



普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础丛书

线性代数与线性规划

邹庭荣 胡动刚 李 燕 主编

$A(1,1)$

$B(5,1)$



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础丛书

线性代数与线性规划

邹庭荣 胡动刚 李 燕 主 编

科学出版社

北 京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

内 容 提 要

本书是教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践立项课题(2007—143)”之“新世纪农林院校大学数学教学规范(教学基本要求)的研究与实践”项目的研究成果,该书根据新的教学基本要求,结合作者多年教学经验并按照继承、发展与改革的精神编写而成,是集体智慧的结晶。

本书内容共分八章,包括:行列式;矩阵及其应用;线性空间与线性变换;线性方程组;相似矩阵与二次型的化简;线性规划问题;线性规划问题的进一步讨论;线性代数应用举例等。

与现行同类教材相比,本书的特点是:突出矩阵方法;侧重线性代数的应用,并从实际例子出发,引出线性代数的一些基本概念、基本理论和方法;注重与中学知识的衔接,许多知识用附录呈现,使其自成体系,结果严谨;例题丰富,通俗易懂,难点分散,便于自学;尤其注重数学思想与数学文化的渗透;也适当参考了近年来考研数学大纲。

本书可供工科和管理类专业学生使用,也可供其他相关专业的师生选用和参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与线性规划/邹庭荣,胡动刚,李翔主编. —北京:科学出版社,2015.6

(经济数学基础丛书)

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-044641-1



I. ①线… II. ①邹… ②胡… ③李… III. ①线性代数—高等学校—教材
②线性规划—高等学校—教材 IV. ①O151.2②O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 124547 号

责任编辑:王雨舸 / 责任校对:董艳辉

责任印制:高 嵘 / 封面设计:蓝 正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787*1092 1/16

2015 年 8 月第 一 版 印张:13 1/2

2015 年 8 月第一次印刷 字数:303 000

定价:32.50 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础丛书

《线性代数与线性规划》编委会

主 编 邹庭荣 胡动刚 李 燕

副主编 任兴龙 沈婧芳 文凤春 孙玲琍

编 委 (按姓氏笔画排序)

文凤春 孙玲琍 任兴龙 李 燕 李淑华 邹庭荣
沈婧芳 张英豪 胡动刚 曹春云 谢 戟 谭劲英

前 言

线性代数是一门将理论、应用和计算融合起来的完美课程,随着计算机的普遍使用以及计算机功能的不断增加,线性代数在实际应用中的重要性也在不断提高,在现代社会中,线性代数是实际应用最广泛的大学数学基础课程,线性规划问题是许多高等学校经济管理专业的必学内容之一,但由于教学时数的原因,线性规划又难以独立开设,尤其是一直以来也没有一本适当介绍线性规划问题的教材,所以,许多学校干脆就不开设.因此,为了弥补这些不足,我们结合教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践”课题对这一问题进行了深入研究,并在许多同行建议下,编写了《线性代数与线性规划》,所以,本书是教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践”课题的成果之一,可作为高等学校经济管理专业本科生教材,也可供工科各相关专业的师生选用和参考.

本书的特点是将线性代数、线性规划融为一体,以线性代数为主题,适当介绍线性规划问题,方便相关专业选用和扩充.本书内容共分八章,包括行列式、矩阵及其应用、线性空间与线性变换、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性规划问题、线性规划问题的进一步讨论、线性代数的应用举例等.内容的编排上力求概念的自然导入,内容循序渐进、由浅入深,选学内容以*号标记;在体现线性代数、线性规划完美性的基础上,该教材具有以下特点.

1. 以“三用”为原则

(1) 够用 删去了传统教材中实用性不强和较深的一些内容,保留经济管理学科各专业必须作为基础的内容,达到满足其需要的最大限度,够用即可.

(2) 管用 增添必须的以往传统教材中没有的知识内容,尤其注重大学数学在经济管理科学中的应用的内容,达到管用的效果.

(3) 会用 淡化传统教材偏重理论的思想,强调数学知识的应用,力求学以致用,学后会用,增强学生学习数学的信心与兴趣.

