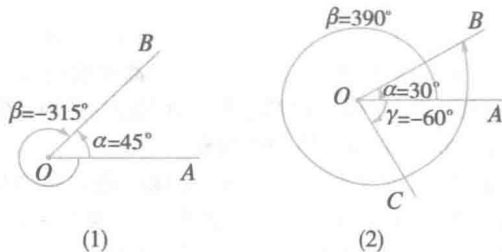


图 1-1-1

2. 由于图 1-1-1(1)中的 α 、 β 分别是按逆时针、顺时针方向旋转的, 所以 $\alpha = 45^\circ$, $\beta = -315^\circ$; 图 1-1-1(2)中的 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 390^\circ$, $\gamma = -60^\circ$. 显然角的大小与旋转的周数有关, 角的正负与旋转的方向有关. 在画图表示角时, 常用带箭头的弧来表示旋转的方向.

【示例】如图 1-1-2, 射线 OA 绕端点 O 旋转 90° 到射线 OB 的位置, 接着再旋转 -30° 到 OC 的位置, 试求 $\angle AOC$ 的度数.

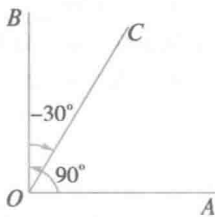


图 1-1-2

► 思路分析: 逆时针方向旋转角为正, 顺时针方向旋转角为负, 将两次旋转



所得的角求和即可.

►解: $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 90^\circ + (-30^\circ) = 60^\circ$.

二、象限角

1. 若把角的顶点与原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合, 那么, 角的终边(除顶点外)在第几象限, 我们说这个角是第几象限角.

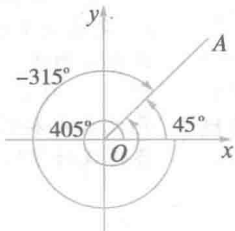


图 1-1-3

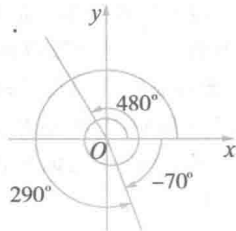


图 1-1-4

例如: 由于图 1-1-3 中的角 45° 、 405° 、 -315° 都是始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边落在第一象限的角, 所以它们都是第一象限角; 同理, 图 1-1-4 中的角 480° 是第二象限角, -70° 、 290° 都是第四象限角.

2. 表示各个象限角时, 可以先在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内确定角的界限, 然后再加上 360° 的整数倍, 如第一象限角, 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 第一象限角表示为 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 然后在两端加上 $k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, 即可得到第一象限角的集合: $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 其他各象限角同理可得.

3. 特别地, 如果角的终边在坐标轴上, 就认为这个角不属于任何一个象限. 例如, 0° 、 90° 、 -180° 、 630° 等, 因为它们的终边落在坐标轴上, 所以这些角都不属于任何一个象限, 我们称之为非象限角, 也叫象限界角. 与象限角的确定方法相同, 首先确定最小正角或最大负角, 再加 $k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$. 如终边落在 x 轴的负半轴上, 代表角为 180° , 所以终边落在 x 轴的负半轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$. 同理可得其他非象限角的集合.

►【示例】若 α 是第四象限角, $180^\circ - \alpha$ 为第 三 象限角.

►思路分析: 本题可以从数和形两种不同的角度作出判断, 由 α 是第四象限角, 知 $270^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 360^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), 由此可得 $-180^\circ - k \cdot 360^\circ < 180^\circ - \alpha < -90^\circ - k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$),

因此 $180^\circ - \alpha$ 是第三象限角.

答案: 三

三、与角 α 终边相同的角

1. 设 $S = \{\beta | \beta = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 显然, 所有与 45° 角终边相同的角都是集合 S 的元素; 反过来, 集合 S 中的任何一个元素也都与 45° 角的终边相同. 推广到一般形式有: 所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 即任意与角 α 终边相同的角, 都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

2. 利用与角 α 终边相同的角的集合, 可把任意角 β 转化成 $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ 的形式; 也可利用与角 α 终边相同的角化简终边落在过原点的某一条直线上的角的集合; 或利用与角 α 终边相同的角写出各象限角的集合.

【示例】在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间, 求出与下列各角终边相同的角, 并判定它们分别是哪一个象限的角.

(1) 909° ; (2) $-503^\circ 36'$.

