普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础教程

线性代数

张从军　时洪波
鲍远圣　陈美霞　编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础教程

线性代数

张从军　时洪波
鲍远圣　陈美霞　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是“经济数学基础教程”之一. 主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换、线性规划等，并配有适量习题. 书后附有数学的作用和魅力、回首线性代数、21 世纪专业人才的数学素养随想等 3 个附录. 书中除了介绍通常的线性代数内容外，还介绍了线性规划的内容，并增加了相应的数学软件及数学建模的基本方法.

本书贯彻问题教学法的基本思想，对许多数学概念，先从提出经济问题入手，再引入数学概念，介绍数学工具，最后解决所提出的问题，从而使学生了解应用背景，提高学习的积极性；书中详细介绍相应的数学软件，为学生将来的研究工作和就业奠定基础；穿插于全书的数学建模的基本思想和方法，引导学生学以致用，学用结合.

本书可作为普通高等学校财经类各专业线性代数课程的教材，最大限度地适应财经类各专业学习该课程和后续课程的需要，以及报考研究生的需要和将来从事与财经有关的实际工作的需要.

安徽大学图书馆
藏 书
lib.ahu.edu.cn

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张从军等编. —北京：科学出版社, 2015.7
普通高等教育“十二五”规划教材 · 经济数学基础教程
ISBN 978-7-03-044713-5
Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. ①O151.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 124367 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：张凤琴
责任印制：霍　兵 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　　各地新华书店经销
*
2015 年 7 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2015 年 7 月第一次印刷　印张：19 1/4
字数：388 000

定价：30.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

随着社会经济的迅猛发展, 数学在经济活动和经济研究中的作用日益凸显, 数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域, 对高等学校财经类各专业培养人才的数学素养要求越来越高. 经济数学基础课程, 在提高财经类专业人才的数学素养方面, 起着至关重要的基础性作用. 这类课程的思想和方法, 是人类文明发展史上理性智慧的结晶, 它不仅提供的是解决实际问题的有力数学工具, 同时还提供给学生一种思维的训练, 帮助学生具备作为复合型、创造型、应用型人才所必需的文化素质和修养.

怎样使经济数学基础课程充分发挥上述作用, 怎样使经济数学基础课程更趋符合培养目标的课程体系, 怎样兼顾经济数学基础课程的理论性与应用性、思想性与工具性, 怎样突出经济数学基础课程的财经类专业特色, 现有的经济数学基础教材固然很多, 但要处理好以上问题, 仍需认认真真地思考与探索, 仍有大量的工作要做. 作为我们主持承担的全国高等教育科学 "十五" 规划重点研究课题的研究内容之一, 我们从 2002 年始, 着手准备陆续编写一套经济数学基础课程和经济数学应用课程教材, 本书是其中的线性代数部分. 该线性代数教材于 2006 年 4 月在复旦大学出版社出版了第一版. 在编写思想、体系安排、内容取舍、教学方法等方面按照上述要求作了一些尝试.

我们特别注重了以下几点:

(1) 最大限度地适应财经类各专业学习该课程的需要、后续课程的需要、报考研究生的需要、将来从事与财经有关的实际工作的需要.

(2) 贯彻问题教学法的基本思想, 对许多数学概念, 先从提出经济问题入手, 再引入数学概念, 介绍数学工具, 最后解决所提出的问题. 使学生了解应用背景, 提高学习的积极性.

(3) 详细介绍相应的数学软件, 为学生将来的研究工作和就业奠定基础.

(4) 增加线性规划内容, 穿插数学建模的基本思想和方法, 引导学生学以致用, 学用结合.

该教材由张从军教授提出编写思想和编写提纲、列出章节目录、编写附录部分, 最后对全书进行修改补充、统稿、定稿. 陈美霞副教授编写了第 1、2 章以及全书的软件部分内容, 鲍远圣副教授编写了第 3、7 章, 时洪波教授编写了第 4~6 章.