2. 以“两凸显”为特色

(1) 凸显数学文化思想 将数学文化贯穿教材的全过程,在每一章结束时,都以阅读与思考的形式有机地介绍一些有趣的数学故事及有影响力的数学家轶事,让学生在寓教于乐中学习数学知识,同时培养学生崇尚数学、崇尚科学的意志品质.

(2) 凸显数学的应用 全过程体现了不仅教会学生学习数学知识,更注重教会学生使用数学的能力.突出矩阵方法,注重基本概念的实际背景,引出线性代数的一些基本概念、基本理论和方法;尤其注重理论知识的实际应用,特别是将“线性代数的应用”单独成章,供学生阅读之用,这是本书的一个重要特色.

在内容叙述上,注重与中学知识的衔接;在计算方面,突出了矩阵初等变换的作用;全书结构严谨,例题丰富,通俗易懂,难点分散,层次分明,取材合理,深度适宜,份量得当.尤其结合近年来,许多中学数学知识并未在中学讲解,给大学数学的教学带来衔接上的困难,为了弥补这些不足和分层次学习的需要以及为了使其自成体系、方便读者阅读,将这

些知识作为附录给出. 这些附录包括: 线性方程组的加减消元法; 数学归纳法; 连加号与连乘号; 多项式理论初步; 数的扩充等. 这也是本书的一个特色.

学习线性代数、线性规划的关键是理解和掌握它的基本理论和方法, 并在理论指导下通过分析去完成或解决实际问题, 因此, 本书各章末都配有适量的习题, 其中补充题是供学有余力的同学提高用的, 希望读者通过这些系统的训练, 巩固和掌握所学的知识. 同时提醒读者, 不要过分依赖书后的习题参考答案, 做题时不要轻易放过独立思考的机会.

本书第 1—3 章由邹庭荣、沈婧芳、谢戟、谭劲英编写; 第 4—5 章由李燕、孙玲俐、文凤春、曹春云编写; 第 6—7 章由胡动刚、任兴龙编写; 第 8 章由邹庭荣、李淑华、张英豪编写; 阅读材料、习题及答案、附录由邹庭荣、胡动刚编写.

本书的编写得到华中农业大学教务处肖湘平副处长和理学院吴承春副院长的关心和支持. 在此一并表示忠心感谢!

虽然各位编者十分努力, 但由于我们水平所限, 成书时间又较仓促, 书中的缺点、错误与不妥之处在所难免, 恳请广大师生和读者批评指正.

编 者

2015 年 5 月

目 录

第一章 行列式	1
第一节 行列式的概念	1
一、二阶与三阶行列式	1
二、排列及其逆序数	3
三、 n 阶行列式	6
第二节 行列式的性质	7
第三节 行列式按行(列)展开法则	11
第四节 拉普拉斯定理·行列式乘法规则(简介)	16
第五节 克拉默法则	18
一、克拉默法则	18
二、齐次线性方程组	20
阅读与思考 行列式及其应用	21
习题一	22
补充题	24
第二章 矩阵及其应用	26
第一节 n 维向量的基本概念和线性运算	26
一、 n 维向量的概念	26
二、 n 维向量的线性运算	27
第二节 矩阵的概念与运算	31
一、矩阵的概念	31
二、矩阵的线性运算	34
三、矩阵与矩阵相乘	36
第三节 方阵的行列式及其逆矩阵	40
一、方阵的行列式	40
二、逆矩阵	41
第四节 矩阵的分块	48
一、矩阵的分块	48
二、分块矩阵的运算	49
三、分块对角矩阵与分块三角阵	51
第五节 向量组的线性相关性	55
第六节 矩阵的初等变换与初等矩阵	61

一、矩阵的初等变换	61
二、初等矩阵	61
第七节 用初等变换方法求逆矩阵	69
第八节 向量组的正交化	71
阅读与思考 费马大定理是怎么证明的	73
习题二	75
补充题	77
* 第三章 线性空间与线性变换	79
第一节 线性空间	79
一、线性空间的基本概念	79
二、子空间及其充要条件	81
三、向量空间的基、维数与坐标	82
四、向量空间的坐标	84
五、基变换与坐标变换	85
第二节 线性变换	88
一、线性变换的概念	88
二、线性变换的性质	90
三、线性变换在给定基下的矩阵	90
四、线性变换在不同基下的矩阵	91
* 习题三	92
第四章 线性方程组	94
第一节 高斯消元法	94
第二节 齐次线性方程组解的结构	101
第三节 非齐次线性方程组解的结构	108
阅读与思考 华罗庚与联立线性方程组	110
习题四	113
补充题	114
第五章 相似矩阵与二次型的化简	116
第一节 方阵的特征值与特征向量	116
一、引例——“农业经济”发展与环保	116
二、特征值与特征向量的概念	116
三、特征值与特征向量的性质	119
第二节 相似矩阵与矩阵的对角化	121
第三节 二次型与二次型的化简	125

