

○ 高等学校教材

高等数学

第二版 上册

○ 王嘉谋 石琳 编著

高等教育出版社



◎ 高等学校教材

高等数学

第二版 上册

GAODENG SHUXUE

◎ 王嘉谋 石琳 编著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是依据最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合作者长期的教学实践和经验编写而成的。在保持传统教材理论体系科学完整的前提下，充分考虑到中学数学到大学数学的过渡与衔接，力求结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂，富于启发性和便于自学。

全书分上、下两册，上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数应用，不定积分，定积分，定积分的应用，微分方程等七章。书末附有习题答案与提示，以及极坐标系简介、二阶和三阶行列式简介、几种常用的曲线、积分简表、初等数学常用公式、希腊字母表等内容。

本书可作为高等学校工科类各专业高等数学课程的教材，也可作为从事高等教育的教师和科研工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 王嘉谋, 石琳编著. -- 2版. --
北京: 高等教育出版社, 2015.8

ISBN 978-7-04-043039-4

I. ①高… II. ①王… ②石… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第138356号

策划编辑 杨帆
插图绘制 郝林

责任编辑 杨帆
责任校对 胡美萍

封面设计 王凌波
责任印制 赵义民

版式设计 余杨

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 北京市白帆印务有限公司
开本 787mm×960mm 1/16
印张 26.75
字数 490千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landracom.com>
<http://www.landracom.com.cn>
版 次 2011年8月第1版
2015年8月第2版
印 次 2015年8月第1次印刷
定 价 39.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 43039-00

第二版前言

《高等数学》第一版自出版以来,一直被我们采用为教材,已经历了几年教学实践的检验。我们根据在实践中积累的一些经验,并吸取使用本教材的同行们所提出的宝贵意见,对第一版进行了全面修订。在修订中,我们除了保留原教材结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学的特点外,尽量吸收国内外高等数学课程教学改革的最新成果,体现创新理念,使得教材更有利于激发学生自主学习,有助于提高学生的综合素质和创新能力。

本次修订在满足“工科类本科数学基础课程教学基本要求”的前提下,对原书的一些内容作了适当的修改:

一、增加了应用方面的例题,并补充了个别章节的习题。修改较多的部分涉及函数极限、导数运算、函数最值及微分方程部分应用问题举例。

二、为方便教和学的取舍,对个别内容或例题标注了*号。这部分内容可以根据实际需要有选择的教与学。

三、根据广大同行和读者的建议,修订时将“微分方程”一章内容调到上册作为第七章,而将原来作为上册第七章的“无穷级数”一章内容调到下册作为第十二章。

四、对有些章节存在的疏漏及不当的个别问题这次也一并作了修订。

这次修订过程中,我院广大教师提出了许多宝贵的意见和建议,对提高本书的质量起了很大的作用。高等教育出版社的领导和编辑们对本书的出版给予了热情支持和帮助,我们在此一并表示诚挚的谢意。

本次修订由王嘉谋、石琳组织,参与修订的人员包括石萍、张英琴、刘玉瑛、王培吉、张晓斌、陈溟、董艳、张红霞、章树玲、何莉敏、唐俊、张景、程慧琴、侯玉双、刘兴薇、赵娜、王娟、田红晓、刘忻梅。

尽管本书已是修订版,但限于我们的水平,错误和不妥之处仍在所难免,诚盼使用本书的同行和广大读者不吝指教,以便进一步完善。

编者

2015年1月

第一版前言

微积分是近代数学最伟大的成就。由于它在各个领域的广泛应用,以微积分为主要内容的“高等数学”成为大学中最重要的基础课程之一。这门课程对培养学生的思维能力、数学应用能力和分析判断能力都起着非常重要的作用。

进入 21 世纪,我国高等教育有了迅速的发展,从精英教育到大众化教育,教育规模不断扩大,教育对象和教育结构有了较大的变化。为适应新的高等教育形势,体现教育改革的设想和思路,我们广泛听取了具有丰富教学经验的教师 and 学生的意见,并根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和“应用型本科大学”的特点,经过反复研讨,编写了这本教材。本教材有如下特色:

1. 对重要的概念和定理,尽可能地从几何直观或物理背景提出问题,然后经过分析和论证上升到一般的概念和结论,最后归纳出定义和定理,目的在于培养学生的创新意识和创新能力。

