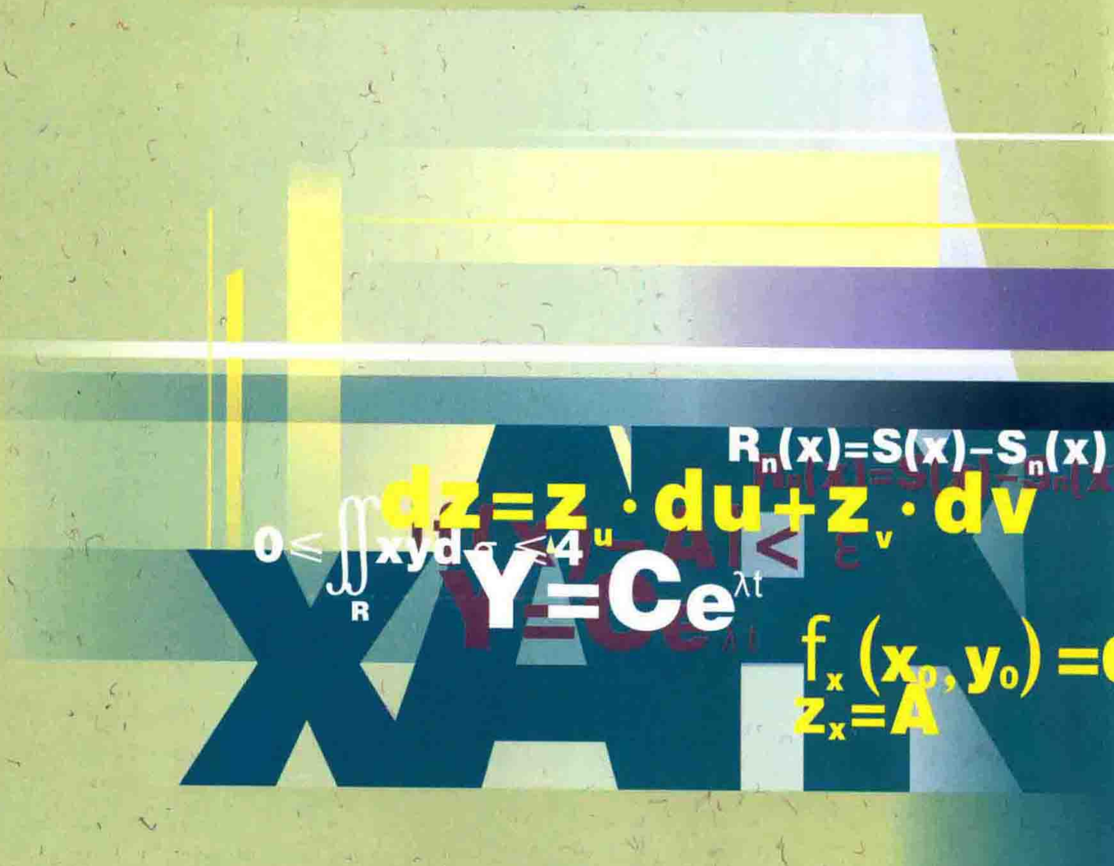
西南财经大学天府学院数学系列教材

微积分 II

WEIJIFEN II

赵坤银 王国政 主编



western University of Finance & Economics Press
西南财经大学出版社

西南财经大学天府学院数学系列教材

微积分 II

WEIJIFEN II

赵坤银 王国政 主编

Southwestern University of Finance & Economics Press
西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分.2/赵坤银,王国政主编.—成都:西南财经大学出版社,2015.2
ISBN 978-7-5504-1663-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①赵…②王… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 263016 号

微积分·Ⅱ

主编:赵坤银 王国政

责任编辑:邓克虎
封面设计:穆志坚
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	15.5
字　　数	315 千字
版　　次	2015 年 2 月第 1 版
印　　次	2015 年 2 月第 1 次印刷
印　　数	1—2500 册
书　　号	ISBN 978-7-5504-1663-5
定　　价	30.00 元

前　言

微积分是普通高等学校本科各专业开设的一门公共基础课程。它既是学习其他各门数学课程的基础，也是在自然科学和社会科学各领域中广泛应用的数学工具。本书在编写上力求内容适度、结构合理，适合普通高等院校经济与管理专业的学生使用，亦可供其他专业及有志学习本课程的读者选用。

