河南省“十二五”普通高等教育规划教材

# 应用数学

（第二版·上册）

主　编　孙振营　夏云青
副主编　梁银双　焦慧平


中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

河南省“十二五”普通高等教育规划教材

# 应用数学（第二版·上册）

主　编　孙振营　夏云青

副主编　梁银双　焦慧平

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

## 内 容 提 要

本套教材分为上、下两册。应用数学（第二版·上册）涵盖了函数与极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程等内容。应用数学（第二版·下册）涵盖了向量与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、数学软件包等内容。书后附有初等数学常用公式、节后练习题、章后总习题参考答案及提示供读者参考。

本套教材适用于高职高专院校、成人高校工科类及经管类各专业，也可作为相关技术人员和其他大专类学生学习的教材或参考书。

**本书配有电子教案，读者可以从中国水利水电出版社网站和万水书苑上下载，网址为：http://www.waterpub.com.cn/softdown/和http://www.wsbookshow.com。**


图书在版编目（CIP）数据

应用数学. 上册 / 孙振营，夏云青主编. -- 2版. -- 北京：中国水利水电出版社，2015.8
河南省"十二五"普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-5170-3597-8

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①孙… ②夏… Ⅲ. ①应用数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第200884号

策划编辑：石永峰　向辉　责任编辑：张玉玲　加工编辑：郑秀芹　封面设计：李佳

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 河南省"十二五"普通高等教育规划教材<br>应用数学（第二版·上册） |
| 作　　者 | 主　编　孙振营　夏云青<br>副主编　梁银双　焦慧平 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>（北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038）<br>网址：www.waterpub.com.cn<br>E-mail：mchannel@263.net（万水）<br>sales@waterpub.com.cn<br>电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水） |
| 经　　售 | 北京科水图书销售中心（零售）<br>电话：（010）88383994、63202643、68545874<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 北京万水电子信息有限公司 |
| 印　　刷 | 北京正合鼎业印刷技术有限公司 |
| 规　　格 | 170mm×227mm　16开本　13.75印张　270千字 |
| 版　　次 | 2010年9月第1版　2010年9月第1次印刷<br>2015年8月第2版　2015年8月第1次印刷 |
| 印　　数 | 0001—3000册 |
| 定　　价 | 24.00元 |

# 前　　言

数学能启迪人们思维、推进科学纵深发展。很少人能认识到当今被过多称颂的“高技术”本质上是数学技术，数学化是诸多领域和项目背后的推动力。但由于数学的深刻性、抽象性和严谨性等学科特点，造成学生在学习过程中有很多困难。

因此，为了更好更轻松地学习和应用数学，也为了更好地适应当前我国高等教育的发展、满足社会对高校应用型人才培养的各类要求、贯彻教育部组织制定的高职高专教育基础课程教育基本要求的核心思想，在认真总结高职高专高等数学教学改革经验的基础上，结合编者的教学实践经验和同类教材发展趋势编写了此书。本套教材在 2013 年入选了第一批河南省“十二五”普通高等教育规划教材，2015 年修订后通过评审委员会验收。

本书遵循高职高专教育的教学规律，本着重能力、重素质、求创新的总体思路，强化概念，淡化严格论证，注重应用，充分体现“以应用为目的，以必需够用为度”的原则。编写内容侧重对学生数学思维能力的培养，注意其中问题的提出、引入，具有结构严谨、逻辑清晰、叙述得当、题量适中、便于自学等特点，全书通俗易懂、简明扼要，具有科普特色。

本套书有以下特点：

（1）相对于传统的高等数学内容，在兼顾内容完整性的基础上本教材对各章内容进行了适当的增删与修改，突出直观性和应用性。对难度较大的部分基础理论，考虑到教学目标和学生学习的特点，一般不做论证和推导，只叙述定理，做简单说明。