2. 进一步强调一些重要定义、定理和公式的物理意义或几何内涵,这样做能使学生认识到数学作为一种自然科学语言具有精确的描述能力,从而激发学生学习的兴趣。

3. 在数学公式的推导及应用时,尽量采用数学建模的方法和观点。即“分析实际问题(抽象简化)——建立数学模型(化为数学问题)——获得数学解(应用公式和算法)——解释实际问题(讨论解的合理性)”,这样将有利于提高学生对数学的应用意识和应用能力。

4. 不断强调一些重要的数学思想,如:在微分学中的“局部以直代曲”;在积分学中“化整为零——局部以直代曲——积零为整”;泰勒公式和函数展开成幂级数中的“以简单代替复杂”,等。这样做将有利于学生通过学习高等数学受到数学思想方法的熏陶,使思维品质得以提升。

5. 合理安排教材中概念与理论、方法与技巧和应用与实践这三部分内容;加强几何和数值方面对数学概念的分析,从多方面培养学生理性思维,注意克服偏重分析运算和运算技巧的倾向,加强实践环节,重视应用能力的培养。

6. 对弧微分采用直观图形与夹逼准则相结合的新方法进行推导,避免了传统教材中的某些不足。

7. 修正了当前部分高等数学教材中常见的一些瑕疵及不妥之处。

总之,本教材力求恰当地处理归纳法与演绎法、数学的发现与知识的传授、加强实际应用与理论分析能力培养之间的关系。尽量做到结构严谨,逻辑清晰,

叙述详细,通俗易懂。

在编写本教材过程中,参考了大量的国内外高等数学优秀教材,从中吸取了丰富的营养,在此对作者们表示深深的感谢。

本书由王嘉谋、石琳主编,参编人员包括石萍、刘玉瑛、何莉敏、董艳、章树玲、陈溟、王尚户、张英琴、王培吉、张晓斌、孙玉琴、张红霞。

全书由王嘉谋、石琳负责统稿及审校。

本教材虽经多年教学经验积累而成,但由于编者学识有限,不妥甚至谬误之处恐也在所难免,敬请读者批评指正。

编者

2011年3月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第一章	函数、极限与连续	1
1.1	函数	1
1.2	数列的极限	19
1.3	函数的极限	26
1.4	极限的基本性质	33
1.5	无穷小与无穷大	38
1.6	极限运算法则	43
1.7	极限存在准则与两个重要极限	49
1.8	函数的连续性	60
1.9	闭区间上连续函数的性质	70
第二章	导数与微分	75
2.1	导数概念	75
2.2	导数的运算法则	85
2.3	隐函数和由参数方程所确定的函数的导数	96
2.4	高阶导数	101
2.5	导数的简单应用	108
2.6	函数的微分	114
第三章	微分学中值定理及导数应用	126
3.1	微分中值定理	126
3.2	洛必达法则	136
3.3	泰勒公式	143
3.4	函数的单调性与极值	154
3.5	曲线的凹凸性与拐点	163
3.6	函数图形的描绘	169
3.7	曲线的曲率	173
3.8	最值及其应用问题举例	182

第四章	不定积分	192
4.1	原函数与不定积分	192
4.2	不定积分的换元积分法	202
4.3	分部积分法	216
4.4	几种特殊类型的积分	222
第五章	定积分	233
5.1	定积分的概念及性质	233
5.2	微积分学基本定理	245
5.3	定积分的换元积分法与分部积分法	255
5.4	广义积分	268
5.5	定积分的近似计算	279
第六章	定积分的应用	286
6.1	建立积分表达式的微元法	286
6.2	定积分的几何应用	288
6.3	定积分在物理上的应用	303
第七章	微分方程	316
7.1	微分方程的基本概念	316
7.2	一阶微分方程	320
7.3	可降阶的高阶微分方程	332
7.4	高阶线性微分方程	338
7.5	常系数齐次线性微分方程	346
7.6	二阶常系数非齐次线性微分方程	350
*7.7	微分方程的应用	357
	习题答案与提示	372
附录一	极坐标系简介	398
附录二	二阶和三阶行列式简介	403
附录三	几种常用的曲线	407
附录四	积分简表	410
附录五	初等数学常用公式	414
附录六	希腊字母表	416

第一章 函数、极限与连续

高等数学研究的主要对象是函数. 研究函数的主要依据是极限理论及其方法. 函数的有关知识中学已经学过. 本章在复习函数有关内容的基础上, 介绍极限和函数连续等基本概念及其性质.

