高級中学課本

立体几何

LITI JIHE

下 册

（試用本）

浙江省中小学教材編輯委員会編

浙 江 人 民 出 版 社

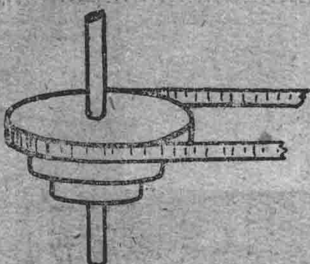
目　　录

目　　录

第三章　旋轉体

I. 圓柱、圓錐和圓台

我們在生产和生活中所接触到的許多物体，除了前面所研究过的多面体外，还有着大量的表面不是由平面多边形所組成的物体．例如燒瓶、坩堝、車軸、宝塔輪、伞齿輪毛坯、地球仪的圓球等．


宝塔輪

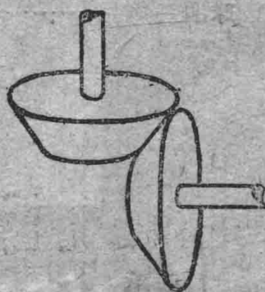
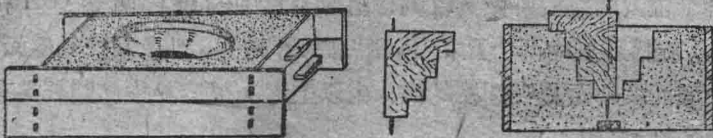

伞齿輪毛坯

图 1

这些物件的形状，有一个共同的特性，即都可以看作是由一个封閉的平面图形，繞着和它在同一平面內的一条直綫旋轉一周而成．立体几何中，把由一个封閉的平面图形，繞着和它在同一平面內的一条直綫旋轉一周而成的几何体，叫**旋轉体**．

有关旋轉体的知識，在生产中常要用到．例如要鑄造一只宝塔輪，事先要翻一个空心的砂型(图 2 甲为砂型的一部分)，木模工

在制木模时，为了省工省料，不制一个完整的模型，而改制一块車板(图 2 乙)，用它在砂箱内旋轉一周(图 2 丙)，砂箱内空出部分即象一只宝塔輪.



甲 乙 丙

图 2

研究旋轉体的性质，学会它們的表面积、体积的計算，掌握它們的表面展开图及直观图的繪制，对于我們以后参加生产及进一步研究其他科学，都有很重要的意义.

由于旋轉体的种类很多，而且一般形状都比較复杂，所以在这里我們仅研究其中最基本、应用最广泛的几种.

§1. 圓柱

我們常見的柱子、圓罐头盒、車軸、水管、鍋炉筒、压路机的輪子等的形状，都可以看做是由一个矩形(如图 3 中的 OO_1A_1A)繞着它的一边(OO_1)旋轉一周而得到.

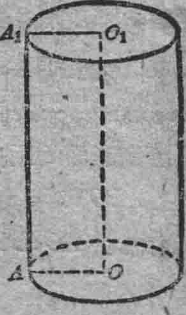


图 3

图 4

由一个矩形繞着它的一边旋轉一周而得到的几何体，叫做**圓柱**. 矩形繞着旋轉的一边 (OO_1) 所在的直綫叫做**圓柱的軸**. 矩形中和軸相对的边旋轉所成的面叫做**圓柱的側面**. 这边在側面上的各个位置的綫段叫做**圓柱的母綫**. 矩形中的其它两边 (OA 和 O_1A_1) 旋轉所成的两个互相平行并且相等的圓，叫做**圓柱的底面**. 两个底面間的距离叫**圓柱的高**. 由以上定义很容易推出圓柱具有下面的性质(图 4):

1. 軸过两个底面的圓心，并且垂直于两个底面;

2. 垂直于圓柱的軸的平面，截得的截面是和底面相等的圓;

3. 过軸的截面(軸截面)是一个矩形，它的一組对边是两条母綫，而另一組对边是两个底面圓的直徑;

4. 平行于軸的截面是一个矩形，它的一組对边是两条母綫，而另一組对边是两个底面圓的弦.

§2. 圓錐

車床頂針的头部、漏斗，以及农村中常見的泥堆、草垛的頂部等的形状，我們都可以把它們看做是由一个直角三角形(如图 5 中的 BAO)，繞着它的一条直角边(BO)旋轉一周而得.