（2）为了更贴近社会、贴近生活、贴近应用，本书精选了社会活动、物理工程和经济管理方面的典型例题或案例，进一步强调本学科的实际应用，激发学生的学习兴趣。

（3）加强对基本概念、理论的理解和应用，借助几何图形和实际问题强化了概念和定理的直观性，对常用公式及方法汇总成表格的形式，以便对照记忆和查阅，注重与中学知识的衔接，培养学生的逻辑思维能力。

（4）注重基本运算技能的训练，但不过分追求复杂的计算和变换技巧。每节都配有针对性较强但难度不大的练习题，每章最后又都配有比较综合的复习题，以提高读者对所学知识的综合运用能力和解决实际问题的能力。

（5）为了突出重点、解释难点，在相应的地方给出了相应的注释。

（6）每章前列有学习目标，及时指出知识的要点和大纲要求，使读者提前了解各章内容，便于自学和把握本章的重点和难点。

（7）为了培养学生运用计算机进行数学运算的兴趣和能力，在本套书的最后

一章特别编写了数学软件包 Matlab 这部分知识。

本套书分为上、下两册，参考学时为 144 学时，教师在使用本套书时可根据教学实际需求灵活掌握。

上册书由孙振营、夏云青任主编，梁银双、焦慧平任副主编。编写分工如下：第二、七章由孙振营编写；第一、六章由夏云青编写；第三、四章由梁银双编写；第五章、附录及答案由焦慧平编写。全书框架结构安排、统稿和定稿由孙振营承担。

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

2015 年 5 月

# 目　　录

前言
第 1 章　函数、极限与连续 ........ 1
1.1　函数 ........ 1
1.1.1　集合、区间与邻域 ........ 1
1.1.2　函数的概念 ........ 4
1.1.3　函数的几种特性 ........ 6
1.1.4　反函数与复合函数 ........ 8
1.1.5　初等函数 ........ 10
练习题 1.1 ........ 13
1.2　极限 ........ 15
1.2.1　数列的极限 ........ 15
1.2.2　函数的极限 ........ 17
1.2.3　无穷小与无穷大 ........ 21
练习题 1.2 ........ 24
1.3　极限的运算 ........ 25
1.3.1　极限的运算法则 ........ 25
1.3.2　极限存在准则与两个重要极限 ........ 28
1.3.3　无穷小的比较 ........ 33
练习题 1.3 ........ 35
1.4　函数的连续性与间断点 ........ 36
1.4.1　函数的连续性 ........ 36
1.4.2　函数的间断点及其类型 ........ 39
1.4.3　初等函数的连续性 ........ 40
1.4.4　闭区间上连续函数的性质 ........ 42
练习题 1.4 ........ 43
习题一 ........ 44
第 2 章　导数与微分 ........ 47
2.1　导数的概念 ........ 47
2.1.1　引例 ........ 47
2.1.2　导数的定义 ........ 49
练习题 2.1 ........ 54
2.2　导数基本运算法则 ........ 54

2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 ........ 54
2.2.2 复合函数的求导法则 ........ 56
2.2.3 反函数的求导法则 ........ 58
2.2.4 初等函数的导数 ........ 60
练习题 2.2 ........ 61
2.3 高阶导数 ........ 62
练习题 2.3 ........ 63
2.4 隐函数的导数和由参数方程所确定的函数的导数 ........ 64
2.4.1 隐函数的导数 ........ 64
2.4.2 由参数方程所确定的函数的求导 ........ 65
练习题 2.4 ........ 67
2.5 函数的微分 ........ 67
2.5.1 微分的定义 ........ 68
2.5.2 微分的几何意义 ........ 69
2.5.3 基本初等函数的微分公式与微分运算法则 ........ 70
2.5.4 微分在近似计算中的应用 ........ 72
练习题 2.5 ........ 74
习题二 ........ 74
**第 3 章 微分中值定理与导数的应用** ........ 79
3.1 微分中值定理 ........ 79
3.1.1 罗尔定理 ........ 79
3.1.2 拉格朗日中值定理 ........ 81
3.1.3 柯西中值定理 ........ 82
练习题 3.1 ........ 83
3.2 洛必达法则 ........ 83
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 ........ 83
3.2.2 其他类型未定式 ........ 85
练习题 3.2 ........ 86
3.3 函数的单调性与曲线的凹凸性 ........ 87
3.3.1 函数的单调性 ........ 87
3.3.2 曲线的凹凸性 ........ 88
练习题 3.3 ........ 91
3.4 函数的极值与最大值、最小值 ........ 91
3.4.1 函数的极值 ........ 91
3.4.2 函数的最大值、最小值及其在工程、经济中的应用 ........ 94
练习题 3.4 ........ 97