本书具有如下特点：

(1) 注重概念的引入与讲解，尽可能通过较多的实际问题引入概念，力求阐述概念的实际背景，既增强学生学习的兴趣，也使学生能将抽象的概念同实际联系起来，更易于理解并掌握概念。同时，淡化理论推导过程，并将复杂的理论证明作为附录，仅供学生自学参考。

(2) 章节安排符合认知规律，注重内容的难易顺序，既便于教师讲授，也便于学生阅读、理解。

(3) 每一章都有丰富的例题与习题。本书引用了大量数学在经济等各个方面应用的例子，既能更好地培养学生解决实际问题的能力，又为经济与管理类专业学生的专业课学习奠定较好的基础，同时也兼顾了其他专业的需要。

(4) 引入数学实验内容，详细介绍了 Mathematica 软件在微积分中的应用，进一步满足了学习及应用中的计算需要。

本书由赵坤银编写初稿，王国政负责全书的审稿。两位编者现均为西南财经大学天府学院的专职教师，具有二十余年的教学实践经验，在编写过程中，经常就某一概念或结论反复讨论，对很多内容做了非常细致的处理与安排。

编写本书的目的，是试图为一般院校经济与管理类专业学生提供一本比较合适的教材。由于编者学识有限，书中疏漏与错误之处在所难免，恳请各位同行与读者不吝批评与指正。

编者

2014 年冬于西南财经大学天府学院

目 录

第一章　多元函数微分学

在《微积分 I》中，我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数称为一元函数．但在许多实际问题中，我们往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是要考虑一个变量（因变量）与另外多个变量（自变量）的相互依赖关系．由此，我们引入了多元函数以及多元函数的微积分问题．本章将在一元函数微分学的基础上，进一步讨论多元函数的微分学．讨论中将以二元函数为主要对象，这不仅因为有关的概念和方法大都有比较直观的解释，便于理解，而且这些概念和方法都能自然推广到二元以上的多元函数．

第一节　空间解析几何简介

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就．它通过点和坐标的对应，把数学研究的两个基本对象——"数"和"形"统一起来，使得人们既可以用代数方法研究解决几何问题（这是解析几何的基本内容），也可以用几何方法解决代数问题．

本节我们仅简单介绍空间解析几何的一些基本概念，它们包括空间直角坐标系、空间两点间的距离、空间曲面及其方程等概念．这些内容对我们学习多元函数的微分学和积分学将起到重要的作用．

一、空间直角坐标系

我们知道，实数 x 与数轴上的点 x 是一一对应的．二元数组 (x,y) 与坐标平面上的点 (x,y) 是一一对应的．类似地，通过建立空间直角坐标系，可以建立起三元数组 (x,y,z) 与空间点之间的一一对应关系．

在空间取定一点 O，过点 O 作三条互相垂直的数轴 ox、oy、oz，各轴的正方向按右手规则确定，再规定一个长度单位．如图 1－1 所示．其中，点 O 称为坐标原点；ox、oy、oz 称为坐标轴．每两个坐标轴确定一个平面，称为坐标平面，分别称为 xy 平面、yz 平面、zx 平面；这三个平面将空间分为八个部分，称为八个卦限．如图 1－2 所示．

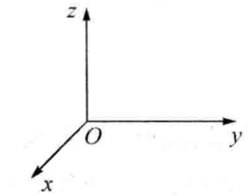


图 1－1

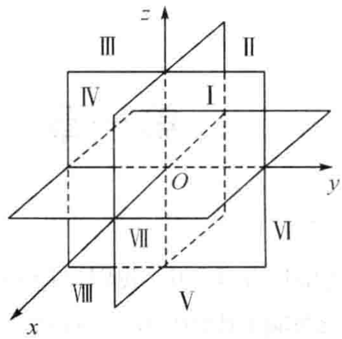


图 1－2

设 M 为空间的任意一点，过点 M 分别作垂直于三坐标轴的平面，这三个平面与三个坐标轴的交点分别为 P、Q、R（如图 1－3 所示）. 设点 P、Q、R 在 ox、oy、oz 轴上的坐标分别为 x_0、y_0、z_0，则称 x_0、y_0、z_0 为点 M 的坐标. 反之，任意给定三元数组 (x_0,y_0,z_0)，在空间中必唯一确定一点 M. 于是，任意三元数组 (x,y,z) 与空间的点之间构成一一对应的关系.

