LISAN SHUXUE

离散数学

主 编 王茂林

副主编 华洪波 张庆海

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

离散数学

主　编　王茂林
副主编　华洪波　张庆海
参　编　王红专　牛采银

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 / 王茂林主编. 一徐州:中国矿业大学出版社,2013.9

ISBN 978-7-5646-1968-8

Ⅰ.①离… Ⅱ.①王… Ⅲ.①离散数学 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第179614号

书　　名	离散数学
主　　编	王茂林
责任编辑	褚建萍
出版发行	中国矿业大学出版社有限责任公司 (江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线	(0516)83885307　83884995
出版服务	(0516)83885767　83884920
网　　址	http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷	江苏淮阴新华印刷厂
开　　本	787×960　1/16　**印张** 8　**字数** 180 千字
版次印次	2013 年 9 月第 1 版　2013 年 9 月第 1 次印刷
定　　价	18.00 元

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支,主要研究离散数量关系和离散结构的数学模型.离散数学为计算机科学技术的发展提供强有力的理论支撑,数据结构、操作系统、数据库技术、算法分析与设计、计算机网络、人工智能等都以离散数学为理论基础.该课程是计算机科学及信息类专业的核心课程之一.

本书共四个部分,分为九章,其中1～3章为集合论,4～5章为数理逻辑,6～7章为代数系统,8～9章为图论.本书简明扼要、深入浅出、层次分明、逻辑性强,各部分之间既相互独立,又密切联系.每章均配有适量的难易程度适中的练习题,不仅适合作为普通高等院校信息与计算科学和计算机科学等相关专业离散数学课程的本科生教材,也可供计算机科学工作者和科技人员阅读与参考.

本书的1～3章由王茂林编写,4～5章由张庆海编写,6～7章由牛采银编写,8～9章由王红专编写,全书由王茂林负责统稿.华洪波博士与王冬冬教授分别审阅了书稿,提出了诸多宝贵的修改意见.本书的编写得到了淮阴工学院数理学院以及教务处各级领导、同事的关心和大力支持.在此向关心和支持本书编写工作的各界人士表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中存在疏漏之处,恳请读者批评指正.

编　者

2013年6月

目　　录

第 1 章　集合及其运算

集合的概念是现代数学中最基本的概念之一，并已深入各种科学和技术的领域中．对于计算机科学工作者来说，集合的概念是不可缺少的．在开关理论、有限自动机、形式语言等领域中，集合论有着广泛的应用．本章介绍集合论的基础知识，主要内容包括集合及其运算、性质、计数等．

1.1　集合的概念及其表示

集合是数学中的一个最基本的概念，很难再用别的词来定义它．我们通常只是给予一种描述，即：把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来考虑时，这个整体便称为是一个集合．这里所说的“事物”也称“个体”，可以是在极其广泛的意义上使用，甚至包括抽象的事物．例如，全体中国人，一群鸟，所有整数等，分别可以构成集合．集合里所含有的个体叫做集合的元素．例如，全体中国人的集合，它的元素就是每一个中国人；一群鸟的集合，它的元素就是鸟群中的每一只鸟；所有整数的集合，它的元素就是每一个整数．通常用大写的英文字母表示集合的名称；用小写的英文字母表示集合的元素．例如，自然数集合 **N**、整数集合 **Z**，有理数集合 **Q**，实数集合 **R**，复数集合 **C** 等．

若元素 a 属于集合 A，记作 $a \in A$，读作“a 属于 A”；否则，若 a 不属于 A，就记为 $a \notin A$，读作“a 不属于 A”．一个集合，若其元素的个数是有限的，则称做“有限集”，否则就称做“无限集”．

集合的表示方法有两种：一种是列举法，它是将集合中的元素全部列出来，元素之间用逗号隔开，并用花括号括起来，表示这些元素构成整体．例如，

$$A = \{a, b, c, d\}$$

另一种是谓词法，它是利用谓词来概括集合中元素的属性．集合

$$B = \{x \mid P(x)\}$$

表示 B 由使 $P(x)$ 为真的全体 x 构成．例如，

$$B = \{x \mid x \in N \land x \leqslant 4\}$$

则 $B=\{1,2,3,4\}$.