第四节 正交变换与二次型的标准形	126
一、线性变换	127
二、实对称阵的相似对角化	129
第五节 化二次型为标准形	131
第六节 惯性定律与正定二次型	138
一、惯性定律	138
二、正定二次型	138
阅读与思考 李氏恒等式	140
习题五	141
补充题	142
第六章 线性规划问题	144
第一节 线性规划问题简介	144
一、线性规划问题举例	144
二、线性规划问题的数学模型	146
三、线性规划问题与 LINGO 软件	146
第二节 线性规划问题的图解法	148
一、线性规划问题的图解法	148
二、线性规划问题解的性质	151
第三节 线性规划问题的基及其典式理论	151
一、线性规划问题的标准形式	151
二、基及其典式	153
三、单纯形法简介	155
第四节 线性规划在土方调配中的应用	156
一、土方调配问题介绍	156
二、土方调配的线性规划模型	156
三、线性规划在土方调配中的应用实例	157
习题六	158
第七章 线性规划问题的进一步讨论	160
第一节 灵敏度分析	160
一、灵敏度分析的引入	160
二、目标函数系数 c_j 的灵敏度分析	160
三、约束方程右端项的灵敏度分析	162
四、灵敏度分析的几何解释	162
第二节 对偶线性规划	163
一、对偶线性规划	163

二、影子价格及其应用	165
三、影子价格的应用	166
习题七	169
第八章 线性代数应用举例	170
第一节 行列式应用举例	170
第二节 矩阵应用举例	170
第三节 线性方程组应用举例	172
第四节 特征值与特征向量应用举例	173
附录 1 线性方程组的加减消元法	180
附录 2 数学归纳法	183
附录 3 连加号 Σ 与连乘号 Π	187
附录 4 多项式理论初步	190
附录 5 数的扩充	195
附录 6 习题参考答案	198

第一章 行列式

行列式是在对线性方程组的研究中开发出来的一种重要的工具. 正是这个工具, 使得由 n 个方程组成的 n 元线性方程组的解以及其完美的形式展现于读者面前, 行列式还有超越线性方程组的更为广泛的应用. 本章首先引进二阶、三阶行列式的概念, 在此基础上通过对 n 元排列的研究给出 n 阶行列式的一般概念, 进而介绍行列式的性质, 计算以及用行列式求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

第一节 行列式的概念

一、二阶与三阶行列式

解方程是代数中一个基本问题, 在中学我们学过一元、二元、三元以至四元一次线性方程组. 在解线性方程组时, 我们曾用代入消元法和加减消元法来解线性方程组. 例如, 对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中 x_1, x_2 是未知量, 下面用中学学过的消元法求它的解.

利用加减消元法, 为消去 x_2 , 用 a_{22} , $-a_{12}$ 分别乘第一、二个方程的两边, 然后相加, 就得到消去 x_2 后的方程

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \quad (2)$$

用类似的方法可得到消去 x_1 后的方程

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \quad (3)$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 由(2)、(3)可得方程组的解

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (4)$$

为了找出解的表达式(4)的规律, 便于推广, 引进下述记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (5)$$

表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称这个记号为二阶行列式. 构成二阶行列式的 4 个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的元素, 横的各排称为行, 纵的各排称为列. 元素 a_{ij} 的下标 i 表示它在行列式的第 i 行, 称为元素 a_{ij} 的行下标 (或行标); 下标 j 表示 a_{ij} 在行列式的第 j 列, 称为列下标 (或列标). 行列式通常用大写字母 D 表示.

线性方程组(1)的系数构成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (6)$$

也称为方程组(1)的系数行列式.