不难看出，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$；ox 轴、oy 轴和 oz 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$；xy 平面、yz 平面和 zx 平面上的点的坐标分别为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$.

对于空间中任意两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$（如图 1－4 所示），可以求得点 A 与点 B 之间的距离为

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1-1}$$

特别地，空间中任意一点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点 O 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1-2}$$

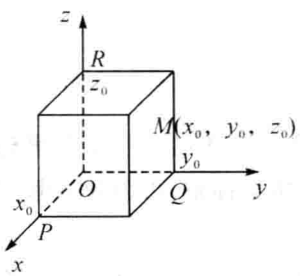


图 1－3

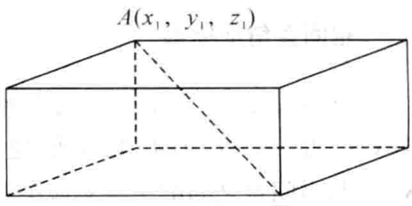


图 1－4

尽管我们不能画出四维空间的图形，但仍可设想一个四元数组 (x_1,x_2,x_3,x_4) 与"四维空间"中的一个点一一对应. 更一般地，对给定的正整数 $n(n \geqslant 2)$，规定 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与"n 维空间"中的一个点一一对应. 引入四维和四维以上的一般 n 维空间，对人们分析许多实际问题是非常有益的，特别对经济问题，其意义更为明显. 因为人们常常将经济系统分为多个部门或就多种商品来进行研究，引入多维

空间的概念后就会带来很大的方便.

二、空间曲面与方程

通过空间直角坐标系,还可以建立空间曲面与方程之间的对应关系. 对于含有三个变量 x、y、z 的三元方程

$$F(x,y,z)=0 \text{ 或 } z=f(x,y) \tag{1-3}$$

如果以满足方程(1-3)的一组数 x、y、z 为坐标,就可确定空间的一个点,一般地说,坐标满足方程(1-3)的一切点所成的集合,构成空间的一张曲面;反之,对于空间一给定的曲面,曲面上点的坐标之间必有一定的联系,一般地说,这种联系可以写成三元方程(1-3)的形式. 因此,空间曲面与三元方程之间的关系可作如下定义:

如果曲面 S 上任意一点 M 的坐标 (x,y,z) 都满足方程(1-3),而且坐标满足方程(1-3)的点都在曲面 S 上,则称方程(1-3)为曲面 S 的方程,而称曲面 S 为方程(1-3)的图形(见图1-5). 因此,通常将三元方程(1-3)理解为空间的一张曲面.

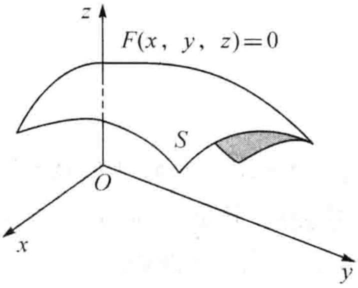


图1-5

应注意的是,对于一元方程或二元方程

$$F(x)=0 \text{ 或 } F(x,y)=0$$

需根据不同的坐标系来确定它们的几何意义.

例如,一元方程 $x=0$,在数轴上表示原点,在平面直角坐标系中表示 y 轴,在空间直角坐标系中表示 yz 平面;又如方程 $x+y=0$,在平面直角坐标系中表示过原点的一条直线,而在空间直角坐标系中表示过 oz 轴的一个平面.

常见的空间曲面有平面、柱面、旋转曲面和二次曲面等.

(1) 平面

空间平面方程的一般形式为

$$ax+by+cz+d=0 \tag{1-4}$$

其中 a、b、c、d 为常数,且 a、b、c 不全为零. 例如,$a=1,b=c=d=0$ 时,就得到平面方程 $x=0$(即 yz 平面);$a\neq 0,b\neq 0,c=d=0$ 时,就得到平面方程 $ax+by=0$.

(2) 柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的动直线 L 形成的轨迹叫做柱面;动直线 L 称为

柱面的母线,定曲线 C 称为柱面的准线.