3.5 函数图形的描绘 98
3.5.1 渐近线 99
3.5.2 函数图形的描绘 99
练习题 3.5 101
3.6 导数在经济分析中的应用 101
练习题 3.6 103
习题三 103
**第 4 章 不定积分** 105
4.1 不定积分的概念与性质 105
4.1.1 不定积分的概念 105
4.1.2 基本积分公式 107
4.1.3 不定积分的性质 107
练习题 4.1 109
4.2 不定积分的换元积分法 109
4.2.1 第一类换元法 109
4.2.2 第二类换元法 112
练习题 4.2 115
4.3 不定积分的分部积分法 117
练习题 4.3 120
习题四 120
**第 5 章 定积分** 121
5.1 定积分的概念与性质 121
5.1.1 两个实际问题 121
5.1.2 定积分的概念 123
5.1.3 定积分的几何意义 124
5.1.4 定积分的性质 125
练习题 5.1 127
5.2 微积分基本公式 127
5.2.1 变速直线运动中位移函数与速度函数之间的联系 127
5.2.2 变上限积分函数及其导数 128
5.2.3 牛顿—莱布尼茨（Newton-Leibniz）公式 129
练习题 5.2 130
5.3 定积分的换元法和分部积分法 131
5.3.1 定积分的换元法 131
5.3.2 定积分的分部积分法 133
5.3.3 定积分计算中的几个常用公式 133
练习题 5.3 135

5.4 无穷区间上的反常积分 ...... 135
练习题 5.4 ...... 138
习题五 ...... 138
**第 6 章 定积分的应用** ...... 139
6.1 定积分的元素法 ...... 139
练习题 6.1 ...... 141
6.2 定积分的几何应用 ...... 141
6.2.1 平面图形的面积 ...... 141
6.2.2 体积 ...... 145
练习题 6.2 ...... 149
6.3 定积分的经济应用 ...... 149
6.3.1 由边际函数或变化率求总量 ...... 149
6.3.2 收益流的现值和将来值 ...... 150
练习题 6.3 ...... 151
6.4 定积分的物理应用 ...... 152
6.4.1 变力做功 ...... 152
6.4.2 液体的压力 ...... 153
练习题 6.4 ...... 154
习题六 ...... 155
**第 7 章 常微分方程** ...... 156
7.1 微分方程的基本概念 ...... 156
练习题 7.1 ...... 159
7.2 可分离变量的一阶微分方程 ...... 159
练习题 7.2 ...... 163
7.3 齐次微分方程 ...... 163
练习题 7.3 ...... 165
7.4 一阶线性微分方程 ...... 165
7.4.1 一阶线性微分方程的定义 ...... 165
7.4.2 一阶线性微分方程的求解方法 ...... 166
练习题 7.4 ...... 171
7.5 二阶线性微分方程 ...... 172
7.5.1 二阶线性微分方程的定义 ...... 172
7.5.2 二阶线性齐次微分方程解的性质 ...... 172
7.5.3 二阶线性非齐次微分方程解的性质 ...... 174
练习题 7.5 ...... 174
7.6 二阶常系数线性微分方程 ...... 175
7.6.1 二阶常系数线性微分方程的定义 ...... 175