根据二阶行列式的定义,方程组(1)的解(4)中, x_1, x_2 的表达式的分子可分别写成下面的行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \quad (7)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \quad (8)$$

因而当方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$ 时,它的解可以写成两个行列式的商的形式

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad (9)$$

用行列式表示方程组(1)的解,我们很容易发现其规律性:分母都是方程组的系数行列式; x_1 的分子是将系数行列式 D 中 x_1 对应的列换成常数项后得到的行列式, x_2 的分子是将系数行列式 D 中 x_2 对应的列换成常数项后得到的行列式.

对于三元线性方程组有相仿的结论.设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

称符号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (10)$$

为三阶行列式,它定义为其元素的下列代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (*)$$

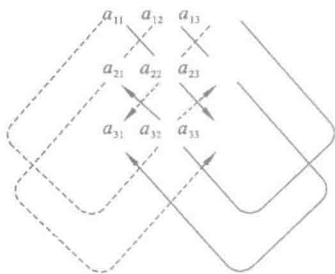


图 1-1

三阶行列式的值仍可由对角线法则来记忆.以 D 为例,由式(*)可见, D 由 6 项构成,每一项均为行列式 D 的不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号,其规律如图 1-1 所示.图中的 3 条实线平行于主对角线,实线上 3 个元素之积冠以正号;3 条虚线平行于副对角线,虚线上三元素之积冠以负号.

例 1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$.

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 4 \times 2 + (-3) \times (-3) \times (-3) + 7 \times 7 \times 2 - 7 \times 4 \times (-3) - (-3) \times 2 \times 2 - 1 \times 7 \times (-3) \\ = 196$$

当三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,上述三元线性方程组有唯一解,解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

此为求解三元线性方程组的克拉默法则.

前面我们利用二、三阶行列式给出了求解二元、三元线性方程组的克拉默法则. 克拉默法则同样适用于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组, 此时, 需要计算 n 阶行列式. 而用于计算二、三阶行列式的对角线法, 对于高于三阶的行列式就不再适用了. 为此, 我们给出 n 阶行列式的一般算法.

由式(*)可见:

- (1) 三阶行列式展开式的每一项都是其位于不同行不同列的 3 个元素之积;
- (2) 展开式共有 6 项, 每一项的 3 个元素的行下标按自然顺序排列时, 其列下标都是 1, 2, 3 的某个排列. 1, 2, 3 的全排列共有 6 种, 每一排列分别对应着展开式的一个项;
- (3) 展开式 6 个项的符号各有三正三负. 带正号的 3 项列下标的排列分别为 (123), (312), (231), 它们都是自然排列 123 中的任意两个数经零次或二次(偶数次)对换得到的; 而带负号的 3 项的列下标是自然排列 123 中的任意两个数经一次(奇数次)对换得到的. 也就是说, 行列式展开式的每一项的符号与排列的对换次数(奇数次或偶数次)有关.

为了阐明 n 阶行列式展开项的符号规律, 下面引入逆序数的概念.

二、排列及其逆序数

1. 排列及其逆序数

定义 1 由 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个无重复的有序数组称为这 n 个数码的一个排列, 简称为 n 元排列.

例如, 312 是一个 3 元排列, 2341 是一个 4 元排列, 45321 是一个 5 元排列等.

显然 $1\ 2\ \dots\ n$ 也是一个 n 级排列, 这个排列具有自然顺序, 就是按递增的顺序排起来的; 其他的排列或多或少地已改变了自然顺序.

定义 2 在一个 n 元排列中, 如果有一个较大的数码排在一个较小的数码前面, 则称这两个数码在这个排列中构成一个逆(反)序, 一个 n 元排列中所有逆(反)序的总和称为这个排列的逆(反)序数, 记为 $\tau(j_1 j_2 \dots j_n)$ 或 $\pi(j_1 j_2 \dots j_n)$.

设在一个 n 级排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ 中, 比 j_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 大的且排在 j_k 前面的数有 t_k 个,

则这个排列的逆序数为 $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{k=1}^n t_k$.

