普通高等教育“十二五”规划教材

简明线性代数教程

（第二版）

主　编　柴伟文
副主编　马晓丽　曹黎侠　李晓红　李花妮
主　审　李选民

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

简明线性代数教程

（第二版）

主　编　柴伟文
副主编　马晓丽　曹黎侠
　　　　李晓红　李花妮
主　审　李选民

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据数学与统计学教学指导委员会制定的《线性代数课程基本要求》编写而成．全书共5章，分别是行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组解的结构、相似矩阵及二次型.

本书可作为普通高等学校工科类各专业线性代数课程的教材，也可作为普通高等学校理工类（非数学专业）、经管类的线性代数教材，还可作为成人教育类（非数学专业）教学用书.

图书在版编目（CIP）数据

简明线性代数教程/柴伟文主编.—2版.—北京：科学出版社，2015
普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-043170-7

Ⅰ.①简…　Ⅱ.①柴…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第018884号

责任编辑：任俊红／责任校对：张怡君
责任印制：徐晓晨／封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2012年1月第一版　开本：720×1000　1/16
2015年1月第二版　印张：8
2015年4月第五次印刷　字数：189 000

定价：20.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

第二版前言

为了适应高等学校对工科数学教学改革的要求，在学生掌握线性代数基本内容和基本方法的前提下，面对减少计划学时的客观现实，迫切需要一本适合学生自学且能够牢固地掌握知识的教材．本书就是基于这个指导思想，在西安工业大学进行了多次教学改革实践的基础上，根据数学与统计学教学指导委员会制定的《线性代数课程基本要求》，结合自身教学经验对第一版教材中的第二章、第三章，特别是第四章的内容进行了重新编写．

在本书的编写过程中，我们努力做到由浅入深、循序渐进，在内容的讲述和一些结论的证明过程中力求简单明了，便于自学．每章后都附有适量习题，用以复习和巩固本章内容，帮助读者对本章有个总体的了解，并据此将所学内容连贯起来．

本书所需学时为 32～48 学时，可满足普通高等学校工科各专业对“线性代数”课程的基本要求．

全书共 5 章．其中第 1 章由李花妮编写，第 2 章由马晓丽编写，第 3 章由曹黎侠编写，第 4 章由柴伟文编写，第 5 章由李晓红编写．

本书的编写得到西安工业大学教务处和理学院的大力支持，李选民教授仔细审阅了本书，并提出了许多宝贵意见；本书的顺利出版还得到了科学出版社的大力支持．在此一并予以感谢．

本书是为适应 21 世纪应用型本科教学需要而做的一种尝试．由于编者水平有限，书中难免存在不足与纰漏之处，恳请各位同行和读者批评指正．

编　者

2014 年 11 月

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式是一种基本的数学工具．本章主要介绍行列式的定义、性质及计算，最后给出应用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则(Cramer's Rule)．

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程组个数与未知量个数相同的一次方程组的问题中提出来的．例如，用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，解方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了表述方便起见，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

称式(1.3)为**二阶行列式**，它是由 2^2 个数组成的一个代数表达式，等于数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.4}$$

数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式(1.3)的**元素**，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列．

上述二阶行列式的定义可用对角线法则来记忆．如图 1.1 所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差，称为二阶行列式的**对角线法则**．

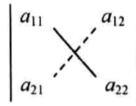

图 1.1

利用二阶行列式的概念，式(1.2)中 x_1,x_2 的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则解方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意,这里的分母 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21}所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.1 求解二元线性方程组$\begin{cases} 3x_1+x_2=9, \\ x_1-2x_2=-4. \end{cases}$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\times(-2)-1\times1=-7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=9\times(-2)-1\times(-4)=-14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=3\times(-4)-9\times1=-21,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-14}{-7}=2, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{-7}=3.$$

1.1.2 三阶行列式

对于 9 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$,记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**,它由 3^2 个数组成,也代表一个算式,等于数

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.5}$$

式(1.5)中右端含有 6 项，每项均为不同行、不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其代数和也可以用划线(图 1.2)的方法记忆，其中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的三个元素乘积是代数和中的负项．这种方法称为三阶行列式的对角线法则．

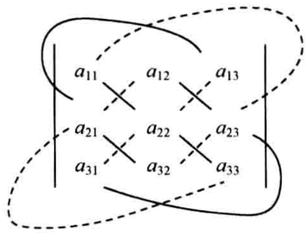

图 1.2

引入三阶行列式的概念后，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{33}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则用消元法求解这个方程组可得