复旦大学数学系姚慕三教授审阅了书稿并提出了宝贵意见, 南京财经大学王小

灵副教授阅读了书稿并提出了有益的建议, 伍家凤副教授协助仔细校对了全部书稿并修改了多处疏漏, 许多线性代数任课教师在教学中使用了该教材. 南京财经大学的有关校领导和教学管理部门负责人, 对该教材的编写工作给予了许多指导和帮助.

该教材自 2006 年出版以后, 得到了许多院系、教师和广大学生的充分肯定. 经过多年使用, 我们陆续收到了许多读者特别是一些一线任课教师的宝贵意见, 同时我们也发现了不少需要修改与提高之处.

我们一直认为, 编写一本教材似乎不难, 但编写一本适用的教材绝非易事. 编写此类线性代数教材更不是一劳永逸、一蹴而就的事. 因此, 既要保持相对的连续性和稳定性, 又要紧紧围绕人才培养的目标体系、课程体系, 吸收最新的有关教学科研成果, 不断修改完善. 为了满足广大学生的实际使用需要, 更好地兼顾教材内容的思想性与工具性、科学性与可接受性、先进性与适用性, 更有利于提高学生的数学素养和应用能力, 我们需要对教材内容作进一步的精雕细琢.

作为我们主持承担的教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题 (教高司 2007-143 号)、江苏省高等教育教改立项研究课题 (苏教高〔2007〕18 号) 的研究内容之一, 适应逐步打造精品教材的要求, 我们也必须不断学习, 不断思考, 不断探索.

复旦大学出版社 2009 年提出该教材再版, 于 2010 年 8 月出版了该教材第二版. 这给我们提供了很好的修改机会. 通过再版, 我们改进了有关内容的表述, 调整了某些结构顺序, 充实了一定例题和习题, 特别是进一步体现了经管专业使用特色.

根据江苏省重点教材的要求, 我们将修定后的教材交由科学出版社拟于 2015 年 7 月纳入 “十二五” 规划教材出版.

值此教材新版之际, 我们希望再次表达我们的谢意. 感谢使用该教材的教师和读者给我们提出的宝贵意见, 感谢相关院系对我们的支持和帮助, 感谢关心该教材不断完善的有关校领导和教务部门, 感谢审定该教材的相关专家, 感谢复旦大学出版社特别是范仁梅总监为该教材在复旦出版的第一版、第二版所做的一切有益工作.

本书在编写过程中, 参考了大量的相关教材和资料, 选用了其中的有关内容和例题、习题, 在此谨向有关编者、作者一并表示我们的谢意.

最后, 我们还要感谢科学出版社对本书出版给予的大力支持和付出的辛勤努力.