1.1 函 数

一、集合及其运算

1. 集合

集合是数学的一个基本概念, 是学习现代数学的基础.

集合是具有某种特定性质的事物或对象的全体, 构成集合的事物或对象称为集合的元素.

通常用大写字母 A, B, C 等表示集合, 用小写字母 a, b, c 等表示集合的元素. 给定一个集合, 集合中的元素就确定了, 任何一个事物或者是集合中的元素, 或者不是集合中的元素.

如果 a 是集合 A 的元素, 称 a 属于 A , 记为 $a \in A$; 否则就称 a 不属于 A , 记为 $a \notin A$.

集合常用列举法和描述法来表示.

列举法是将集合的元素一一列出. 如自然数集就可以表示为

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

描述法是通过描述集合中元素所具有的性质来表示集合, 一般表示为

$$A = \{a | a \text{ 具有性质 } P\}.$$

如大于 $\sqrt{2}$ 的实数可以表示为

$$A = \{x | x > \sqrt{2}\}.$$

有时一个集合可以用不同的方法表示, 不管用什么方法表示集合, 只要集合中的元素是一样的, 就表示同一个集合. 例如, 集合 $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ 与集合 $\{-1, 1\}$ 是同一个集合.

只有有限个元素的集合称为有限集; 不含任何元素的集合称为空集, 记为 \emptyset ; 既不是有限集, 又不是空集的集合称为无限集.

如 $\mathbf{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ ——正整数集,

$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ ——整数集,

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}_+, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互素} \right\}$ ——有理数集,

全体实数构成的集合 \mathbf{R} 等都是无限集.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 就称集合 A 是集合 B 的一个子集, 记为 $A \subset B$. 例如, 一个班级中的全体女生是这个班级学生组成的集合的子集. 当 A 是 B 的子集, 而 B 又是 A 的子集时, 称集合 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

2. 集合的运算

设有集合 A 与 B , A 与 B 的并集记为 $A \cup B$, 是所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

集合 A 与 B 的交集记为 $A \cap B$, 是所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

集合 A 与 B 的差集记为 $A \setminus B$ 或 $A - B$, 是所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\};$$

显然有

$$A \setminus B \subset A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

集合的运算有下面的规律:

$$(1) A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

$$(2) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$(3) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$(4) A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

3. 区间和邻域

区间是微积分中最常见的数集. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$. 如图 1.1 所示, 各类区间定义如下:

$$\text{闭区间 } [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$$

$$\text{开区间 } (a, b) = \{x \mid a < x < b\};$$

$$\text{左开右闭区间 } (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\};$$

$$\text{左闭右开区间 } [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}.$$

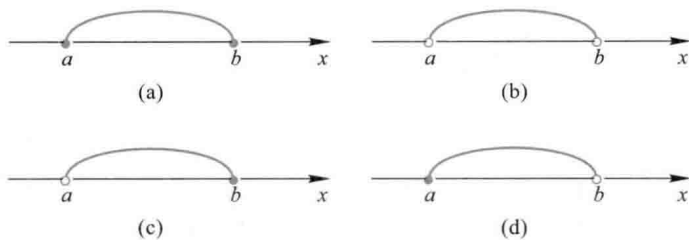


图 1.1

上面这些区间统称为有限区间, 其中 a, b 称为这些区间的端点, $b - a$ 是这几种区间的长度. 除了有限区间, 还有无限区间, 如图 1.2 所示, 无限区间的定义如下:

- $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\};$
- $(a, +\infty) = \{x | x > a\};$
- $(-\infty, a] = \{x | -\infty < x \leq a\};$
- $(-\infty, a) = \{x | -\infty < x < a\};$
- $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$