7.6.2 二阶常系数线性齐次微分方程的解法 ........ 175
7.6.3 二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 ........ 178
练习题 7.6 ........ 182
习题七 ........ 183
附录 初等数学常用公式 ........ 186
练习题、习题参考答案及提示 ........ 191
参考文献 ........ 209

# 第 1 章　函数、极限与连续

【学习目标】

- 理解集合与函数的概念及函数的几个特性.
- 理解数列极限与函数极限的相关概念，理解无穷小和无穷大的概念，会求函数的极限.
- 理解连续与间断的概念，掌握连续函数的性质.

函数是微积分学研究的主要对象，极限是高等数学中的一个重要概念，也是研究微积分的重要工具. 极限思想、极限方法贯穿于高等数学的始终，当大家学完高等数学之后，就会深切体会到极限概念是微积分的“灵魂”. 连续是函数的一个重要性态. 本章将在复习和补充函数概念的基础上，介绍极限的概念、运算，并用极限的方法讨论无穷小及函数的连续性，为微积分的学习奠定必要的基础.

## 1.1　函数

高等数学以函数为研究对象，函数关系是变量之间的最基本的一种依赖关系. 这里我们在回顾中学数学关于函数知识的基础上，进一步从全新的视角来对它进行描述并重新分类.

### 1.1.1　集合、区间与邻域

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，我们先通过几个简单的例子来说明这个概念. 例如：一个教室里的所有课桌、代数方程 $x^2+3x+2=0$ 的所有根、实数的全体等，分别组成一个集合. 一般的，所谓**集合**（简称**集**）是指具有某种共同属性的事物的总体，或是一些确定对象的汇总，组成这个集合的事物或个体称为该集合的**元素**.

通常用大写的拉丁字母 $A$、$B$、$C$……表示集合，用小写的拉丁字母 $a,b,c$……表示集合中的元素. 如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 属于 $A$，记为 $a\in A$；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 不属于 $A$，记为 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in} A$. 一个集合，若它只含有有限个元素，称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**.

集合的表示法一般有两种：一种是**列举法**，即将集合中的元素一一列举出来. 例如：由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的集合 $A$，可表示成 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；另一种是**描述法**，即用一个命题（或一句话）来描述集合中所有元素的属性，若集

合 $M$ 是由具有某种性质 $p$ 的元素 $x$ 的全体所组成，则该集合可表示成 $M=\{x\mid x\text{具有性质}p\}$．例如，集合 $B$ 是方程 $x^2-4x+3=0$ 的解集，就可表示成 $B=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$．

习惯上，$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合，称为自然数集．即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体正整数的集合为：$\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体有理数构成的集合称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{且}p\text{与}q\text{互质}\}.$$

全体实数构成的集合记作 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^*$ 为排除 0 的实数集，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数．

若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 $A$ 是 $B$ 的**子集**，记为 $A\subseteq B$（读作 $A$ 包含于 $B$）或 $B\supseteq A$（读作 $B$ 包含 $A$）．如果集合 $A$ 与集合 $B$ 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 $A$ 与集合 $B$ **相等**，记作 $A=B$．若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 $A$ 是 $B$ 的**真子集**，记作 $A\subset B$．例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$．规定空集是任何集合的子集．

2．集合的运算

集合的基本运算有三种：并、交、差．

设 $A$、$B$ 是两个集合，由所有属于 $A$ 或者属于 $B$ 的元素组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的**并集**（简称**并**），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

设 $A$、$B$ 是两个集合，由所有既属于 $A$ 又属于 $B$ 的元素组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的**交集**（简称**交**），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

设 $A$、$B$ 是两个集合，由所有属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的**差集**（简称**差**），记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 $I$ 中进行，所研究的其他集合 $A$ 都是 $I$ 的子集．此时，我们称集合 $I$ 为**全集**或**基本集**．称 $I\setminus A$ 为 $A$ 的**余集**或**补集**，记作 $\complement_I A$.