► 思路分析: 将 909° 和 $-503^\circ 36'$ 分别表示成 $k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}$ 的形式, 其中 α 是在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内的角, α 在哪个象限, 原角就在哪个象限.

► 解: (1) 因为 $909^\circ = 189^\circ + 2 \times 360^\circ$, 所以 189° 即为所求的角, 它在第三象限, 从而 909° 也是第三象限角.

(2) 因为 $-503^\circ 36' = 216^\circ 24' - 2 \times 360^\circ$, 所以 $216^\circ 24'$ 即为所求的角, 它在第三象限, 故 $-503^\circ 36'$ 也是第三象限角.



高手支招② 基础整理

本小节主要叙述了角的定义, 什么是正角、负角和零角, 学会区分第几象限角, 理解终边相同的角的含义.





高手支招 ③ 综合探究

已知角 α 为第一象限角, 探求 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限.

已知角 α 的终边位置, 判断 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边位置常用的方法是先将已知角用不等式表示出来, 再求 $\frac{\alpha}{3}$ 的取值范围, 然后分类讨论来确定 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边位置, 具体分述如下:

因为 α 为第一象限角, 即 $k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$, 则 $\frac{k \cdot 360^\circ}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{k \cdot 360^\circ}{3} + 30^\circ, k \in \mathbb{Z}$, 当 $k=3n (n \in \mathbb{Z})$, $\frac{\alpha}{3}$ 为第一象限角; 当 $k=3n+1 (n \in \mathbb{Z})$, $\frac{\alpha}{3}$ 为第二象限角; 当 $k=3n+2 (n \in \mathbb{Z})$, $\frac{\alpha}{3}$ 为第三象限角. 所以 $\frac{\alpha}{3}$ 为第一、第二、第三象限角.



高手支招 ④ 典例精析

【例 1】射线 OA 绕端点 O 按逆时针方向旋转 150° 到 OB 位置, 接着再按顺时针方向旋转 60° 到 OC 位置, 然后再按逆时针方向旋转 90° 到 OD 位置, 求 $\angle AOD$ 的大小.

▶ 思路分析: 逆时针方向旋转 150° , 即 $+150^\circ$, 顺时针方向旋转 60° , 即 -60° , 再逆时针方向旋转 90° , 即 $+90^\circ$, 求和可得结论.

▶ 解: 如图 1-1-5, 由题意知 $\angle AOB = 150^\circ$, $\angle BOC = -60^\circ$, $\angle COD = 90^\circ$,

所以 $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 150^\circ - 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

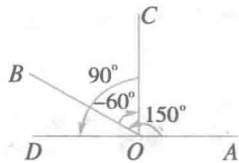


图 1-1-5

【例 2】如图 1-1-6, 写出终边落在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上的角的集合. (用 0° 到 360° 的角表示)

▶ 思路分析: 先在 0° 到 360° 之间找到两个角, 使得其终边分别与射线 $y = \sqrt{3}x (x \geq 0)$ 、 $y = \sqrt{3}x (x \leq 0)$ 重合, 再写出与其终边相同的角的集合, 最后求并集.

▶ 解: 终边落在 $y = \sqrt{3}x (x \geq 0)$ 上的角的集合是 $S_1 = \{\alpha | \alpha = 60^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

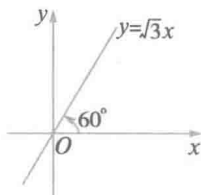


图 1-1-6

终边落在 $y=\sqrt{3}x(x\leq 0)$ 上的角的集合是 $S_2=\{\alpha|\alpha=240^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.

故终边落在 $y=\sqrt{3}x$ 上的角的集合是 $S=S_1\cup S_2=\{\alpha|\alpha=60^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=240^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=60^\circ+2k\cdot 180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=60^\circ+(2k+1)\cdot 180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.

$=\{\alpha|\alpha=60^\circ+n\cdot 180^\circ, n\in\mathbb{Z}\}$.

【例 3】试写出第二象限角的集合.

►思路分析:表示各个象限角时,可以先在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 范围内确定角的界限,然后再加上 360° 的整数倍.

►解:由于第二象限角位于 y 轴的非负半轴、 x 轴的非正半轴之间,而终边落在 y 轴的非负半轴、 x 轴的非正半轴上的角分别是 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$ 与 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$, 所以第二象限角的集合为 $\{\alpha|k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.

【例 4】判断下列命题是否正确,并说明理由.