由一个直角三角形繞着本身的一条直角边旋轉一周而成的几何体，叫做**圓錐**. 直角三角形繞着旋轉的一边(BO)所在的直綫叫做**圓錐的軸**. 斜边 (AB) 繞軸旋轉所成的面叫做**圓錐的側面**. 这边在側面上各个位置的綫段叫做**圓錐的母綫**. 另一条直角边 (OA)旋轉所成的圓叫做**圓錐的底面**. 从頂点到底面的距离 (BO) 叫做**圓錐的高**. 母綫和軸的夹角 (图 5 中 $\angle ABO$) 叫做**錐度角**，而这角的正切，就是底面半徑长与圓錐的高之比 ($AO:BO$)，叫做**錐度**.

很明显，圓錐具有下面的性质(图 6):

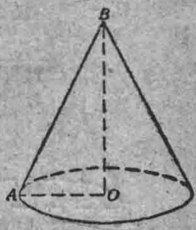


图 5

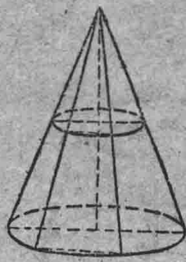


图 6

1. 軸过底面的中心并且垂直于底面;

2. 垂直于軸的截面是圓,其面积和底面面积的比等于从頂点到截面和从頂点到底面距离平方的比;

3. 过軸的截面(軸截面)是一个等腰三角形,它的两腰是两条母綫,底边是底面圓的直徑;

4. 过頂点与底面圓斜交的截面,也是一个等腰三角形,它的两腰是圓錐的两条母綫,底边是底面圓的弦.

§3. 圓台

鉛桶、瓶塞、揚声器等的形状,都可以看做是由一个直角梯形(如图 7 中 OO_1A_1A) 繞着垂直于底边的腰(OO_1)旋轉一周而得到,象这样的几何体叫做**圓台**. 很明显,它也就是圓錐中和底面平行的一个截面到圓錐底面之間的部分. 直角梯形的不垂直于底边的一腰(AA_1) 所旋轉而成的曲面,叫做**圓台的側面**. 此边在側面上各个位置的綫段,叫做**圓台的母綫**. 梯形的两条底边 (OA 和 O_1A_1) 旋轉所成的两个互相平行的圓叫做**圓台的底面**. 两个底面間的距离叫做圓台的高. **圓台的軸过两个底面的中心并且垂直于两个底面.**

例 在两个底面面积分别是 $1m^2$ 和 $49m^2$ 的圓台內,有一个

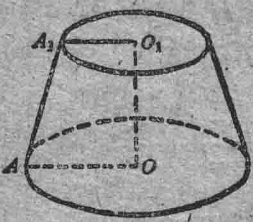


图 7

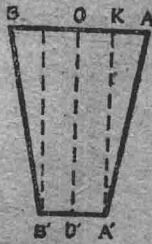


图 8

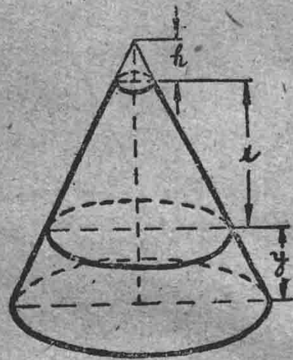


图 9

面积等于两个底面面积的等差中項而平行于底面的截面，求这截面把高分成的两部分的比(图 9).

解　設从截得这圓台的原圓錐的頂点到圓台的上底面的距离为 h; 从截面到上底面和到下底面的距离分别为 x 和 y. 因为截面的面积是 $\frac{1+49}{2}=25$, 所以

$$\frac{(h+x)^2}{h^2}=\frac{25}{1};\quad \frac{(h+x+y)^2}{h^2}=\frac{49}{1},$$

从这两式得 $x=4h$、$y=2h$, 因此 $x:y=4h:2h=2:1$.

答: 截面把高分成的两部分的比是 2:1.

圓台的錐度角，就是截得这圓台的原圓錐的錐度角. 計算圓台形零件的錐度角，工人有时用下面的經驗公式，不用查表就可以得出近似的結果.

$$\text{錐度角}=\frac{28.6\times(\text{大头直徑}-\text{小头直徑})}{\text{圓台高}}\text{度}.$$

例如，有一圓台，它的大头直徑 $AB=30$ cm., 小头直徑 $A'B'=15$ cm., 圓台高 $OO'=40$ cm., 求它的錐度角.

解：锥度角$=\dfrac{28.6(30-15)}{40}$度$\approx 10.7°=10°42'$.