集合运算的法则：

设 $A$、$B$、$C$ 为任意三个集合，则

（1）交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（3）分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（4）对偶律$\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$，$\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$.

3. 区间和邻域

区间是普遍使用的一类实数集合，可分为有限区间和无限区间.

（1）有限区间：设$a<b$，称数集$\{x\mid a<x<b\}$为**开区间**，记为$(a,\ b)$，即

$$(a,\ b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地有，$[a,\ b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**，$[a,\ b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,\ b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$称为**半开半闭区间**.

其中$a$和$b$称为区间$(a,\ b)$、$[a,\ b]$、$[a,\ b)$、$(a,\ b]$的端点，$b-a$称为区间的长度. 闭区间$[a,b]$和开区间$(a,b)$在数轴上表示出来，分别如图 1-1（a）与（b）所示.

（2）无限区间：如$[a,\ +\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$，$(-\infty,\ b)=\{x\mid x<b\}$等.

这两个无限区间在数轴上的表示分别如图 1-1（c）与（d）所示.

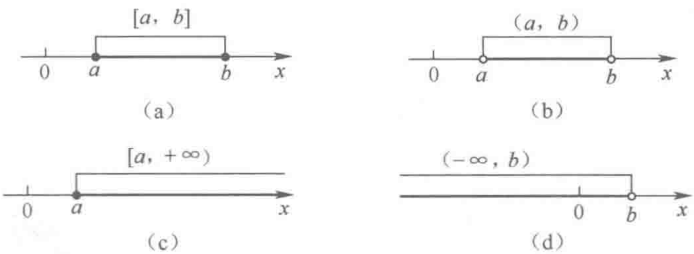


图 1-1

全体实数的集合 **R** 也可记作$(-\infty,\ +\infty)$，也是无限区间. 以后不需辨明是有限区间还是无限区间时，我们就简单地称为“区间”，且常用$I$表示.

下面引入在高等数学中常用的邻域概念.

以点$x_0$为中心的任何一个小开区间称为点$x_0$的邻域，记作$U(x_0)$.

一般的，设$\delta$是一正数，则称开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$为**点$x_0$的$\delta$邻域**，记作$U(x_0,\delta)$. 即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

其中点$x_0$称为邻域的中心，$\delta$称为邻域的半径.

在$x_0$的$\delta$邻域中去掉$x_0$，所得集合记作$U^0(x_0,\delta)$，称为**点$x_0$的$\delta$去心邻域**. 即

$$U^0(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

例如，$U(1,0.5)=\{x\mid |x-1|<0.5\}$表示点 1 的 0.5 邻域，即是开区间$(0.5,1.5)$. $U^0(1,0.5)=\{x\mid 0<|x-1|<0.5\}$表示点 1 的 0.5 去心邻域，它可用两个开区间的并表示为$(0.5,1)\cup(1,1.5)$.

### 1.1.2 函数的概念

1. 常量和变量

在观察某一现象的过程中，我们经常会遇到各种不同的量. 例如：身高、体重、商品价格、学生人数、气温、产量等. 这些量可以分为两种：一类在考察过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作**常量**. 例如，圆周率π是个永远不变的量，某种商品的价格，某班学生的人数在一段时间内保持不变，这些量都是常量；另一类量在考察过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，我们则把其称之为**变量**. 例如，一天中的气温，生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量.

习惯上，常量用字母 $a$, $b$, $c$, $d$ 等表示，变量用字母 $x$, $y$, $z$ 等表示.

变量所能取的数值的集合叫做这个变量的**变动区域**，如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示其变动区域.

在理解常量与变量时，应注意：

（1）在变化过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的，我们也把它看作常量. 例如，人的身高在一天中也不完全相同，但其变化微小，我们认为某人在一天中的身高就是常量.