关于集合的概念,还有一点需要注意的是,对作为集合的元素的个体,并没有给它们施加什么限制. 常常有一些集合,其元素本身也是集合.

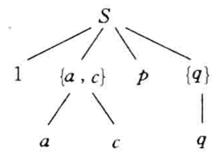

图 1-1

例如,如图 1-1 所示,$S=\{1,\{a,c\},p,\{q\}\}$,但必须注意:$q\in\{q\}$,而 $q\notin S$,同理 $a\in\{a,c\}$,$\{a,c\}\in S$,而 $a\notin S$.

在集合论中,我们还规定元素之间是彼此互异的,并且是无序的. 例如,集合 $\{a,b,c\}$,$\{b,c,a\}$,$\{a,b,b,c\}$ 都是同一个集合.

集合中元素可以是任何事物. 不含任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$.

例如,方程 $x^2+1=0$ 的实根的集合是空集.

下面我们来考虑两个集合之间的关系.

定义 1.1 设 A,B 是任意两个集合,如果 A 中的每一个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或 A 包含于 B 内,或 B 包含 A,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

例如:$A=\{0,1,2\}$,$B=\{0,1\}$,$C=\{1,2\}$,则有 $B\subseteq A$,$C\subseteq A$.

含有 n 个元素的集合简称为 n 元集,它的含有 m 个$(0\leqslant m\leqslant n)$元素的子集称为它的 m 元子集.

定义 1.2 设 A,B 是任意两个集合,如果 $B\subseteq A$ 且 $A\subseteq B$,则称 A 与 B **相等**,记 $A=B$.

定义 1.3 如果集合 A 的每一元素都属于集合 B,而集合 B 中至少有一元素不属于 A,则称 A 为 B 的**真子集**,记作 $A\subset B$.

例如,$\{0,1\}$是$\{0,1,2\}$的真子集.

注意:符号"$\in$"和"$\subseteq$"在概念上的区别,"$\in$"表示元素与集合间的"属于"关系,"$\subseteq$"表示集合间的"包含"关系.

定理 1.1 对于任一集合 A,$\varnothing\subseteq A$,且空集是唯一的.

证明 假设$\varnothing\subseteq A$ 为假,则至少存在一个元素 x,使 $x\in\varnothing$且 $x\notin A$,因为空集$\varnothing$不包含任何元素,所以这是不可能的.

设$\varnothing'$与$\varnothing$都是空集,由上述可知,$\varnothing'\subseteq\varnothing$且$\varnothing\subseteq\varnothing'$,由定义 1.2 可知$\varnothing'=\varnothing$,所以,空集是唯一的.

定义 1.4 在一定范围内,如果所有集合均为某一集合的子集,则称该集合为**全集**,记作 E.

注意:全集只包含与讨论有关的所有对象,并不一定包含一切对象与事物. 例如,在初等数论中,全体整数组成了全集;方程 $x^2+1=0$ 的解集合,在全集为实数集时为空集,而全集为复数集时解集合就不再是空集,此时解集合为

$\{i,-i\}$, $i^2=1$.

定义 1.5　给定集合 A，由集合 A 的所有子集为元素组成的集合，称为集合 A 的**幂集**，记为 $P(A)$（或记为 2^A），即 $P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$.

例 1.1　$A=\{a, b, c, d\}$，求 A 的幂集 $P(A)$.

解　将 A 的集合从大到小分类：

0 元子集，即空集，只有 1 个：$\varnothing$；

1 元子集，只有 C_3^1 个：$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$；

2 元子集，只有 C_3^2 个：$\{a,b\}$，$\{b,c\}$，$\{a,c\}$；

3 元子集，只有 C_3^3 个：$\{a,b,c\}$.

所以，

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

一般来说，对于 n 元集 A，它的 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 元子集有 C_n^m 个，所以不同的子集总数有

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$$

由二项式定理可知这个和为 2^n，所以 n 元集有 2^n 个子集.