注：在机器制造业中，应用圆锥（台）的地方很多，如車床、銑床和磨床的主軸錐孔、麻花钻和鉸刀的柄部以及前后頂針等．为什么圆锥（台）应用得这样广泛呢？这是因为圆锥（台）的配合和装卸便利，配合密切，同时能經常保持准確位置．

§4. 圆柱、圆錐的画法

画圓柱、圓錐时不宜用簡便投影，因簡便投影是斜投影，水平位置的圆的投影（椭圓）的长軸不在水平位置，这样不适合于圓柱、圓錐的习惯看法（如图 10）．

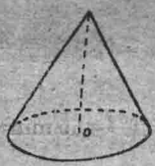


图 10

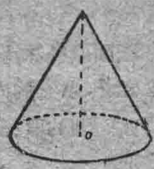


图 11

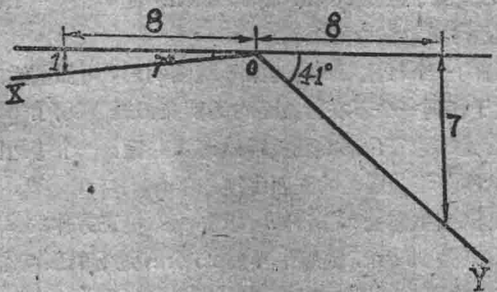


图 12

画圓柱、圓錐时，一般采用二軸测正投影，这样，水平位置的圓的投影（椭圓）的长軸是水平的（如图 11），直观性强．二軸測正投影的坐标軸規定如图 12 所示，OX 軸与水平綫約成 7° 角，OY 軸与水平綫約成 41° 角．OX、OY 軸上的坐标单位的縮短系数分别为 1 和$\frac{1}{2}$．二軸測正投影的画法与簡便投影相似，图 11 为圓錐的

二軸測正投影.

画圓柱时,輪廓母綫切底面圓的投影(椭圓)于长軸的两端点,而圓錐的輪廓母綫不可能切底面圓的投影(椭圓)于长軸的两端点. 所以,画圓錐时,应該先作圓錐頂点的投影,然后分别作两輪廓母綫与表示底面圓的椭圓相切.

习 題 一

1. 已知圓柱底面半徑是 2cm, 高是 3cm, 求它的軸截面內对角綫的长.

2. 已知圓柱的軸截面是一个面积为 Q 的正方形, 求这圓柱一个底面的面积.

3. 高和底面直徑相等的圓柱叫做等边圓柱. 一个等边圓柱的軸截面的面积是 32 cm^2, 求它的內接正八棱柱的体积.

4. 圓錐底面圓的直徑 $D=43$ mm, 母綫的长度 $l=65$ mm, 求錐度和錐度角.

5. 圓柱的底面半徑是 20 cm, 高是 15 cm, 有一个平行于軸并且和軸相距 12 cm 的截面, 求这截面的面积.

6. 在圓錐的一个軸截面內的两条母綫間的角, 叫做圓錐的頂角. 求证圓錐的頂角大于任何一个不在軸截面內的两条母綫間的角.

7. 軸截面是等边三角形的圓錐叫做等边圓錐. 一个等边圓錐的底面半徑是 r, 求它的內接等边圓柱的底面半徑.

8. 圓錐的底面半徑是 r, 高是 h, 求它的內接正方体的体积.

9. 圓錐的高是 20 dm, 底面半徑是 25 dm, 过它的頂点作一截面, 如果底面的圓心到这截面的距离是 12dm, 求这截面的面积.

10. 圓台形零件的錐度是 1:2.5, 它的大头直徑 $D=35$ mm, 小头直徑 $d=5$mm, 試求它的母綫的长.

11. 圓台形零件的小头直徑 $d=50$ mm, 母綫长 $l=200$ mm, 錐度角等于 35°, 試求它的大头直徑.

12. 已知圓台高是 h, 两个底面面积分别是 $3\pi h^2$ 和 $12\pi h^2$, 求这圓台的母綫与底面的夹角.

13. 圓台两个底面的半徑分別是 3 dm 和 7 dm，母綫的长是 5 dm. 求它的軸截面的面积.

14. 圓台的一个底面的周长是另一个底面的周长的 3 倍，軸截面的面积等于 $392\ cm^2$，母綫和底面的夹角是 45°，求这圓台的高、母綫的长和两个底面的半徑.

15. 圓台的两个底面的直徑分別是 a 和 $b(a>b)$，高是 h，求这圓台的內接正五棱台的側面积.