①小于 90° 的角是锐角;②第一象限的角小于第二象限的角;③终边相同的角一定相等;④相等的角终边一定相同;⑤若 $\alpha\in[90^\circ, 180^\circ]$, 则 α 是第二象限角.

►思路分析:利用各种角的定义进行判断.

►解:①锐角集合是 $\{\alpha|0^\circ<\alpha<90^\circ\}$, 即 $\alpha\in(0^\circ, 90^\circ)$, 它是小于 90° 的正角, 而小于 90° 的角还可以是负角和零角, 显然①是错误的;②由于角的概念的推广, 第一、二象限的角不再局限于 $0^\circ\sim 360^\circ$ 间的 $(0^\circ, 90^\circ)$ 与 $(90^\circ, 180^\circ)$, 像 390° 是第一象限角, 120° 是第二象限角, 显然 $390^\circ>120^\circ$, 所以②也是错误的;③终边相同的角可能彼此相差 360° 的整数倍, 显然③是错误的;④由于角的顶点是原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 所以相等的角终边一定相同, 显然④是正确的;⑤由于 $90^\circ, 180^\circ$ 都不是象限角, 显然⑤是错误的.

【例 5】在角的集合 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 90^\circ+45^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$ 中,

(1)有几种终边不相同的角?

(2)有几个属于区间 $(-360^\circ, 360^\circ)$ 内的角?

►思路分析:从代数角度看, 取 $k=\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ 可以得 α 为 $\cdots, -135^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, \cdots$, 从图形角度看 $\alpha=k\cdot 90^\circ+45^\circ (k\in\mathbb{Z})$, 即以角 45° 为基础, 依次加上 90° 的整数倍, 即依次按顺时针方向或逆时针方向旋转 90° , 所得各角如图 1-1-7 所示.

►解:(1)在给定的角的集合中终边不相同的角共有四种.

(2)由 $-360^\circ<k\cdot 90^\circ+45^\circ<360^\circ$ 得 $-\frac{9}{2}<k<\frac{7}{2}$,

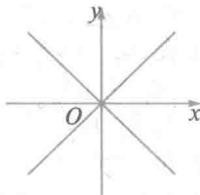


图 1-1-7



又 $k \in \mathbb{Z}$, 故 $k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

所以在给定的角的集合中属于区间 $(-360^\circ, 360^\circ)$ 的角共有 8 个.



高手支招 ⑤ 思考发现

1. 若过原点的直线 l 的倾斜角为 α , 则终边落在直线 l 上的角的集合是 $\{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$. 当 k 取偶数时, 表示终边落在直线 l 所在的上半平面部分; 当 k 取奇数时, 表示终边落在直线 l 所在的下半平面部分.

2. 象限角的表示形式并不唯一, 还可以有其他的表示形式, 如本题的第二象限角的集合, 也可以表达为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ - 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ - 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.



高手支招 ⑥ 体验成功

基础巩固

- 经过 2 个小时, 钟表上的时针旋转了 ()
A. 60° B. -60° C. 30° D. -30°
- 下列说法中, 正确的是 ()
A. 第二象限的角是钝角
B. 第二象限的角必大于第一象限的角
C. -150° 是第二象限角
D. $-252^\circ 16', 467^\circ 44', 1\ 187^\circ 44'$ 是终边相同的角
- 若角 α 的终边经过点 $P(-1, \sqrt{3})$, 则与角 α 终边相同的角的集合是 ... ()
A. $\{\alpha | \alpha = 135^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{\alpha | \alpha = 150^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
C. $\{\alpha | \alpha = 120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ D. $\{\alpha | \alpha = 240^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- 设 $A = \{\theta | \theta \text{ 为锐角}\}$, $B = \{\theta | \theta \text{ 为小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, $C = \{\theta | \theta \text{ 为第一象限角}\}$, $D = \{\theta | \theta \text{ 为小于 } 90^\circ \text{ 的正角}\}$, 则 ()
A. $A=B$ B. $B=C$ C. $A=C$ D. $A=D$
- 在 -720° 到 720° 之间与角 $-1\ 000^\circ$ 终边相同的角是_____.
- 与角 $-1\ 050^\circ$ 终边相同的最小正角是_____.
- 若 α 是第一象限角, 则 $-\alpha$ 是第_____象限角, $180^\circ - \alpha$ 是第_____象限角, $180^\circ + \alpha$ 是第_____象限角, $k \cdot 360^\circ - \alpha (k \in \mathbb{Z})$ 是第_____象限角.