例如 $\tau(321) = 2 + 1 = 3$

$$\tau(3241) = 3 + 1 = 4$$

$$\tau(45321) = 4 + 3 + 2 = 9$$

$$\tau(634521) = 5 + 4 + 1 + 1 + 1 = 12$$

$$\tau(1726354) = 0 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$$

这是计算一个 n 元排列的反序数的一般方法.

2. 排列的奇偶性

定义 3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**;逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例 2 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

$$(1) 35214 \quad (2) n(n-1)\cdots 21$$

解 由逆序数的定义,任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1 \text{ 后面比 } i_1 \text{ 小的数的个数} + i_2 \text{ 后面比 } i_2 \text{ 小的数的个数} \\ + \cdots + i_{n-1} \text{ 后面比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

$$(1) \tau(35214) = 2 + 3 + 1 + 0 = 6, 35214 \text{ 为偶排列};$$

$$(2) \tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

而 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性需由 n 而定,讨论如下:

当 $n = 4k$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 是偶数;

当 $n = 4k+1$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 是偶数;

当 $n = 4k+2$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 是奇数;

当 $n = 4k+3$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ 是奇数.

所以,当 $n = 4k, n = 4k+1$ 时,此排列为偶排列;当 $n = 4k+2, n = 4k+3$ 时,此排列为奇排列.

在一个 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中,仅将其中两个数字 j_i, j_k 对调而其余数字不动,这样一次对调称为一个**对换**,记为 (j_i, j_k) . 当 $k = i \pm 1$,即排列中两个相邻的数字的对换称为**相邻对换**.

例如, $341625 \xrightarrow{(1,5)} 345621$.

问题 1 任意两个 n 元排列是否可经一系列对换而互变?

引理 1 任意一个 n 元排列可经一系列对换变为自然排列 $12\cdots n$.

证 (用归纳法)

1. 当 $n = 2$ 时,结论显然成立.

2. 假设结论对 $n-1$ 元排列成立,

(1) 对任一个 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$, 假如 $j_n = n$, 则由归纳假设知 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ 可经一系列对换变为 $12 \cdots (n-1)$. 于是经同样一系列的对换, $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n$ 变为 $12 \cdots (n-1) n$;

(2) 假如 $j_n \neq n$, 设 $j_k = n$ ($1 \leq k \leq n-1$), 于是经一次对换 (j_k, j_n) , 得

$$j_1 \cdots j_k \cdots j_n \xrightarrow{(j_k, j_n)} j_1 \cdots j_n \cdots n$$

由(1)知, 经一系列对换可把 $j_1 \cdots j_n \cdots n$ 变为 $12 \cdots n$. 因而 $j_1 \cdots j_k \cdots j_n$ 可经一系列变换变为 $12 \cdots n$.

由于对换是可逆的, 因此有:

推论 1 自然排列 $12 \cdots n$ 可经一系列对换变到任意一个 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$.

由引理 1 和推论 1, 我们圆满地解决了上面提出的问题 1, 这就是:

推论 2 任意两个 n 元排列可经一系列对换互化.

定理 1 对换改变排列的奇偶性. 也就是说, 经过一次对换, 奇排列变成偶排列, 偶排列变成奇排列.

证 先看对换的两个数码 j, k 在排列中是相邻位置的情形. 设此排列为

$$\cdots jk \cdots$$

经对换 (j, k) 变为

$$\cdots kj \cdots$$

这里“ $\cdots$ ”表示那些不动的数码. 于是, 若 $k < j$, 则 $\tau(\cdots kj \cdots) = \tau(\cdots jk \cdots) - 1$; 若 $k > j$, 则

$$\tau(\cdots kj \cdots) = \tau(\cdots jk \cdots) + 1$$

因此, 这种特殊情况下定理 1 成立.

一般情形, 设排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_t k \cdots \quad (11)$$

经对换 (j, k) 变为

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_t j \cdots \quad (12)$$

为将(11)变为(12), 可先对(11)施行相邻位置的 j 与 i_1 对换, 然后 j 与 i_2 对换, $\cdots$, j 与 k 对换, 共经过 $t+1$ 次对换后变为

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_t k j \cdots \quad (13)$$

再对(13)施行相邻位置的 k 与 i_t 对换, k 与 i_{t-1} 对换, $\cdots$, k 与 i_1 对换, 共 t 次对换后便变为(12). 由上所述, 由于每次这样的对换都改变排列的奇偶性, 因而 $2t+1$ 次对换将(11)变为(12), 它们有互异的奇偶性. 定理成立.