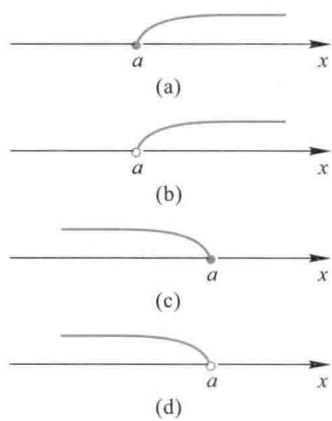


图 1.2

邻域是一种特殊的区间. 如图 1.3 所示, 设 $a, \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 称数集 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a; \delta)$. a 叫做这个邻域的中心, δ 叫做邻域的半径. 于是有

$$U(a; \delta) = (a - \delta, a + \delta).$$

称数集 $\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a; \delta)$. 于是有

$$\overset{\circ}{U}(a; \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta).$$

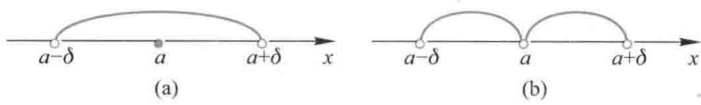


图 1.3

二、函数

1. 函数的概念

在自然界中有些量在某个过程中可取不同数值, 则称这个量在该过程中为变量, 变量通常用字母 x, y, z 等表示; 有些量在某个过程中只取同一个数值, 则称

这个量在该过程中为常量, 常量通常用字母 a, b, c 等表示. 各种变量之间会相互影响, 如果两个变量之间有着确定性的依赖关系, 即从某个量的值按某规则可以唯一确定另一个量的值, 那么这种依赖关系就是我们要研究的函数关系.

定义 1 设有两个变量 x 与 y , 其中变量 x 在数集 D 中取值. 如果对于每个 $x \in D$, 按照某个确定的对应法则 f , 变量 $y \in W$ 总有唯一的值与它对应, 则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的函数, 记作

$$f: D \rightarrow W;$$

或

$$f: x \mapsto y, \quad x \in D;$$

或

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 称为函数 f 的自变量, y 称为函数 f 的因变量, D 称为函数 f 的定义域. 与 $x_0 \in D$ 对应的值 $y_0 = f(x_0)$ 称为函数 f 在点 x_0 处的函数值, 函数值的全体

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\} = f(D).$$

集合 W 称为函数 f 的值域.

在不需要指出定义域时, 函数可以简写为 $y = f(x)$, 并且约定, 若不特别指出函数 $y = f(x)$ 的定义域, 则这个函数的定义域就是使函数 $f(x)$ 有意义的一切 x . 如 $y = \sqrt{x}$ 的定义域就是 $\{x | x \geq 0\}$.

注 1 在定义中, 我们要求对定义域中每一个 x , 只有唯一的值 y 与之对应, 这样定义的函数也称为单值函数. 如果有不止一个 y 值与 x 对应, 这时对应法则并不满足函数的定义, 但习惯上称为多值函数. 除非有特殊说明, 本书中涉及的都是单值函数.

注 2 如果对于定义域中不同的 x , 其对应的 y 值也不同, 即当 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ 时, $f(x_1) \neq f(x_2)$, 我们称这类函数为一一对应函数, 简称一一对应.

对于定义域, 除了考虑数学表达式本身的意义外, 还应考虑函数的实际意义. 例如, 圆的面积 S 是圆的半径 r 的函数: $S = \pi r^2$, 由于圆的半径应该大于 0, 所以定义域是 $(0, +\infty)$; 一天中的气温 T 是该天时刻 t 的函数: $T = T(t)$, 一天有 24 小时, 所以定义域是 $[0, 24]$.

一个函数要涉及很多概念, 其中定义域和对应法则是重要的, 是函数的两个要素. 因为有了自变量的定义域, 有了关于定义域的对应法则, 一个函数就被确定了.

有一种特殊的函数, 无论自变量如何变化, 其函数值始终取同一个常数, 这类函数称为常量函数.

例 1 设 C 为常数, 则 $y = C$ 是常量函数, 定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $\{C\}$. 其实, 将函数写为 $y = C(\sin^2 x + \cos^2 x) = C$, 就看得更为清楚.

例 2 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

为分段函数, 定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $\{-1, 0, 1\}$, 它的图形如图 1.4 所示, 对任何 $x \in \mathbf{R}$, 有 $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$ 或 $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

例 3 取整函数

对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 用记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 从而得到定义在 \mathbf{R} 上的函数

$$y = [x],$$

称此函数为取整函数, $[x]$ 称为 x 的整数部分. 如 $[0.3] = 0, [1.52] = 1, [-1] = -1, [-1.52] = -2$. $y = [x]$ 的定义域是 \mathbf{R} , 值域是 \mathbf{Z} , 如图 1.5 所示, 这是一个阶梯函数, 也是分段函数.