II. 圓柱、圓錐和圓台的側面积

水壶、医疗器材、工作母机、机車、大炮……等等物体，均需用大量的噴漆和电鍍材料. 有时为了事先計划原材料的数量，就需要計算出所需噴漆和电鍍的面积.

在制作罐头盒、鉛桶、漏斗……时，也需要事先計算出原材料（鉄板、鉛板、鋁板）的面积，并且要知道把它們切成怎样的形状.

这一类問題，在生产中是很多的.

下面我們先来研究圓柱、圓錐和圓台的表面积的計算以及它們側面展开图的形状.

§5. 圓柱的側面积

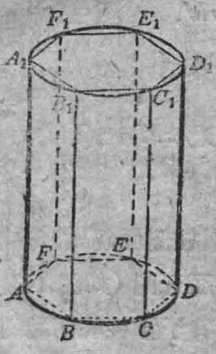


图 13

若以圓柱的底面的內接正多边形为底面，以圓柱的高为高，作此圓柱的內接正棱柱，則当內接正棱柱的底面边数无限倍增时，也即它的側面数无限倍增时，其側面积的极限，就叫做这**圓柱的側面积**.

定理 圓柱的側面积等于它的底面的周长和高的积.

已知：在圓柱 AD_1 中，底面周长是 c，高是 h，側面积是 S（图13）.

求证：$S=ch$.

证明：在圓柱 AD_1 內作內接正棱柱，則它的高就是 h，如果这棱柱的底面周长是 p，那末这棱柱的側面积为 ph.

当內接正棱柱底面边数无限倍增时，它的底面周长 p 的极限就是圓柱的底面周长 c，而高 h 无变化；所以內接正棱柱側面积的极限就是 ch. 根据圓柱側面积定义，所以

$$S=ch.$$

推論　如果用 R、h、$S_{側}$ 和 $S_{全}$ 分别表示圓柱的底面半徑、高、側面积和全面积，那末

$$S_{側}=2\pi Rh;\quad S_{全}=2\pi Rh+\pi R^2\times 2=2\pi R(h+R).$$

例：一圓柱的底面积是 Q，軸截面面积是 M，求它的全面积.

解：設圓柱的底面半徑为 R，高为 H，側面积为 $S_{側}$，全面积为 $S_{全}$，則

$$M=2RH,$$

或
$$H=\frac{M}{2R}.$$

又
$$S_{側}=2\pi R\cdot H=2\pi R\frac{M}{2R}=\pi M,$$

故
$$S_{全}=\pi M+2Q.$$

答：圓柱的全面积为 $\pi M+2Q$.

§6. 圓柱的側面展开图

我們設想把一个高为 h，底圓半徑为 R 的圓柱側面，沿着母綫切开，幷展开成平面，就得到一个圓柱的側面展开图（如图 14）. 这个側面展开图是一个矩形，它的一边（AB）等于圓柱底面的周长，即 $2\pi R$；另一边（AD）等于圓柱的高 h.

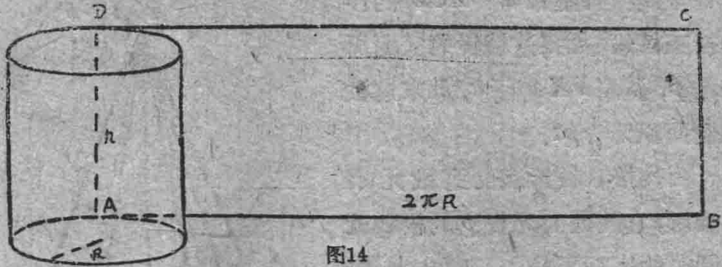


图14

例：一工厂要用铁板制造一个圓柱形的粗管，它的长是 18 m，半徑是 65 cm．如果接合的地方需要的铁板占所用全部材料的 5%，間共需多少 m^2 铁板？

解： $S_{側}=2\pi Rh,\ R=0.65\ \mathrm{m},\ h=18\ \mathrm{m}.$

$\therefore\quad S_{側}=2\pi\cdot 0.65\cdot 18\approx 74\ (\mathrm{m}^2)$．（取 $\pi=3.14$）

接合地方需铁板是：$74\times\frac{5}{100}=3.7\ (\mathrm{m}^2)$，

因此共需铁板：$74+3.7\approx 78\ (\mathrm{m}^2)$．

答：共需铁板約 $78\ \mathrm{m}^2$．

§7. 圓錐的側面积

若以圓錐的底面的內接正多边形为底面，以圓錐的頂点为頂点作圓錐的內接正棱錐，則当內接正棱錐的底面边数无限倍增时，也即它的側面数无限倍增时，其側面积的极限，就叫做这圓錐的側面积．

定理 圓錐的側面积等于它的底面的周长和母綫的长的积的一半．

已知：在圓錐 $P-ACE$ 中，底面周长是 c，母綫长是 l，側面积是 S（图 15）．

求证： $S=\frac{1}{2}cl.$

证明：在圓錐 $P-ACE$ 內作內接正棱錐，如果这棱錐的底面周长是 p，斜高 PK 等于 a，那末这棱錐側面积为 $\frac{1}{2}pa$.