问题 2 在全体 n 元排列中, 究竟是奇排列多还是偶排列多?

一般说来, 在 n 个数码的全排列中, 奇偶排列各占一半, 这就是下面的

推论 3 在全部 n 级排列中, 奇、偶排列的个数相等, 各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证 设奇排列个数为 k , 偶排列个数为 m , 则 $k+m=n!$. 又调换每个奇排列的前两个元素的位置, 则由定理 1 知道它们都变为偶排列, 且易知不同的奇排列经一次相同位置的对换后变为不同的偶排列, 因此 $k \leq m$. 同理可证 $m \leq k$, 故 $k=m=n!/2$.

结合推论 2, 类似地, 还可以证明:

定理 2 任意一个 n 级排列与排列 $12 \cdots n$ 都可以经过一系列对换互变, 并且所作对换

的个数与这个排列有相同的奇偶性.

三、 n 阶行列式

在给出 n 阶行列式的定义之前, 再来看一下二阶和三阶行列式的定义. 以三阶行列式为例(二阶同样) 由前面式(10) 知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ = \sum_{i_1 i_2 i_3} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$$

从三阶行列式的定义可以看出, 它们是一些乘积的代数和, 而每一项乘积都是由行列式中位于不同行不同列的元素构成, 这种可能的乘积共有 $n!$ 项. 另一方面, 每一项乘积都带有符号. 该符号是按什么原则确定的呢? 在三阶行列式(10) 中, 项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \quad (14)$$

其中 $j_1 j_2 j_3$ 是 $1, 2, 3$ 的一个排列. 可以看出, 当 $j_1 j_2 j_3$ 是偶排列时, 对应的项在三阶行列式的定义中带有正号, 当 $j_1 j_2 j_3$ 是奇排列时带有负号.

定义 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (15)$$

称为 n 阶行列式, 它表示代数和 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (16)$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

显然, 行列式的项

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (17)$$

为取自不同行不同列的 n 个元素的乘积; 每一项都按下面规则带有符号: 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 带正号, 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 带负号; 对于 $1, 2, \cdots, n$ 的每一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$, 都对应一项, 所以式(16) 共有 $n!$ 项.

定义 4 实际上是按乘积中元素的行标为自然排列来定义行列式, 同样地, 可以按列标为自然排列定义行列式.

定义 4'

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \quad (18)$$

可以证明,这两个定义是等价的.

特别地,当 $n = 1$ 时,规定一阶行列式 $|a| = a$.

例 3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (19)$$

解 在 n 阶行列式 D 的 $n!$ 个项中,考虑行列式可能的非零项. 由于行列式的每一项皆为行列式中位于不同行不同列的 n 个元素之积,因此行列式中的非零项必为 n 个非零元素的乘积. 在行列式的第一行中,仅有 a_{11} 可能不为零,所以在式(16)中, a_{1j_1} 只能取 a_{11} , 而 a_{2j_2} 只能取 a_{22} , 不能取 a_{21} , 这是因为 a_{21} 与 a_{11} 同列. 同理 a_{3j_3} 也只能取 a_{33} , $\cdots$, 依次推理,最后一行只能选 a_{nn} , 从而

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

同理可得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

若行列式主对角线上方的元素全为零,则称之为下三角行列式(主对角线下方的元素全为零的行列式,称为上三角行列式). 由上述讨论知,上、下三角行列式的值都等于对角线元素的乘积.

特别地,主对角线以外元素全为零的行列式(称为对角行列式)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

例 4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由于行列式中 4 个不同行不同列的非零数之积只有 $1 \times 2 \times 3 \times 4$, 而这作为行列式的项,元素已经按照行下标自然顺序排好,它的列下标排列是(4321),这是一个偶排列,故这一项带正号. 所以,此行列式的值为 $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

第二节 行列式的性质

对于一般的行列式,若用行列式的定义计算 n 阶行列式,需要计算 $n!$ 个乘积项,这显然比较麻烦. 为此,下面研究行列式的性质,利用这些性质可以简化行列式的计算.