1.2　集合的运算

这一节，我们将讨论集合的几种运算. 使用这些运算，通过对给定集合的元素进行组合，就能构成新的集合.

定义 1.6　设 A，B 为任意两集合，集合 A 和 B 的**并集** $A\cup B$、**交集** $A\cap B$，B 对于 A 的**相对补集** $A-B$ 分别定义如下：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

$$A-B=\{x\mid x\in A,x\notin B\}$$

例如，假设

$$A=\{1,2,3,4\},B=\{1,4\},C=\{3\}$$

则有

$$A\cup B=\{1,2,3,4\},A\cap B=\{1,4\},A-B=\{2,3\}$$

$$B-A=\varnothing,B\cap C=\varnothing$$

若两个集合的交集为 $\varnothing$，这时称两个集合是不交的. 例如上面例子中的 B 和 C 是不交的.

两个集合的交和并运算可以推广成 n 个集合的交和并：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2 \text{ 或} \cdots \text{ 或 } x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1, x \in A_2, \cdots, x \in A_n\}$$

简记作$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 和$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

交和并运算还可以推广到无穷多个集合的情况：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

定义 1.7 设 E 为全集，$A \subset E$，则称 A 对 E 的相对补集为 A 的**绝对补集**，记作$\sim A$，即

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

例如，

$$E = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1,2\}, B = \{0,1,2,3\}, C = \varnothing$$

则

$$\sim A = \{3\}, \sim B = \varnothing, \sim C = E$$

定义 1.8 设 A,B 为任意两集合，A，B 的对称差定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

例如

$$A = \{0,1,2\}, B = \{2,3\}$$

则有

$$A \oplus B = \{0,1\} \cup \{3\} = \{0,1,3\}$$

集合之间的相互关系和有关的运算还可以利用文氏图[英国数学家 Johan Wenn(1834～1883)提出]来描述，图 1-2 就是一些文氏图的实例.

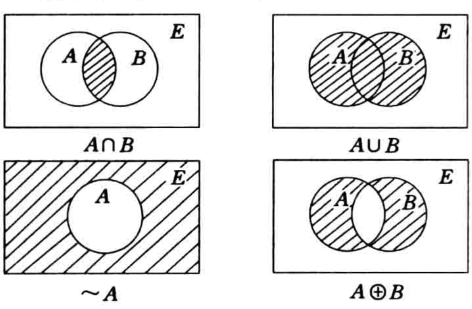

图 1-2

任何代数运算都遵从一定的算律，集合运算也不例外. 下面列出的是集合运算的主要算律，其中 A、B、C 表示任意的集合.

幂等律　$A\cup A=A$；　(1-1)

$A\cap A=A$.　(1-2)

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；　(1-3)

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.　(1-4)

交换律　$A\cup B=B\cup A$；　(1-5)

$A\cap B=B\cap A$.　(1-6)

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；　(1-7)

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.　(1-8)

同一律　$A\cup\varnothing=A$；　(1-9)

$A\cap E=A$.　(1-10)

零律　$A\cup E=E$；　(1-11)

$A\cap\varnothing=\varnothing$.　(1-12)

排中律　$A\cup\sim A=E$.　(1-13)

矛盾律　$A\cap\sim A=\varnothing$.　(1-14)

吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$；　(1-15)

$A\cap(A\cup B)=A$.　(1-16)

德摩根律　$A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$；　(1-17)

$A-(B\cap C)=(A-B)\cap(A-C)$；　(1-18)

$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$；　(1-19)

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$.　(1-20)

双重否定律　$\sim(\sim A)=A$.　(1-21)

以上恒等式的证明主要用到命题演算的等值式.

例 1.2　证明式(1-19)，即

$$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$$

证明　对于任意的 x，假设 $x\in\sim(A\cup B)$，则 $x\notin A\cup B$，因此 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，于是 $x\in\sim A$ 且 $x\in\sim B$，从而 $x\in\sim A\cap\sim B$，所以$\sim(A\cup B)\subseteq\sim A\cap\sim B$.