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$为用常数 b_1,b_2,b_3 替换 D 中第 j 列所得的行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.2 求解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=9, \\ -2x_1+2x_2+x_3=1, \\ -3x_1+4x_2-2x_3=7. \end{cases}$

解 按对角线法则有

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4 \\ &\quad -(-4)\times2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4 \\ &= -14. \end{aligned}$$

同理

$$D_1=\begin{vmatrix}9&2&-4\\1&2&1\\7&4&-2\end{vmatrix}=-14,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&9&-4\\-2&1&1\\-3&7&-2\end{vmatrix}=-28,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&9\\-2&2&1\\-3&4&7\end{vmatrix}=14,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-1.$$

注 1.1 对角线法则只适合于二阶与三阶行列式．

1.2 全排列及逆序数

1.1 节引进了二阶和三阶行列式的概念，得到了求解二元一次方程组及三元一次方程组的行列式解法，该方法使得方程组的求解公式化．那么对于一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

能否类似地引入 n 阶行列式的概念，是否可得 n 元一次方程组的行列式一般解法呢？为此，先介绍全排列及逆序数的概念．

定义 1.1 将 n 个不同的元素按某种顺序排成一列，称为这 n 个元素的一个**全排列**(简称**排列**，也称 ***n* 级排列**)．

显然，当 $n>1$ 时，按不同的顺序，它们可以组成不同的排列，其排列的总数通常用 P_n 表示．例如，三个元素 1，2，3 可以组成以下 6 种全排列：123，132，213，231，312，321，故 $P_3=6$. 从 1 开始的连续 n 个正整数构成排列的总数为

$$P_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!\ .$$

在本章中所提到的排列中的各元素均为正整数，取 n 个元素的一个全排列表示 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列，记为 $a_1a_2\cdots a_n$.

对于 n 个不同的正整数，规定从小到大的顺序为**标准次序**，从小到大的排列称为**标准排列**，其他的排列都或多或少地改变了标准次序．

例如，4213 是 1，2，3，4 的一个排列，显然，它改变了标准排列 1234.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中，某两个元素 $a_i,a_j(i,j=1,2,\cdots,n)$，如果 $i<j$，而 $a_i>a_j$，则称数对 a_i,a_j 构成该排列的一个**逆序**．在一个排列中，逆序

的总数称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$.

例 1.3 求排列 4213 的逆序数 .

解 该排列中共有 4 与 2，4 与 1，4 与 3，2 与 1 这 4 个逆序，所以排列 4213 的逆序数是 4. 即 $\tau(4213)=4$.

给定排列 $a_1a_2\cdots a_n$，可以按照以下方法计算逆序数，设在第一个数 a_1 后面比它小的数有 t_1 个，在第二个数 a_2 后面比它小的数有 t_2 个，……，第 $n-1$ 个数 a_{n-1} 后面比它小的数有 t_{n-1} 个，则该排列的逆序数为

$$\tau(a_1a_2\cdots a_n)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}.$$

例如，

$$\tau(32514)=5,\quad \tau(n(n-1)\cdots 321)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

由逆序数定义 1.2 不难得出，标准排列的逆序数为零 .

定义 1.3 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个 n 级排列，若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个偶数，则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 为**偶排列**；若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个奇数，则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 为**奇排列** .

将一个排列中的某两个数码位置互换，而其余数码不动，则称为一次**对换** .

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性 .

推论 1.1 任何一个 n 元排列都可以通过若干次对换变成标准排列，并且所需对换的次数与该排列的逆序数有着相同的奇偶性 .

1.3 n 阶行列式的定义

1.1 节给出了二阶和三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},\end{aligned}$$

则由二阶和三阶行列式容易看出有如下结果：

(1) 二阶行列式表示所有位于不同行、不同列的两个元素的乘积的代数和 . 两个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中 j_1j_2 为 2 级排列 . 当 j_1j_2 取遍了 2 级排列 12，21 时，即得到二阶行列式的所有项(不包含符号)，共为 $2!=2$ 项 .