我们再次恳切期望有关专家、学者不吝赐教, 诚恳期望使用本书的教师和同学们, 提出并反馈您们的宝贵意见. 联系邮箱: yysxx@njue.edu.cn

编　者
于南京财经大学
2015 年 1 月

试读结束, 需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　　录

前言

第 1 章　行列式 ······ 1

1.1　从货物交换和费用分摊问题谈起 ······ 1

1.1.1　货物交换的经济模型 ······ 1

1.1.2　费用分摊问题 ······ 2

1.2　行列式的概念 ······ 4

1.2.1　二阶、三阶行列式 ······ 4

1.2.2　全排列及其逆序数 ······ 6

1.2.3　n 阶行列式的定义 ······ 7

1.3　行列式的性质 ······ 11

1.4　行列式的展开法则 ······ 14

1.5　行列式的计算 ······ 18

1.6　行列式应用软件介绍 ······ 23

习题 1 ······ 26

第 2 章　矩阵 ······ 33

2.1　从一些经济问题的表述谈起 ······ 33

2.1.1　运输问题的矩阵表述 ······ 33

2.1.2　商品价格及销售量的矩阵表述 ······ 33

2.1.3　对策论中局中人收益的矩阵表述 ······ 34

2.2　矩阵的概念 ······ 34

2.2.1　矩阵 ······ 34

2.2.2　几种特殊矩阵 ······ 35

2.2.3　关于数域的说明 ······ 37

2.3　矩阵的运算 ······ 37

2.3.1　矩阵的加法运算 ······ 37

2.3.2　数乘运算 ······ 38

2.3.3　矩阵的乘法运算 ······ 39

2.3.4　方阵的幂运算 ······ 42

2.3.5　方阵的行列式运算 ······ 44

2.3.6　矩阵的转置运算 ······ 44

2.3.7 矩阵的共轭 ······ 46
2.4 方阵的逆矩阵 ······ 46
2.4.1 逆矩阵的基本概念 ······ 46
2.4.2 方阵可逆的条件及逆阵的性质 ······ 47
2.5 分块矩阵 ······ 52
2.5.1 分块矩阵的加法与数乘运算 ······ 52
2.5.2 乘法运算 ······ 53
2.5.3 分块矩阵的转置运算 ······ 55
2.5.4 分块对角阵 ······ 55
2.6 矩阵的初等变换 ······ 56
2.7 初等矩阵与初等变换法求逆矩阵 ······ 61
2.7.1 初等矩阵 ······ 61
2.7.2 初等变换法求逆矩阵 ······ 65
2.8 矩阵的秩 ······ 67
2.8.1 概念及性质 ······ 67
2.8.2 矩阵秩的求解 ······ 68
2.9 矩阵运算的软件介绍 ······ 72
习题 2 ······ 78
第 3 章 线性方程组 ······ 88
3.1 从一个经济生活问题谈起 ······ 88
3.2 解线性方程组的 Cramer 法则 ······ 90
3.3 解线性方程组的消元法 ······ 95
3.3.1 消元法 ······ 96
3.3.2 线性方程组解的判别定理 ······ 98
3.4 n 维向量及其运算 ······ 102
3.4.1 n 维向量的概念 ······ 102
3.4.2 向量的线性运算 ······ 103
3.4.3 向量的内积、长度、距离与夹角 ······ 105
3.4.4 向量的正交 ······ 108
3.5 向量的线性相关性 ······ 109
3.5.1 线性表示 ······ 109
3.5.2 线性相关与线性无关 ······ 111
3.6 向量组的秩 ······ 116
3.6.1 向量组的秩 ······ 116
3.6.2 再论矩阵的秩 ······ 119

3.6.3　正交向量组、施密特 (schmidt) 正交化 …… 124
3.7　线性方程组解的结构 …… 127
3.7.1　齐次线性方程组解的结构 …… 127
3.7.2　非齐次线性方程组解的结构 …… 131
3.8　求解线性方程组的软件介绍 …… 135
习题 3 …… 138
第 4 章　矩阵的特征值与特征向量 …… 147
4.1　从一个投入产出模型谈起 …… 147
4.2　特征值与特征向量的概念与计算 …… 148
4.3　特征值与特征向量的性质 …… 152
4.4　矩阵的对角化 …… 154
4.4.1　相似矩阵及其性质 …… 154
4.4.2　矩阵对角化的条件 …… 155
4.4.3　矩阵对角化的实现 …… 158
4.4.4　实对称矩阵的对角化 …… 160
4.5　Jordan 标准形简介 …… 163
4.6　求特征值和特征向量的软件介绍 …… 165
习题 4 …… 167
第 5 章　二次型 …… 170
5.1　从利润最大化问题谈起 …… 170
5.2　二次型及其标准形 …… 171
5.2.1　二次型与其矩阵表示 …… 171
5.2.2　二次型的标准形 …… 173
5.3　化二次型为标准形 …… 175
5.3.1　用正交变换化二次型为标准形 …… 175
5.3.2　用满秩线性变换化二次型为标准形 (配方法) …… 177
5.3.3　用初等变换化二次型为标准形 …… 180
5.3.4　惯性定理 …… 183
5.4　二次型的有定及不定性 …… 186
5.4.1　正定二次型及正定矩阵 …… 186
5.4.2　二次型的有定性 …… 192
5.5　研究二次型的软件介绍 …… 194
习题 5 …… 196
第 6 章　线性空间与线性变换 …… 199
6.1　线性空间的概念与性质 …… 199