反之，对于任意的 x，假设 $x\in\sim A\cap\sim B$，则 $x\in\sim A$ 且 $x\in\sim B$，于是 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，因而 $x\notin A\cup B$，有 $x\in\sim(A\cup B)$，所以$\sim A\cap\sim B\subseteq\sim(A\cup B)$.

由上可知 $A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$.

除了以上的算律以外，还有一些关于集合运算性质的重要结果. 例如，

$$A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B \tag{1-22}$$

$$A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B \tag{1-23}$$

$$A-B\subseteq A \tag{1-24}$$

$$A-B=A\cap\sim B \tag{1-25}$$

$$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing \tag{1-26}$$

$$A\oplus B=B\oplus A \tag{1-27}$$

$$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C) \tag{1-28}$$

$$A\oplus\varnothing=A \tag{1-29}$$

$$A\oplus A=\varnothing \tag{1-30}$$

$$A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C \tag{1-31}$$

例 1.3 证明式(1-25)，即

$$A-B=A\cap\sim B$$

证明 对于任意的 x，假设 $x\in A-B$，则 $x\in A$ 且 $x\notin B$，因此 $x\in A$ 且 $x\in\sim B$，从而 $x\in A\cap\sim B$，所以 $A-B\subseteq A\cap\sim B$.

反之，对于任意的 x，假设 $x\in A\cap\sim B$，则 $x\in A$ 且 $x\in\sim B$，于是 $x\in A$ 且 $x\notin B$，因而 $x\in A-B$，所以 $A\cap\sim B\subseteq A-B$.

所以 $A-B=A\cap\sim B$.

式(1-25)建立了相对补运算和交运算之间的联系，可以利用它把相对补转变成交.

例 1.4 证明 $(A-B)\cup B=A\cup B$

证明

$$\begin{aligned}(A-B)\cup B&=(A\cap\sim B)\cup B\\&=(A\cup B)\cap(\sim B\cup B)\\&=(A\cup B)\cap E\\&=A\cup B\end{aligned}$$

式(1-26)给出了 $A\subseteq B$ 的 3 种等价的定义，不仅提供了证明两个集合之间包含关系的新方法，还可以用于集合公式的简化.

例 1.5 化简 $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$

解 因为 $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$，$A\subseteq A\cup(B-C)$，由式(1-26)有

$$(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)=A\cup B$$

$$(A\cup(B-C))\cap A=A$$

所以，原式是

$$(A\cup B)-A=B-A$$

式(1-27)～式(1-31)是关于对称差运算的算律，前四条可以通过对称差的

定义加以证明，最后一条叫消去律.

例 1.6　已知 $A\oplus B=A\oplus C$，证明 $B=C$.

证明　$A\oplus B=A\oplus C$　(已知)

所以　$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$　(结合律)

$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$　[式(1-28)]

$\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$　[式(1-30)]

所以　$B=C$　[式(1-27)和式(1-29)]

1.3　集合中元素的计数

设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，它含有 n 个元素，可以说集合 A 的基数是 n，记作 Card $A=n$. 基数是表示集合中所含元素多少的量. 如果集合 A 的基数是 n，可记为 $|A|=n$，这时称 A 为有穷集，显然空集的基数是 0，即 $|\varnothing|=0$. 如果 A 不是有穷集，则称 A 为无穷集.

使用文氏图可以很方便地解决有穷集的计数问题.

例 1.7　有 100 名程序员，其中 47 名熟悉 FORTRAN 语言，35 名熟悉 PASCAL 语言，23 名熟悉这两种语言的，问有多少人对两种语言都不熟悉的？

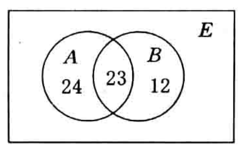

图 1-3

解　假设 A、B 分别为熟悉 FORTRAN 和 PASCAL 语言的程序员集合，则该问题可以由图 1-3 来表示. 先将熟悉两种语言的对应人数填入 $A\cap B$ 的区域内，不难得出 $A-B$ 和 $B-A$ 的人数分别为

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=47-23=24,$$

$$|B-A|=|B|-|A\cap B|=35-23=12,$$

从而得到

$$|A\cup B|=24+23+12=59$$

$$|\sim(A\cup B)|=100-59=41$$

所以两种语言都不熟悉的有 41 人.