当內接正棱錐底面边数无限倍增时，它的底面周长 p 的极限就是圓錐的底面周长 c；又在 $\triangle APB$ 內，$PA-PK<AK$，即 $PA-PK<\frac{1}{2}AB$，所以內接正棱錐斜高 a 的极限就是圓錐母綫的长 l. 因此內接正棱錐側面积的极限就是 $\frac{1}{2}cl$. 根据圓錐側面积定义，得

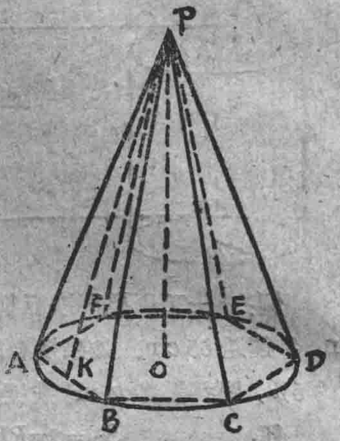


图 15

$$S=\frac{1}{2}cl.$$

推論 如果用 R、l、$S_{側}$ 和 $S_{全}$ 分别表示圓錐的底面半徑、母綫的长、側面积和全面积，那末

$$S_{側}=\pi Rl;$$

$$S_{全}=\pi Rl+\pi R^2=\pi R(l+R).$$

§8. 圓錐的側面展开图

我們把母綫的长为 l 和底圓半徑为 R 的圓錐的側面，沿着它的母綫切开，并且把它展开，就得到一个圓錐的側面展开图(如图 16).

这个側面展开图是一个扇形，它的半徑等于圓錐母綫的长 l，弧长等于圓錐底圓的周长 $2\pi R$.

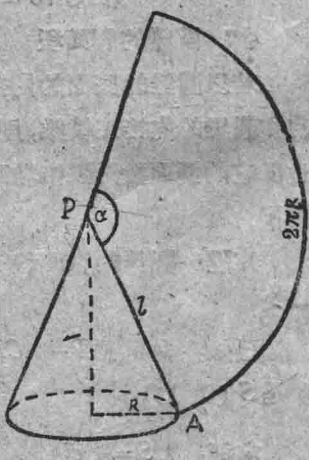


图 16

圓錐側面展开图中扇形的圓心角 α 可以这样求得：由平面几何中，半徑为 l，圓心角为 α 的弧長等于 $\frac{\pi l\alpha}{180^\circ}$；而这弧長又等于圓錐的底面周長 $2\pi R$，所以

$$\frac{\pi l\alpha}{180^\circ}=2\pi R, \qquad \therefore \quad \alpha=360^\circ\cdot\frac{R}{l}.$$

例：要制造圓錐形的漏斗或容器，就必須求出它的側面展开图中的圓心角．現在要制造一个底圓半徑为 11cm，母綫長为 24 cm 的圓錐形漏斗，問它的側面展开图的圓心角有多大？

解：
$$\alpha=360\cdot\frac{R}{l}=360\cdot\frac{11}{24}=165^\circ.$$

答：展开图的圓心角是 165°．

§9. 圓台的側面积

若以圓台的底面的內接正多边形为底面，以圓台的高为高作圓台的內接正棱台，則当內接正棱台底面正多边形的边数无限倍增时，也即它的側面数无限倍增时，其側面积的极限，就叫做这圓台的側面积．