6.1.1 定义与性质 …… 199
6.1.2 向量空间的例子 …… 200
6.1.3 线性空间的基本性质 …… 201
6.1.4 子空间 …… 201
6.2 线性空间的基与维数 …… 203
6.2.1 线性空间中向量的线性关系 …… 203
6.2.2 基与维数 …… 203
6.2.3 坐标变换公式 …… 205
6.3 线性变换的概念 …… 209
6.3.1 线性变换的定义及例子 …… 209
6.3.2 线性变换的性质 …… 211
6.4 线性变换的矩阵 …… 212
6.4.1 线性变换的矩阵 …… 212
6.4.2 线性变换与矩阵间的一一对应 …… 214
6.4.3 线性变换在不同基下的矩阵 …… 215
6.5 线性变换的运算 …… 218
6.5.1 线性变换的加法 …… 218
6.5.2 数乘线性变换 …… 219
6.5.3 线性变换的乘法 …… 219
习题 6 …… 221
第 7 章 线性规划 …… 225
7.1 线性规划的数学模型 …… 225
7.1.1 问题的提出 …… 225
7.1.2 线性规划的数学模型 …… 227
7.1.3 线性规划模型解的基本概念 …… 229
7.2 线性规划问题的图解法 …… 230
7.3 线性规划问题的单纯形法 …… 233
7.3.1 基本定理 …… 233
7.3.2 单纯形方法 …… 236
7.3.3 单纯形表的矩阵形式 …… 242
7.3.4 二阶段法 …… 244
7.4 运输问题的表上作业法与图上作业法 …… 246
7.4.1 平衡运输问题的数学模型 …… 246
7.4.2 表上作业法 …… 247
7.4.3 图上作业法 …… 252

7.5 解决线性规划问题的软件介绍 …… 257
7.5.1 利用 Mathematica 求解线性规划问题 …… 257
7.5.2 利用 Lindo 软件求解线性规划问题 …… 258
习题 7 …… 263
参考答案 …… 267
附录 1 数学的作用和魅力 …… 282
附录 2 回首线性代数 …… 288
附录 3 21 世纪专业人才的数学素养随想 …… 291
参考文献 …… 297

第 1 章　行　列　式

数学是科学之王.

—— 高斯 (C.F.Gauss)

行列式的概念始于 300 多年以前, 首先引入这一概念的是日本数学家关孝和. 目前形式的行列式记号则是 1841 年英国数学家凯莱 (Cayley) 首次给出的.

行列式的出现与求解线性方程组密切相关. 由于其简洁明了的表达形式和系统规律的运算性质, 它成为许多数学领域表述和计算的工具, 在其他学科分支中也有着广泛的应用.

本章从几个实际经济问题入手, 表明学习行列式这一数学工具的必要, 进而引入其概念, 讨论其性质, 介绍其常用的计算方法和技巧.

本章是学习线性方程组和以后各章相关内容的基础.

1.1　从货物交换和费用分摊问题谈起

1.1.1　货物交换的经济模型

诺贝尔经济学奖获得者列昂惕夫 (Leontief) 曾考虑如下的一个经济学模型. 在一个原始部落, 根据分工, 人们分别从事 3 种劳动: 农田耕作 (记为 F)、农具与工具的制作 (记为 M), 以及织物的编织 (记为 C). 人们之间的贸易是实物交易. 图 1-1 给出这 3 组人之间的交易系统. 图中所示表明, 农夫们将每年收获的一半留给自己, 并分别拿出 $\frac{1}{4}$ 给工匠们和织布者们; 而工匠们却平均分配他们制作的用具给每个组; 织布者们则留下 $\frac{1}{4}$ 的衣物给自己, 并拿出 $\frac{1}{4}$ 给工匠们、$\frac{1}{2}$ 给农夫们. 此交易系统也可以用表给出, 见表 1-1.