例如,不含 z 的方程 $x^2 + y^2 = R^2$,在空间直角坐标系中,表示圆柱面. 它的母线平行于 oz 轴,xy 平面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 是它的一条准线,如图 1 - 6 所示;又如,方程 $y^2 = 2x$ 表示母线平行于 oz 轴的柱面,xy 平面上的抛物线 $y^2 = 2x$ 是它的一条准线,该柱面称为抛物柱面,如图 1 - 7 所示.

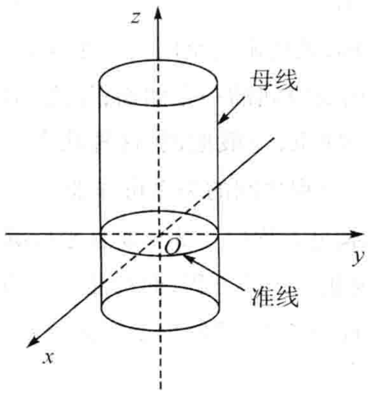


图 1 - 6

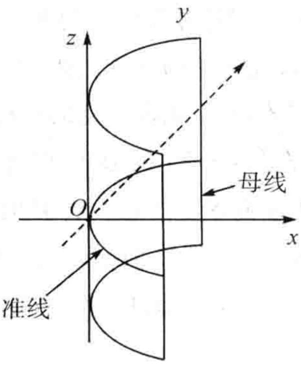


图 1 - 7

(3) 二次曲面

三元二次方程 $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2xz + b_3yz + c_1x + c_2y + c_3z + d = 0$ 所表示的空间曲面,称为二次曲面. 其中 $a_i, b_i, c_i (i = 1,2,3)$ 和 d 均为常数. 相应地,三元一次方程表示的平面,也称为一次曲面.

常见的二次曲面有:

球面　$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (R > 0)$

椭球面　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0、b > 0、c > 0)$

单叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0、b > 0、c > 0)$

双叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a > 0、b > 0、c > 0)$

二次锥面　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a > 0、b > 0、c > 0)$

椭圆抛物面　$\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0、q > 0)$

双曲抛物面(马鞍面)　$\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = -2z \quad (p > 0、q > 0)$

三元方程 $F(x,y,z) = 0$ 所表示的曲面的图形,可采用"截痕法"作图,即用坐标平面和平行于坐标平面的平面与曲面相截,考察相截后的交线(称为截痕)的形状,然后综合各种情形,描绘出曲面的大致形状.

例 1 用截痕法作单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0、b>0、c>0)$$

的图形.

解 用 xy 平面($z=0$) 与该曲面相截,其交线为 xy 平面上的椭圆:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases};$$

用平面 $z=d$ ($d\neq 0$) 与该曲面相截,其交线为平面 $z=d$ 上的椭圆:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{d^2}{c^2}\\ z=d\end{cases};$$

用 zx 平面($y=0$) 与该曲面相截,其交线为 zx 平面上的双曲线:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases};$$

类似地,用 yz 平面($x=0$) 与该曲面相截,其交线为 yz 平面上的双曲线:

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}.$$

综上所述,可得单叶双曲面的图形如图 1 - 8 所示.

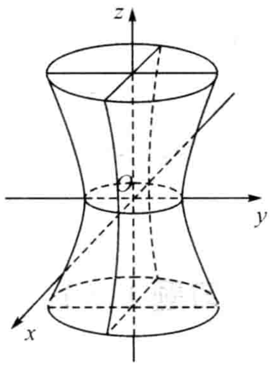


图 1 - 8

例 2 试分析双曲抛物面(马鞍面)$z=y^2-x^2$ 的图形.

解 用平面 $z=c$ 截该曲面,其截痕为:

$$\begin{cases}y^2-x^2=c\\ z=c\end{cases},$$

若 $c=0$,则截痕为过原点(0,0,0) 的两条直线

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} y + x = 0 \\ z = 0 \end{cases};$$

若 $c \neq 0$,则截痕为平面 $z = c$ 上的双曲线.

用平面 $y = c$ 截该曲面,其截痕为抛物线:

$$\begin{cases} z = c^2 - x^2 \\ y = c \end{cases};$$

用平面 $x = c$ 截该曲面,其截痕为抛物线:

$$\begin{cases} z = y^2 - c^2 \\ x = c \end{cases};$$

综上所述,可画出 $z = y^2 - x^2$ 的图形,如图 1 - 9 所示(图中, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-4 \leqslant y \leqslant 4$).