三阶行列式表示所有位于不同行、不同列的三个元素乘积的代数和，三个元素

的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 为 3 级排列．当 $j_1j_2j_3$ 取遍所有 3 级排列时，即得到三阶行列式的所有项（不包含符号），共为 3！＝6 项．

（2）每一项的符号如下：当这一项中元素的行列按标准排列后，如果对应的列标构成的排列的偶排列，则取正号．例如，三阶行列式中带正号的三项列标排列 123，231，312 都是偶排列，带负号的三项列标排列 132，213，321 都是奇排列．

综上所述，二阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1，2 的所有排列求和．三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1，2，3 的所有排列求和．

类似地，可给出 n 阶行列式的定义．

定义 1.4 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 按一定的次序排成 n 行 n 列，并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

称为 **n 阶行列式**，简记作 $\det(a_{ij})$．其中 a_{ij} 称为行列式第 i 行第 j 列元素．

定义 $$\det(a_{ij})=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.7}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和，故式(1.7) 是 $n!$项的代数和．

例如，四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中共有 4！＝24 项，其中含有一项 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，而 $\tau(1324)=1$，则 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 前面应冠以负号．同时，也含有另一项 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$，而 $\tau(3412)=4$，则

$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$前面应冠以正号.

例 1.4 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解 根据定义,D 是 $4!=24$ 项的代数和. 但是,由于 D 中不少元素为零,所以 24 项中有不少的项为零. 不为零的项只有 4 项:$acfh$,$bdeg$,$adeh$,$bcfg$,它们对应的列标排列依次为 1234,4321(偶排列),1324,4231(奇排列),因此

$$D=acfh+bdeg-adeh-bcfg.$$

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由于 D 的第一行除了 a_{11} 外,其他元素都是零,于是要得到非零项,第一行必须选 a_{11},第二行不能选 a_{21},因为第一列中只能选一个元素,所以在第二行中只能选非零元素 a_{22},同理,第三行只能选 a_{33},……,第 n 行只能选 a_{nn},这样,D 不含零元素的只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,又因为该项行标、列标都是按标准次序排列,前面的符号取正,所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的行列式称为**下三角行列式**.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**,从右上角到左下角的对角线称为**副对角线**.

类似可定义**上三角行列式**,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

例 1.6 证明如下对角行列式:

$$(1)\ D_1=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

$$(2)\ D_2=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0\\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n.$$

证明 (1) 因为 D_1 是上三角行列式的特殊情况,故结果显然.

现证(2). 由于行列式 D_2 不含零的项只有 $\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1$,而该项行标已按标准次序排列,列标排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots321)=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n.$$

1.4 行列式的性质

上节讲了行列式的定义,直接用行列式的定义计算行列式,一般来说是较烦琐的,因此必须对行列式作进一步的研究,找出切实可行的计算方法. 本节我们介绍行列式的性质.

若 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$,称 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 为 D 的转置行列式,记为 D^{T}.

行列式具有如下性质:

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明 分别用 a_{ij} 与 a'_{ij}表示 D 与 D^{T}中第 i 行第 j 列处的元. 则有 $a'_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,于是有 $D^{\mathrm{T}}=\sum\limits_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a'_{1k_1}a'_{2k_2}\cdots a'_{nk_n}=\sum\limits_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}=D$.

此性质说明了行列式中,行、列地位的对称性,行列式中行所具有的性质对列

也同样成立.

性质 1.2 互换行列式的两行(列),行列式变号,

即 $B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-D=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

证明 考查一般项 $a_{1j_1}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$ 的符号. 在行列式 B 中的符号是 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$,在行列式 D 中的符号是$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}$. 两者符号相反. 并且 B 与 D 的项完全相同.

推论 1.2 若行列式 D 中有两行(列)对应元素相同,则行列式为零.

这是因为互换 D 中相同的两行,由性质 2 知 $D=-D$,于是 $D=0$.

性质 1.3 用 k 乘行列式 D 中的某一行(列),等于以数 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.3 如果行列式 D 中某行(列)的所有元素有公因式,则公因式可以提到行列式前面.

推论 1.4 如果行列式 D 中有两行(列)的对应元素成比例,则 $D=0$.

推论 1.5 如果行列式 D 中某行(列)的所有元素全为零,则 $D=0$.

性质 1.4 如果行列式 D 中的某一行(列)的元素都是两数之和(设第 i 行元素都是两数之和),即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上面我们给出了行列式的一些基本性质,这些性质在计算和理论上都很重要．下面我们举例说明适当应用行列式的性质,可以简化行列式的计算．

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示行列式的第 i 列,交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$;第 i 行乘以数 k 记作 kr_i 或 $r_i\times k$;第 i 行提出因子 k 记作 $r_i\div k$;以数 k 乘第 j 行加到第 i 行记作 r_i+kr_j,对列也有类似记号,此时将 r 换成 c.

例 1.7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式的性质 1.5 和推论 1.4,

$$D\xlongequal{r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

例 1.8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$