上述有穷集合的计数问题也可以使用包含排斥原理求解.

定理 1.2　(包含排斥原理)设 S 为有穷集，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 n 个性质. S 中任何元素 x 或者具有性质 P_i，或者不具有性质 P_i，这两种情况必居其一. 令 A_i 表示 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集. 则 S 中不具有性质 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的元素数为

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{l \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| - \sum_{l \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

推论 S 中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{l \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cup A_j| + \sum_{l \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

根据包含排斥原理,例 1.7 中所求的元素数为

$$\begin{aligned} |\overline{A} \cap \overline{B}| &= |S| - (|A| + |B|) + |A \cap B| \\ &= 100 - 47 - 35 + 23 = 41 \end{aligned}$$

例 1.8 试求不超过 1 000 的自然数中能被 2 或 3 或 5 整除的数的个数.

解 设 $A = \{1,2,\cdots,1\,000\}$,这是研究对象的集合,在 A 上定义性质 P_1,P_2,P_3. 对任意 $n \in A$,若 n 具有性质 $P_1(P_2,P_3)$ 当且仅当 $2|n(3|n,5|n)$. 令 A_i 为 A 中具有性质 P_i 的数组成的子集,$i=1,2,3$,则

$$A_1 = \{2,4,6,\cdots,1\,000\} = \left\{2k \mid k=1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{1\,000}{2} \right\rfloor\right\},$$

$$A_2 = \{3,6,9,\cdots,999\} = \left\{3k \mid k=1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{1\,000}{3} \right\rfloor\right\},$$

$$A_3 = \{5,10,15,\cdots,1\,000\} = \left\{5k \mid k=1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{1\,000}{5} \right\rfloor\right\}.$$

于是,$|A_1| = \left\lfloor \frac{1\,000}{2} \right\rfloor = 500$,$|A_2| = \left\lfloor \frac{1\,000}{3} \right\rfloor = 333$,$|A_3| = \left\lfloor \frac{1\,000}{5} \right\rfloor = 200$.

而 $|A_1 \cap A_2| = \left|\left\{6k \mid k=1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{1\,000}{6} \right\rfloor\right\}\right| = \left\lfloor \frac{1\,000}{6} \right\rfloor = 166$;

$$|A_1 \cap A_3| = \left|\left\{10k \mid k=1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{1\,000}{10} \right\rfloor\right\}\right| = \left\lfloor \frac{1\,000}{10} \right\rfloor = 100;$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left|\left\{15k \mid k=1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{1\,000}{15} \right\rfloor\right\}\right| = \left\lfloor \frac{1\,000}{15} \right\rfloor = 66;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left|\left\{30k \mid k=1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{1\,000}{30} \right\rfloor\right\}\right| = \left\lfloor \frac{1\,000}{30} \right\rfloor = 33.$$

由定理 1.2 推论知

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (500+333+200) - (166+100+66) + 33 = 1\,033 - 332 + 33 = 734$.

所以，不超过 1 000 的自然数中，至少能被 2,3,5 之一整除的数共有 734 个.

习　题　1

1. 选择适当的谓词表示下列集合：

(1) 小于 10 的自然数集合；

(2) 偶整数集合.

2. 列举下列集合的元素：

(1) $S_1=\{x \mid 5<x\leqslant 11, x\in Z\}$；

(2) $S_2=\{x \mid x^2-10x-24<0, 5\leqslant x\leqslant 15, x\in Z\}$；

(3) $S_3=\{\langle x,y\rangle \mid 0\leqslant x<3, -1\leqslant y\leqslant 1, x,y\in Z\}$.

3. 举出集合 A、B、C 的例子，使其满足 $A\in B$，$B\in C$ 且 $A\notin C$.