（2）常量和变量依赖于所研究的过程. 同一个量，在某一过程中可以认为是常量，而在另一过程中则可能是变量；反过来也一样. 例如，某种商品的价格在一段时间内是常量，但在较长的时间内则是变量.

2. 函数的概念

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化. 如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么我们就说这些变量之间存在着函数关系. 例如，某种商品的价格为 10 元，每天的销量用 $x$ 表示，那么每天该商品的销售收入 $y$ 与销量 $x$ 之间的关系为：$y=10x$. 当销量 $x$ 取一个值时，销售收入 $y$ 都有确定的值和它对应，我们就说销售收入 $y$ 是销量 $x$ 的函数. 下面给出函数的精确定义：

**定义 1.1** 设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 $y$ 按照一定的法则 $f$ 总有确定的数值与它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的**函数**，记作 $y=f(x)$.

$x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**或**函数**. $f$ 是函数符号，它表示 $y$ 与 $x$ 间的对应法则. 有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$ 或 $y=F(x)$ 等.

数集 $D$ 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**，也可记作 $D_f$，对应的函数值 $y$ 的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**，记作 $R_f$.

如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有唯一确定的值和它对应，这种函数叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**. 例如，设变量 $x$ 和 $y$ 之间的对应

法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-r,r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$，可确定出对应的 $y$ 值，当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 $x$ 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 $y$ 有两个值. 所以该方程确定了一个多值函数.

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域、对应法则和值域. 由于值域是由定义域和对应法则决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应法则完全一致，我们就称**两个函数相等**.

**例 1.1** 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ 的定义域.

**解** 要使 $f(x)$ 有意义，必须使 $x^2-4\neq 0$，即 $x\neq\pm 2$.
所以函数的定义域为 $D=(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$.

**例 1.2** 求函数 $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域与值域.

**解** 要使 $g(x)$ 有意义，必须使 $1-x^2\geqslant 0$，所以该函数的定义域为 $D=[-1,\ 1]$.
因为 $0\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，所以函数 $g(x)$ 的值域为 $R_g=[0,\ 1]$.

在求函数定义域时应注意：若单纯地讨论用式子表达的函数时，可以规定函数的自然定义域，即使式子有意义的一切实数组成的数集，以上两例所求定义域就是自然定义域.

在实际问题中，函数的定义域根据实际意义确定.

3. 函数的表示法

常用的函数的表示法主要有三种：表格法、图形法和解析法（公式法）. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集 $G$

$$G=\{(x,\ y)\,|\,y=f(x),\quad x\in D_f\},$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形（也叫图像）. 图形 $G$ 在 $x$ 轴上的垂直投影点集就是定义域 $D_f$，在 $y$ 轴上的垂直投影点集就是值域 $R_f$，如图 1-2 所示.

下面举几个函数的例子：

**例 1.3** **常量函数** $y=2$ 的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，值域为单点集 $\{2\}$. 其图形为与 $x$ 轴平行的一条直线，如图 1-3 所示.

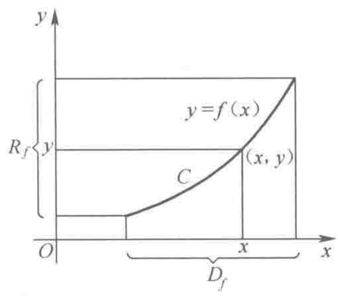


图 1-2

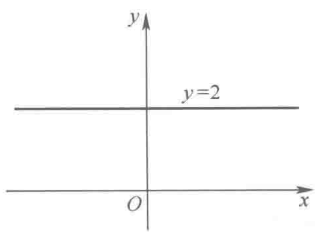


图 1-3

**例 1.4** 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

称为**绝对值函数**．其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=[0,+\infty)$，如图1-4 所示．