综合应用

8. 已知角的顶点与坐标系的原点重合,始边与 x 轴的非负半轴重合,指出它们是哪个象限的角.

(1) 490° ; (2) -100° ; (3) 760° ; (4) -390° .

9. 与 -457° 终边相同的角的集合是 ()

A. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 457^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

B. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 97^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

C. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

答案与解析

1. B 思路分析: 钟表的时针旋转一周是 -360° , 其中每小时旋转 $\frac{-360^\circ}{12} = -30^\circ$, 所以经过 2 个小时应旋转 -60° .

2. D 思路分析: A 中第二象限的角的范围要比钝角的范围大得多, 除包含钝角以外, 还包含与钝角相差 $k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 的角及若干负角, 如 460° 是第二象限的角但不是钝角; 460° 是第二象限的角, 730° 是第一象限角, 显然 460° 小于 730° ; C 中 -150° 应为第三象限角, 故 A、B、C 都是错误的, D 中三个角终边相同, 所以正确.

3. C 思路分析: 如图 1-1-8, 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 在 $\text{Rt}\triangle PMO$ 中,

$$\because |OM| = 1, |MP| = \sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle POM = \frac{|PM|}{|OM|} = \sqrt{3}. \therefore \angle POM = 60^\circ.$$

$$\therefore \text{与角 } \alpha \text{ 终边相同的角的集合是 } \{\alpha | \alpha = 120^\circ + k \cdot$$

$$360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

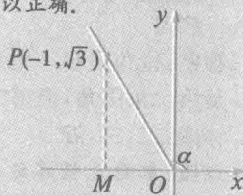


图 1-1-8

4. D 思路分析: $A = \{\theta | 0^\circ < \theta < 90^\circ\}$, $B = \{\theta | \theta < 90^\circ\}$, $C = \{\theta | k \cdot 360^\circ < \theta < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{\theta | 0^\circ < \theta < 90^\circ\}$, 显然 $A = D$.

5. $-640^\circ, -280^\circ, 80^\circ, 440^\circ$ 思路分析: 与角 $-1\ 000^\circ$ 终边相同的角的集合是 $S = \{\alpha | \alpha = -1\ 000^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, S 中适合 -720° 到 720° 之间的元素是: $-1\ 000^\circ + 1 \times 360^\circ = -640^\circ$, $-1\ 000^\circ + 2 \times 360^\circ = -280^\circ$, $-1\ 000^\circ + 3 \times 360^\circ = 80^\circ$, $-1\ 000^\circ + 4 \times 360^\circ = 440^\circ$.

6. 30° 思路分析: 由于 $-1\ 050^\circ = 30^\circ - 3 \times 360^\circ$, 所以与角 $-1\ 050^\circ$ 终边相同的最小正角是 30° .

7. 四 二 三 四 思路分析: 因为 α 是第一象限角, 所以 $-\alpha$ 的终边落在第四象限, 为第四象限角; $180^\circ - \alpha$ 的终边落在第二象限, 为第二象限角; $180^\circ + \alpha$ 的终边落在第三象限, 为第三象限角; $k \cdot 360^\circ - \alpha$ 与角 $-\alpha$ 的终边相同, 为第四象限角.

8. 解: (1) 第二象限角; (2) 第三象限角; (3) 第一象限角; (4) 第四象限角.

思路分析: 如图 1-1-9.

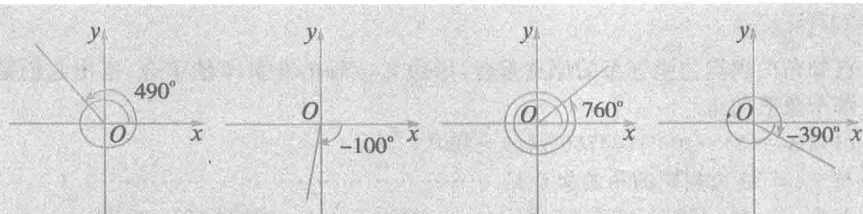


图 1-1-9

9. C 思路分析: 思路一: 本例可用特殊值法来研究. 当 $k = -2$ 时, 有 $-457^\circ = -2 \times 360^\circ + 263^\circ$;

思路二: 也可采用定义分析. 因为 -457° 角与 -97° 角终边相同, -97° 角与 263° 角终边相同, 所以 -457° 角与 263° 角终边相同.

思路三: 还可用排除法加以排除, 因为 -457° 角与 -97° 角终边相同, 容易排除 A、B、D.