4. 设 S、T、M 为任意集合，判断下面命题的真假：

(1) $\varnothing$是$\varnothing$的子集；

(2) 如果 $S\cup T=S\cup M$，则 $T=M$；

(3) 如果$\sim S\cup T=E$，则 $S\subseteq T$.

5. 给出下列集合幂集：

(1) $\{a,\{b\}\}$；

(2) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$.

6. 设 $A=\{a\}$，给出 A 和 2^A 的幂集.

7. 设 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$，求下列集合：

(1) $A\cap\sim B$；

(2) $(A\cap B)\cup\sim C$；

(3) $P(A)-P(B)$.

8. 化简下列集合表达式：

(1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)$；

(2) $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A$.

9. 画出下列集合的文氏图：

(1) $\sim A\cup(B\cap C)$；

(2) $(A\oplus B)-C$.

10. 设 A、B 两个集合，问：

(1) 如果 $A-B=B$，那么 A 和 B 有什么关系？

(2) 如果 $A-B=B-A$，那么 A 和 B 有什么关系？

11. 在一个班级中的50个学生中，有26人在离散数学的考试中取得优秀的成绩；有21人在数据结构的考试中取得优秀的成绩．假如有17人两次考试中都没有取得优秀成绩，问有多少学生在两次考试中都取得优秀成绩？

12. 设A、B、C代表任意集合，判断下列等式是否恒真．如果不为恒真请举反例．

(1) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$；

(2) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$；

(3) $(A\cup B)-(B\cup C)=A-C$.

13. 设A、B、C、D代表任意集合，判断下列命题是否恒真．如果不是，请举反例．

(1) $A\subset B\wedge C\subset D\Rightarrow A\cap C\subset B\cap D$；

(2) $A\subseteq B\Leftrightarrow B=A\cup(B-A)$.

14. 设$|A|=3$，$|P(B)|=64$，$|P(A\cup B)|=256$，求$|B|$、$|A\cap B|$、$|A-B|$、$|A\oplus B|$.

15. 求在1到1 000 000之间（包括1和1 000 000在内）有多少个整数既不是完全平方数也不是完全立方数？

第 2 章　二 元 关 系

与集合的概念一样，关系的概念在计算机科学中也是最基本的．它在有限自动机和形式语言理论中，在应用领域如编译程序设计、信息检索和数据结构的描写中经常出现．在算法分析和程序结构中，关系的概念也起着重要的作用．

这一章介绍序偶和笛卡儿积以及由笛卡儿积引出的关系的概念；说明如何用矩阵和图来表示关系；定义关系的复合运算；列举关系的几个主要性质；介绍一类重要的关系——等价关系；说明由等价关系如何导出分划．

2.1　集合的笛卡儿积

定义 2.1　由两个元素 x 和 y（允许 $x=y$）按一定的顺序排列成的二元组叫做有序对（也称序偶），记作 $<x,y>$．其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素．

平面直角坐标系中点的坐标就是有序对．例如，$<1,-1>$，$<2,0>$，$<-1,1>$…都是代表坐标系中不同的点．

一般来说序偶具有以下特点：

（1）当 $x\neq y$ 时，$<x,y>\neq<y,x>$；

（2）$<x,y>=<u,v>$ 的充分必要条件是 $x=u$ 且 $y=v$．

这些特点是集合 $\{x,y\}$ 所不具备，例如，当 $x\neq y$ 时，$\{x,y\}=\{y,x\}$．原因在于有序对 $<x,y>$ 中强调了 x 和 y 的顺序性，而集合 $\{x,y\}$ 中的 x 和 y 是无序的．

在实际问题中，有时会用到有序 3 元组、有序 4 元组、…、有序 n 元组．

定义 2.2　由 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 按照一定次序组成的 n 元数组叫做有序 n 元组，记作 $<x_1,x_2,\cdots,x_n>$．

下面我们定义一种新的集合运算——积运算．

定义 2.3　设 A、B 为任意两个集合，则称集合

$$\{<x,y>\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$$

为 A 和 B 的笛卡儿积，记为 $A\times B$．即