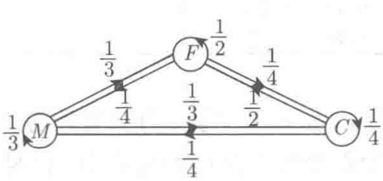


图 1-1

表 1-1

分工 / 分配比例 / 分工	F	M	C
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
M	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

随着社会的发展, 实物交易形式变得十分不方便, 于是部落决定用货币进行交易. 假设没有资本和负债, 那么如何给每类产品定价, 使其公正地体现旧有的实物交易系统呢?

令 x_1 为农作物的价值, x_2 为农具及工具的价值, x_3 为织物的价值, 那么由表 1-1 的第 1 行, 农夫们生产的价值应等于他们交换到的产品 (包括留给自己的) 价值, 即有

$$x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3.$$

同理, 可得工匠们和纺织者们生产与交换的价值方程为

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3, \\ x_3 &= \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3. \end{aligned}$$

整理得如下方程组:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = 0, \\ \dfrac{1}{4}x_1 - \dfrac{2}{3}x_2 + \dfrac{1}{4}x_3 = 0, \\ \dfrac{1}{4}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{3}{4}x_3 = 0. \end{cases}$$

因此, 该问题可归结为一个**三元一次线性方程组**的求解问题.

1.1.2 费用分摊问题

设一个公司有 3 个生产部门 P_1, P_2, P_3 和 4 个管理部门 M_1, M_2, M_3, M_4. 公司规定, 每个管理部门的费用由生产部门及其他管理部门分摊, 分摊比例由服务量确定, 现已知分摊费用比例如表 1-2 所示.

表 1-2

分摊比例 部门 / 管理部门	M_1	M_2	M_3	M_4	P_1	P_2	P_3	自身费用/万元
M_1	0	0.04	0.10	0.10	0.27	0.26	0.23	4
M_2	0.08	0	0.15	0.04	0.21	0.30	0.22	3.5
M_3	0	0	0	0.10	0.30	0.30	0.30	15
M_4	0.10	0.08	0.08	0	0.24	0.25	0.25	2.5

设各个管理部门 M_1, M_2, M_3, M_4 的自身费用 (如人员工资、办公费用等) 依次为 4 万元、3.5 万元、15 万元、2.5 万元. 试确定每个管理部门的总费用 (自身费用加上承担其他部门的费用).

设管理部门 M_1, M_2, M_3, M_4 发生的总费用分别为 x_1 万元、x_2 万元、x_3 万元和 x_4 万元, 由表 1-2 可知, 对管理部门 M_1, 应有如下等式:

$$x_1 = 4 + 0.08x_2 + 0.1x_4.$$

同理, 对 M_2, M_3, M_4, 有如下的 3 个等式:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3.5 + 0.04x_1 + 0.08x_4, \\ x_3 &= 15 + 0.1x_1 + 0.15x_2 + 0.08x_4, \\ x_4 &= 2.5 + 0.1x_1 + 0.04x_2 + 0.1x_3. \end{aligned}$$

因此, 费用分摊问题可归结为如下的**四元一次线性方程组**的求解:

$$\begin{cases} \quad\; x_1 - 0.08\,x_2 \qquad\qquad\quad - 0.1\;\, x_4 = 4, \\ -0.04\,x_1 + \qquad x_2 \qquad\qquad\quad - 0.08\,x_4 = 3.5, \\ -0.1\;\, x_1 - 0.15\,x_2 + \qquad x_3 - 0.08\,x_4 = 15, \\ -0.1\;\, x_1 - 0.04\,x_2 - 0.1\;\, x_3 + \qquad x_4 = 2.5. \end{cases}$$

大量的社会经济现象的研究最终都可以归结为形如上述的 **n 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组** (右边常数项全部为零) **或非齐次线性方程组** (右边常数项至少有一个非零) 的求解. 因此对此类方程组的求解就十分重要而有意义.