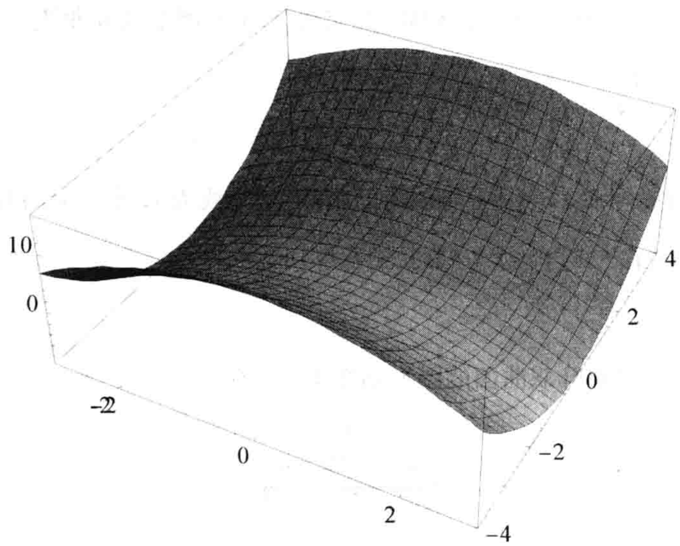


图 1 - 9

习题 1 - 1

1. 画出下列各平面,并观察其位置的特殊性.

(1) $2x - 3y + 4 = 0$　　(2) $2x - 3 = 0$

(3) $2y - 5z = 0$　　(4) $x + y + z = 0$

2. 求下列轨迹的方程:

(1) 与点 $(3,0,-2)$ 的距离为 4 个单位的点的轨迹;

(2) 与两定点 $P(c,0,0)$ 和 $Q(-c,0,0)$ 的距离之和等于 $2a(a > c > 0)$ 的点的轨迹;

(3) 与 z 轴和点$(1,3,-1)$ 等距离的点的轨迹;

(4) 与 yoz 平面的距离为4,且与点$(5,2,-1)$ 的距离为3的点的轨迹.

3. 求下列各曲面的方程:

(1) 中心在点$(-1,-3,2)$ 且通过点$(1,-1,1)$ 的球面方程;

(2) 过点$(2,1,-1)$ 且在 x 轴和 y 轴上的截距分别为2和1的平面方程;

(3) 平行于 xoz 平面并过点$(2,-5,3)$ 的平面方程;

(4) 一动点与点$(1,0,0)$ 的距离是与平面 $x=4$ 的距离的一半,求该动点的方程.

4. 用截痕法作出下列方程的图形:

(1) $x-y+z-1=0$ (2) $y-\sqrt{3}z=0$

(3) $x^2-y=0$ (4) $y^2=1$

(5) $x^2+y^2+z^2=1$ (6) $x^2-y^2=0$

(7) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-3z=0$ (8) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

第二节 多元函数的概念

一、平面区域的概念

讨论一元函数时,经常用到邻域和区间概念.由于讨论二元函数的需要,我们首先把邻域和区间概念加以推广,同时还要涉及一些其他概念.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xy 平面上的一个点,δ 是某一正数,与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为点 P_0 的 δ 邻域,记为 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\},$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

$U(P_0,\delta)$ 如图 1-10 所示.

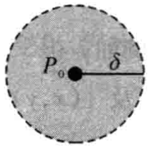


图 1-10

如果不需要强调邻域半径 δ,则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的 δ 邻域.点 P_0 的去心邻域

记作$\mathring{U}(P_0)$.

2. 区域

设E是平面上的一个点集,P是平面上的一个点. 如果存在点P的某一邻域$U(P)$使$U(P)\subset E$,则称P为E的内点(如图1－11所示). 显然,E的内点属于E.

如果点集E的点都是内点,则称E为开集. 例如,点集$E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$中每个点都是$E_1$的内点,因此$E_1$为开集. 如图1－12所示.