教材习题点拨

P₅ 练习

1. 答案: 锐角是第一象限角, 但第一象限角不一定是锐角; 直角是非象限角; 钝角是第二象限角, 但第二象限角不一定是钝角.

2. 答案: 三, 三, 五.

点拨: 本题是将终边相同的角的符号表示应用到其他周期性问题, 即只需把与角 α 终边相同的角中的 360° 换成每个星期的天数 7 即可.

3. 答案: (1) 第一象限角; (2) 第四象限角; (3) 第二象限角; (4) 第三象限角.

如图 1-1-10.

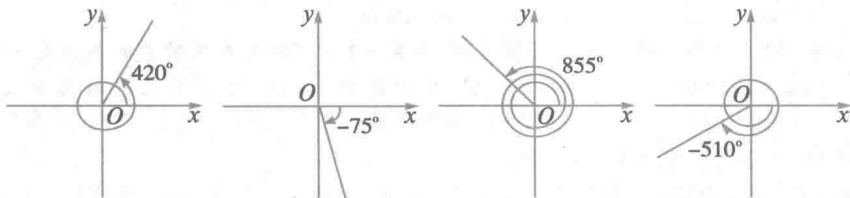


图 1-1-10

点拨: 先作出给定的角, 再判定是第几象限角.

4. 答案: (1) $-54^\circ 18' = 305^\circ 42' - 360^\circ$, 所以与角 $-54^\circ 18'$ 终边相同的角是 $305^\circ 42'$, 它是第四象限角;

(2) $395^\circ 8' = 35^\circ 8' + 360^\circ$, 所以与角 $395^\circ 8'$ 终边相同的角是 $35^\circ 8'$, 它是第一象限角;

(3) $-1190^{\circ}30' = 249^{\circ}30' - 4 \times 360^{\circ}$, 所以与角 $-1190^{\circ}30'$ 终边相同的角是 $249^{\circ}30'$, 它是第三象限角.

点拨: 在 $0^{\circ} \sim 360^{\circ}$ 的范围内, 找到与给定角终边相同的角, 再判断它所在的象限.

5. 答案: (1) $\{\beta | \beta = 1303^{\circ}18' + k \cdot 360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}$, $-496^{\circ}42'$, $-136^{\circ}42'$, $223^{\circ}18'$.

(2) $\{\beta | \beta = -225^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}$, -585° , -225° , 135° .

点拨: 先用集合的表示法和符号语言写出与指定角终边相同的角的集合, 再在给定的范围内找出与指定的角终边相同的角. 对于 k 的值, 可通过直接代入验证, 也可先构造不等式确定 k 的值, 再代入求角.

STS

三角学的起源

三角学之英文名称 Trigonometry, 约定名于公元 1600 年, 实际上源于希腊文 trigono(三角)和 metrein(测量), 其原义为三角形测量(解法), 以研究平面三角形和球面三角形的边和角的关系为基础, 达到测量上的应用为目的的一门学科. 早期的三角学是天文学的一部分, 天文学的发生是由于编制历法的需要. 而历法对于农业和畜牧业都是极其重要的. 后来研究范围逐渐扩大, 变成以三角函数为主要对象的学科. 现在, 三角学的研究范围已不仅限于三角形, 而且成为数理分析之基础, 研究实用科学所必需之工具.

我国古代的天文学很发达, 很早就有了测量方面的知识. 在公元前一世纪左右的数学书《周髀算经》里, 已经有了关于平面测量术的记载. 公元三世纪我国数学家刘徽计算以单位长 1 为半径的圆内接正六边形、正十二边形等的边长, 以及公元十三世纪赵友钦计算圆内接正四边形等的边长, 实际上已经求得了某些特殊角的正弦值. 我国古代历法中计算由于节令不同而引起的“表”(就是“竿”)的影长不同, 实际上也已经构成了一个余切函数表. 现在我们所用的三角函数的名称正弦、余弦、正切、余切、正割、余割, 都是十六世纪我国已有的名称. 三角学传入我国, 开始于明朝, 这一年, 邓玉函、汤若望、徐光启编译了《大测》, 这是第一部中文版的三角学. 后来徐光启等人又编译了《测量全义》(1631 年 8 月), 其中有平面三角和球面三角的论述. 十八世纪后, 我国还出版了不少三角学方面的书籍.

$$\begin{cases} 25 = 10a + 10b + c \\ 36 = 14a + 24b + c \end{cases}$$

$$\text{第 11} = 176a + 45b$$