在中学数学里, 我们曾用加减消元法求解如下的二元一次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.1}$$

对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq 0$ 时, 该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}, \\ x_2=\dfrac{b_1a_{31}a_{23}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{21}a_{13}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{23}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}, \\ x_3=\dfrac{b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{31}a_{12}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

当未知数个数和方程个数增加时, 用加减消元法得到的类似 (1.1) 式、(1.2) 式的公式将更加复杂. 这就需要研究上面 (1.1) 式、(1.2) 式所包含的规律, 介绍行列式的概念.

1.2 行列式的概念

1.2.1 二阶、三阶行列式

定义 1.1 将 2^2 个数排列成: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 称此为**二阶行列式**, 记作 D, 且定义 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, 也称此为**二阶行列式的展开式**, 式中数 $a_{ij}\,(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的**元素**, 其第 1 下标 i 为行标, 第 2 下标 j 为列标, 表示元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行, 第 j 列.

例 1.1 计算 $D_1=\begin{vmatrix} 20 & 11 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$.

解 由定义 1.1, $D_1=20\times(-1)-11\times(-2)=2$, $D_2=a^2-b^2$.

定义 1.2 将 3^2 个数排列成: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 称此为**三阶行列式**, 记作 D, 且定义 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$, 也称此为**三阶行列式的展开式**.

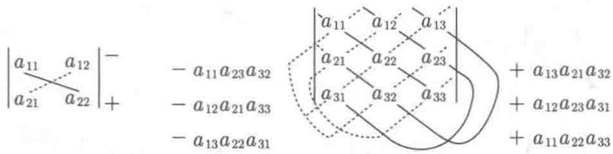
例 1.2 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 的值.

解 由定义 1.2, 有

$$D = 1\times5\times9+3\times4\times8+2\times6\times7-3\times5\times7-1\times6\times8-2\times4\times9=0.$$

二阶、三阶行列式的展开式遵循以下的对角线法则.

对角线法则



有了二阶行列式的定义, 当 $D\neq0$ 时, 二元一次线性方程组的解可以方便地用下式表示:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\[2ex] x_2=\dfrac{D_2}{D}, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

同理, 有了三阶行列式的定义, 当 $D\neq0$ 时, 三元一次线性方程组的解可以方便地用下式表示:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\[2ex] x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\[2ex] x_3=\dfrac{D_3}{D}, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

D 称为方程组的**系数行列式**, D_j 则是用常数列替代 D 中第 j 列元素所得到的行列式.

例 1.3 解方程组 $\begin{cases} x_1+\ x_2-2x_3=-3, \\ -2x_1+3x_2-\ x_3=1, \\ 2x_1-\ x_2+3x_3=9. \end{cases}$

解 先计算系数行列式

$$
\begin{aligned}
D=&\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&=1\times 3\times 3+(-2)\times(-2)\times(-1)+1\times(-1)\times 2 \\
&\quad -(-2)\times 3\times 2-1\times(-1)\times(-1)-1\times(-2)\times 3=20\neq 0,
\end{aligned}
$$

因此原方程组有唯一解. 同理可计算得

$$
D_1=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix}=20,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix}=40,
$$

$$
D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix}=60,
$$

再代入 (1.4) 式得：$x_1=1, x_2=2, x_3=3$. 经检验是原方程组的解.