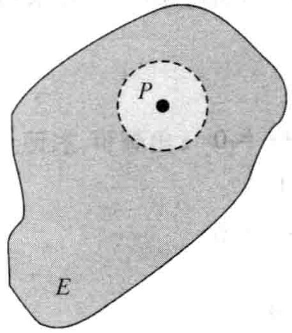


图1－11

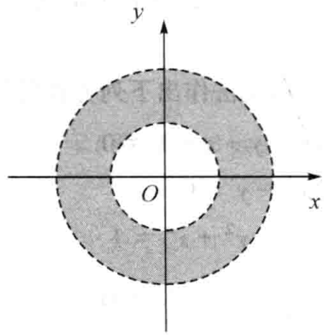


图1－12

如果点P的任一邻域内既有属于E的点,也有不属于E的点(点P本身可以属于E,也可以不属于E),则称P为E的边界点(如图1－13所示). E的边界点的全体称为E的边界. 例如上例中,E_1的边界是圆周$x^2+y^2=1$和$x^2+y^2=4$.

设D是开集. 如果对于D内任何两点,都可用折线连结起来,且该折线上的点都属于D,则称开集D是连通的. 如图1－14所示.

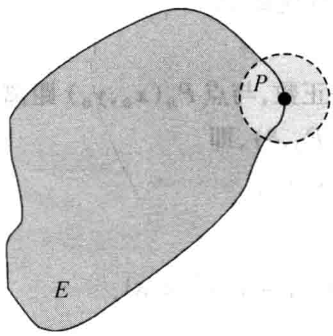


图1－13

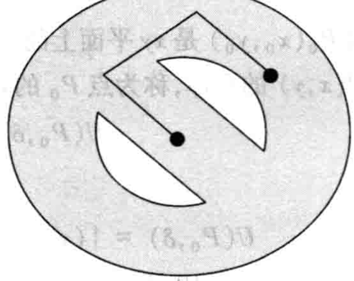


图1－14

连通的开集称为区域或开区域,例如,

$$\{(x,y)\mid x+y>0\}\text{ 及 }\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$$

都是区域.

开区域连同它的边界一起,称为闭区域,例如

$$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\}\text{ 及 }\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$$

都是闭区域.

对于点集 E,如果存在正数 K,使任意一点 $P \in E$ 与某一定点 A 间的距离 $|AP|$ 不超过 K,即

$$|AP| \leqslant K$$

则称 E 为有界点集,否则称为无界点集. 例如,$\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ 是有界闭区域,$\{(x,y) \mid x + y > 0\}$ 是无界开区域.

*3. n 维空间

我们知道,数轴上的点与实数有一一对应关系,从而实数的全体表示数轴上一切点的集合,即直线. 在平面上引入直角坐标系后,平面上的点与有序二元数组 (x,y) 一一对应,从而有序二元数组 (x,y) 的全体表示平面上一切点的集合,即平面. 在空间引入直角坐标系后,空间的点与有序三元数组 (x,y,z) 一一对应,从而有序三元数组 (x,y,z) 的全体表示空间一切点的集合,即空间. 一般地,设 n 为取定的一个自然数,我们称有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 n 维空间,而每个有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点,数 x_i 称为该点的第 i 个坐标. n 维空间记为 R^n.

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

容易验知,当 $n = 1,2,3$ 时,由上式便得解析几何中关于直线(数轴)、平面、空间内两点间的距离.

前面就平面点集陈述的一系列概念,可推广到 n 维空间中去. 例如,设 $P_0 \in R^n$,δ 是某一正数,则 n 维空间中的点集

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta, P \in R^n\}$$

就称为点 P_0 的 δ 邻域. 以邻域概念为基础,可定义点集的内点、边界点以及区域等一系列概念.

二、多元函数概念

一元函数研究一个自变量对因变量的影响. 但在很多实际问题中,特别是经济问题中,往往要研究多个自变量对因变量的影响,这时就要引入多元函数的概念.

例如,长、宽、高分别为 x、y、z 的长方体的表面积为

$$S = 2(xy + yx + xz) \quad (x > 0, y > 0, z > 0),$$

显然,当 x、y、z 变化时,S 将随着变化. 因此,长方体的表面积是其长、宽、高三个变量的函数,称为三元函数.

又如,在生产中,产量 Y 与投入的资金 K 和劳动力 L 之间有如下的关系:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

其中,A、α、β 为正的常数. 在西方经济学中称此函数关系为 *Cobb - Douglas* 生产函数.