定理　圓台的側面积等于它的两个底面周長的和与母綫的長的积的一半．

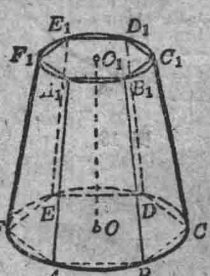


图 17

已知：在圓台 AD_1 中，两个底面的周長分別是 c 和 c_1，母綫的長是 l，側面积是 S（图 17）．

求证：$S=\frac{1}{2}(c_1+c)l$．

证明：在已知圓台內作內接正棱台，如果这棱台的两个底面的周長分別是 p 和 p_1，斜高是 a，那末側面积就等于 $\frac{1}{2}(p+p_1)a$；

当这个內接正棱台的底面的边数无限倍增时，周长 p 和 p_1 的极限，就是圆台的两个底面的周长 c 和 c_1，而斜高 a 的极限就是圆台母綫的长 l. 因此，这內接正棱台的側面积的极限就是 $\frac{1}{2}(c+c_1)l$. 依照圆台的側面积的定义，所以

$$S=\frac{1}{2}(c+c_1)l.$$

推論 如果用 R、R_1、l、$S_{側}$ 和 $S_{全}$ 分别表示圆台的两个底面的半徑、母綫的长、側面积和全面积，那末

$$S_{側}=\pi(R+R_1)l; \quad S_{全}=\pi(R^2+R_1^2+Rl+R_1l)$$

§ 10. 圆台的側面展开图

圆台側面展开图是两个圆錐側面展开图的差（如图 18），也就是从一个大扇形中去掉一个小扇形后所留下的部分. 这两个扇形有相同的圆心角 α.

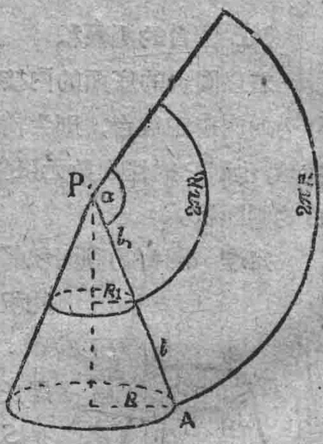


图 18

圆心角 α 可以这样求得：設圆台母綫长为 l，小扇形半徑为 l_1，那末大扇形半徑是 $l+l_1$. 由弧长公式有

$$\frac{\pi(l+l_1)\alpha}{180^\circ}=2\pi R, \qquad (1)$$

$$\frac{\pi l_1\alpha}{180^\circ}=2\pi R_1. \qquad (2)$$

相減得
$$\frac{\pi l\alpha}{180^\circ}=2\pi(R-R_1),$$

$$\therefore \quad \alpha=360^\circ\cdot\frac{R-R_1}{l}. \qquad (3)$$

为了便于繪制圆台側面展开图，还須用 l、R 和 R_1 来表示扇形

半徑 l_1 和 $l+l_1$ 的长. 将(3)代入(1)和(2), 就可得到:

$$l+l_1=\frac{lR}{R-R_1};\quad l_1=\frac{lR_1}{R-R_1}.$$

例: 有一铁皮盛水桶, 上口半徑为 6 寸, 底面半徑为 3.5 寸, 高为 9.5 寸, 試以 1:10 的比例尺, 在紙上繪出其表面展开图, 对于长度要求精确到 0.1 寸, 角度誤差在 30′ 以內.

解: 在繪图前必須先确定二扇形的半徑 $l+l_1$ 和 l_1 以及中心角 α.

$$l=\sqrt{h^2+(R-R_1)^2}=\sqrt{90.25+6.25}=\sqrt{96.5}\approx 9.82\ (\text{寸}).$$

$$l_1=\frac{lR_1}{R-R_1}\approx\frac{9.82\times 3.5}{2.5}\approx 13.7(\text{寸}).$$

所以大扇形的半徑 $l+l_1\approx 23.5$(寸).

$$\alpha=360°\cdot\frac{R-R_1}{l}\approx\frac{360°\times 2.5}{9.82}\approx 92°.$$

在画图时, 再按比例 1:10 作出卽行(由学生自己完成).

圓柱、圓錐和圓台面积的計算公式之間是有联系的.

圓台的上下底面都是圓, 不妨設下底面的面积大于上底面的面积.

(1) *如果圓台的上底面变大到与下底面相等时*, $R_1=R$, 圓台变成了等高的圓柱, 圓台的母綫 l 就是圓柱的高 h, 而公式

$S_{\text{側}}=\pi(R+R_1)l=\pi(R+R)h=2\pi Rh,$

$S_{\text{全}}=\pi(R^2+R_1^2+Rl+R_1l)=\pi(R^2+R^2+Rh+Rh)=2\pi R(R+h)$ 也成了圓柱的面积公式.

(2) 如果圓台的上底面縮小到了一点, 卽 $R_1=0$, 圓台变成了等高的圓錐, 圓台的母綫成了圓錐的母綫, 而公式

$S_{\text{側}}=\pi(R+R_1)l=\pi Rl,$