(1.3) 式和 (1.4) 式形式规范, 便于记忆, 明显地表达了方程组的解与相应的方程组的系数和常数项的关系. 这就启发我们考虑：n 个方程 n 个未知数的方程组究竟在什么条件下有解? 如果有解, 是否能有规律地表达并能求解? 要解决上述问题, 首先便要引入 n 阶行列式的定义, 然后研究：n 阶行列式的展开式会有几项? 符号该如何决定? 规律是什么? 为此, 让我们先从三阶行列式的展开式的取值特点开始分析.

1.2.2 全排列及其逆序数

分析三阶行列式的展开式, 不难发现：

(1) 展开式中共有 3! 项, 且每项都是不同行、不同列的 3 个元素之积. 如果将每项的第一个下标 (即行标号) 按自然顺序排列, 则任一项可用 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 表示, $p_1p_2p_3$ (列标排列) 是 1, 2, 3 的某一排列, 显然这样的排列的总个数恰为 3! 个；

(2) 展开式中所有项都带符号, 一半正, 一半负. 3 项正的 $p_1p_2p_3$ 排列依次是：123, 231, 312；而 3 项负的 $p_1p_2p_3$ 排列依次是：321, 213, 132. 符号的决定与排列方式有关.

下面给出排列及逆序的概念.

定义 1.3 由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数或 n 个不同元素按某种次序所排成的一个数组或元素序列 $p_1p_2\cdots p_n$ 称为一个 **n 级排列**.

显然, n 级排列的总个数为 $n!$.

对于 n 个不同的元素, 规定由小到大的排列为**标准排列**, 也称为**自然排列**. 例如, "$123\cdots n$" 即为一 n 级自然排列.

定义 1.4 对于 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中任意取定的两个数 p_k 和 p_s, 如果 p_k 在 p_s 前面, 而 $p_k>p_s$, 则称 p_k 与 p_s 形成一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的个数称为该排列的**逆序数**, 记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

如 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇数, 则称排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为**奇排列**, 反之则为**偶排列**. 自然排列的逆序数为 0, 也归入偶排列.

例 1.4 求排列 6743215 的逆序数, 并指明其奇偶性.

解 $\tau(6743215)=0+2+3+4+5+2=16$, 即为偶排列.

例 1.5 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数.

解 $\tau\left(n\left(n-1\right)\cdots 1\right)=1+2+\cdots+\left(n-1\right)=\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$.

定义 1.5 将一个排列中的某两个数互换位置, 其余各数不变, 称为一次**对换**. 如排列中相邻的两个元素交换位置, 称为**相邻对换**.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后, 改变其奇偶性.

证 首先考虑相邻对换. 由于相邻两数与其他数是否构成逆序不会因为这两个数的互换而改变, 因而这种对换仅使原排列增加 (原两数之间未形成逆序) 或减少 (原两数之间已形成逆序) 一个逆序, 所以结论成立.

其次考虑一般情况. 一般对换可以看成奇数次相邻对换的结果, 即

$$p_1\cdots p_r\cdots p_{r+s}\cdots p_n\xrightarrow[\text{相邻对换}]{p_{r+s}\text{往前}s-1\text{次}}p_1\cdots p_rp_{r+s}\cdots p_{r+s+1}\cdots p_n$$
$$\xrightarrow{p_r\text{往后}s\text{次相邻对换}}p_1\cdots p_{r+s}\cdots p_rp_{r+s+1}\cdots p_n.$$

共进行了 $2s-1$ 次相邻对换, 元素 p_r 与 p_{r+s} 进行了一次对换, 所以排列的奇偶性改变. 证毕.

推论 1.1 奇排列经对换成为自然排列的次数为奇数, 偶排列经对换成为自然排列的次数为偶数.

推论 1.2 所有的 n 级排列中, 奇排列和偶排列各占一半.

1.2.3 n 阶行列式的定义

前面已提到, 三阶行列式的展开式的一般项可表达为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$, 其中 $p_1p_2p_3$

试读结束, 需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com