由此可见,所谓多元函数是指依赖于多个自变量的函数关系. 下面给出二元函数的定义:

定义 1.1　设 D 是 xy 平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x,y)\in D$,按照某个确定的规则 f,变量 z 总有确定的值与它对应,则称变量 z 是变量 x、y 的二元函数(或点 P 的函数),记为

$$z=f(x,y)\ (\text{或 } z=f(P)).$$

其中 x、y 称为自变量,z 称为因变量,点集 D 称为函数 $z=f(x,y)$ 的定义域. 数集

$$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为函数 $z=f(x,y)$ 的值域.

类似地,可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数. 一般地,把定义 1.1 中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D,则可类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. n 元函数也可简记为 $u=f(P)$,这里点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 当 $n=1$ 时,n 元函数就是一元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域,与一元函数类似,我们作如下约定:在一般地讨论用算式表达的多元函数 $u=f(P)$ 时,就以使这个算式有确定值 u 的自变量所确定的点集为这个函数的定义域.

例 1　求二元函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域,并画出定义域的示意图.

解　由 $\begin{cases}|3-x^2-y^2|\leqslant 1\\ x-y^2>0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\\ x>y^2\end{cases}$,所以函数的定义域

$$D=\{(x,y)\mid 2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x>y^2\}.$$

如图 1 - 15 所示.

例 2　求二元函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域,并画出定义域的示意图.

解　由 $\begin{cases}4x-y^2\geqslant 0\\ 1-x^2-y^2>0\\ 1-x^2-y^2\neq 1\end{cases}$,解得 $\begin{cases}y^2\leqslant 4x\\ 0<x^2+y^2<1\end{cases}$,所以函数的定义域

$$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant 4x,0<x^2+y^2<1\}.$$

如图 1 - 16 所示.

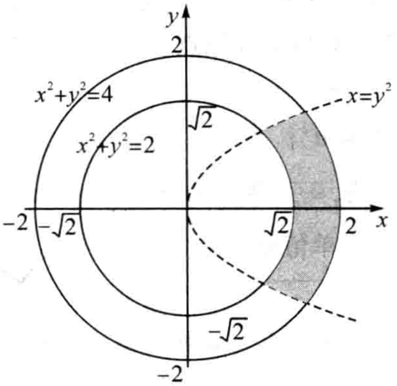


图 1 - 15

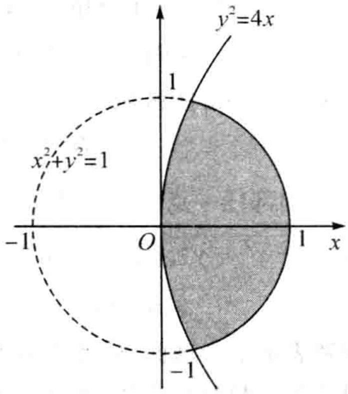


图 1 - 16

例 3　已知函数 $f(x+y, x-y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,求 $f(x,y)$.

解　设 $u = x + y, v = x - y$,则 $x = \dfrac{u+v}{2}, y = \dfrac{u-v}{2}$,

故得　$$f(u,v) = \frac{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2}{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2} = \frac{2uv}{u^2 + v^2},$$

即有 $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

设函数 $z = f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y) \in D$,对应的函数值为 $z = f(x,y)$. 这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标、z 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 遍取 D 上的一切点时,得到一个空间点集

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$$

这个点集称为二元函数 $z = f(x,y)$ 的图形(如图 1 - 17 所示). 通常我们也说二元函数的图形是一个曲面.

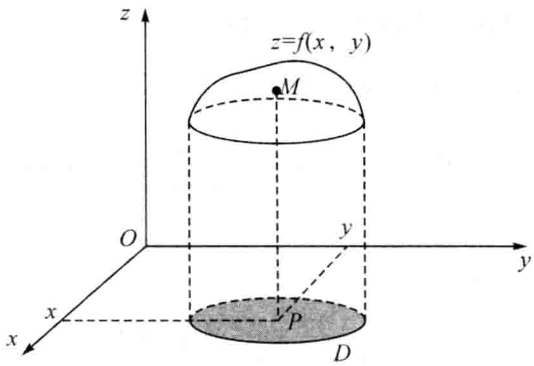


图 1 - 17