**例 1.5** 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

称为**符号函数**．其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$，如图1-5 所示．

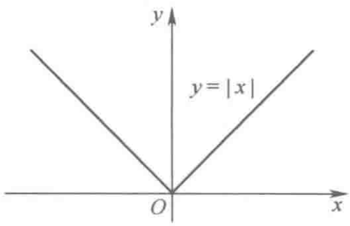


图 1-4

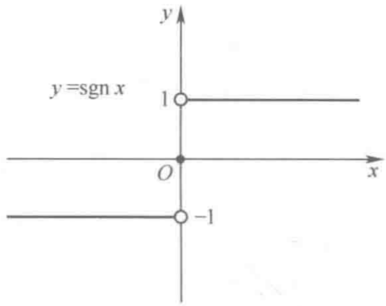


图 1-5

### 1.1.3 函数的几种特性

1. 函数的有界性

**定义 1.2** 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 内有定义(区间 $I$ 可以是函数 $y=f(x)$ 的整个定义域，也可以是其定义域的一部分)，如果存在一个正数 $K$，对于所有的 $x\in I$，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|\leqslant K$，则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 内**有界**．

如果这样的 $K$ 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 内**无界**．换句话说，函数 $f(x)$ 无界，就是说对任意给定的正数 $K$，总存在 $x_0\in I$，使 $|f(x_0)|>K$．

**例 1.6** （1）$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，因为对于所有的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$．

（2）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在(0,1)内是无界的．这是因为，对于任意取定的正数 $K$ $(K>1)$，总有 $x_1\in(0,1)$（如取 $x_1=\dfrac{1}{2K}$），使 $f(x_1)=\dfrac{1}{x_1}=2K>K$，所以函数无界．

（3）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(a,1)$，$0<a<1$ 内是有界的．因为 $a<x<1$，

$1<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{a}$．取 $K=\dfrac{1}{a}$ 时，对任意的 $x\in(a,1)$，有 $|f(x)|<\dfrac{1}{a}=K$．

2．函数的单调性

**定义 1.3** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subset D$．如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$，$x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调增加**；反之，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调减少**．如图 1-6 所示．单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**．

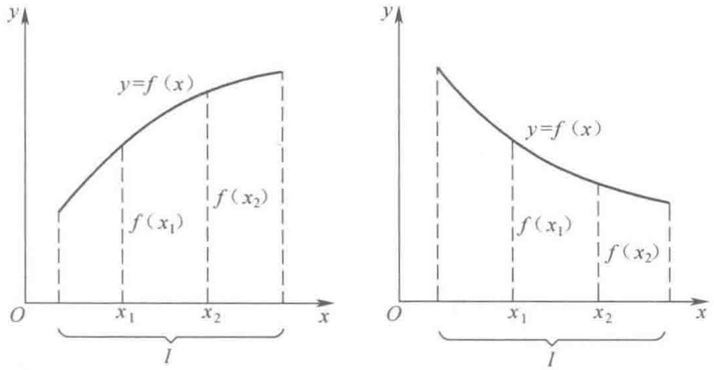


图 1-6

如函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的，在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在$(-\infty,+\infty)$上不是单调的．

3．函数的奇偶性

**定义 1.4** 设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$），如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**； 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**．

偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，如图 1-7 所示；奇函数的图形关于原点对称，如图 1-8 所示．

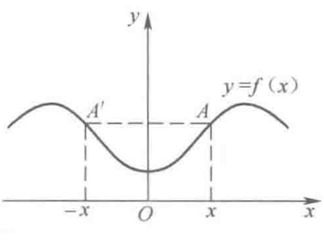


图 1-7

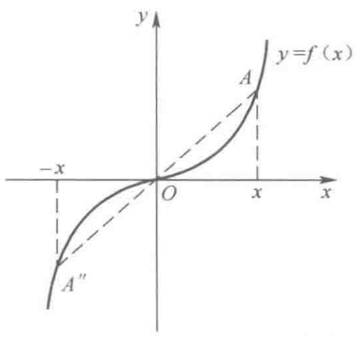


图 1-8