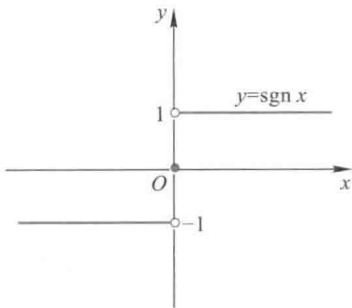


图 1.4

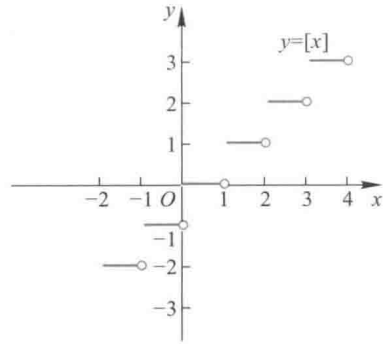


图 1.5

例 4 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数,} \\ 0, & x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

这个函数可以描述为: 当 x 为有理数时, $D(x) = 1$; 当 x 为无理数时, $D(x) = 0$. 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $\{0, 1\}$, 但是, 由于任意两个有理数之间都有无理数, 并且任意两个无理数之间也都有有理数, 所以它的图形无法描绘.

例 5 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

是一个分段函数, 定义域是 $(-\infty, 2]$, 值域是 $[0, +\infty)$, 图形见图 1.6.

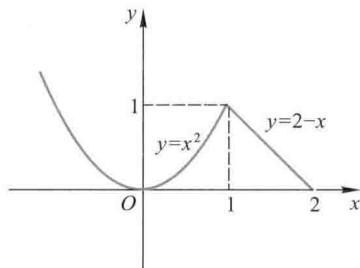


图 1.6

当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x) = x^2$. 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2 - x$. 例如, $-1 \in (-\infty, 1]$, 所以 $f(-1) = (-1)^2 = 1$, $\frac{3}{2} \in (1, 2]$, 所以 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. 如果要求 $f(x-1)$, 可将 x 以 $x-1$ 替换, 得

$$f(x-1) = \begin{cases} (x-1)^2, & x-1 \leq 1, \\ 2-(x-1), & 1 < x-1 \leq 2, \end{cases}$$

即

$$f(x-1) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 2, \\ 3-x, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

2. 具有某种特性的函数

(1) 有界函数 — 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subset D$, 如果存在正数 M , 使对任意的 $x \in I$, 都有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界. 也就是说, 若对任意给定的正数 M , 总存在 $x_1 \in I$, 使得 $|f(x_1)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

如果存在 $M_1 \in \mathbf{R}$, 使得对任一 $x \in I$, 都有 $f(x) \leq M_1$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有上界, M_1 是 $f(x)$ 的一个上界; 如果存在 $M_2 \in \mathbf{R}$, 使得对任一 $x \in I$, 都有 $f(x) \geq M_2$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有下界, M_2 是 $f(x)$ 的一个下界. 显然, 函数 $f(x)$ 在 I 上有界的充要条件是它既有上界又有下界.

常常讨论函数在其定义域上的有界性.

例如, 函数 $y = \sin x$, 因为对任一 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $-1 \leq \sin x \leq 1$, 即 $|\sin x| \leq 1$, 所以, 函数 $y = \sin x$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上既有上界又有下界, 是有界函数.

又如函数 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是无界的, 因为不存在一个正数 M , 使得 $|\ln x| \leq M$ 对于任意 $x \in (0, +\infty)$ 都成立. 但是, 函数 $f(x) = \ln x$ 在区间 $[1, 2]$ 内是有界的. 因为取 $M = \ln 2$, 对于任一 $x \in [1, 2]$, 都有 $|\ln x| \leq \ln 2$ 成立.

由此可见, 在讨论函数的有界性时, 必须指明所在的区间. 一个函数可能在它的整个定义域内有界, 也可能仅在定义域的部分区间内有界.

(2) 奇偶函数 — 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意的 $x \in D$, 总有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是偶函数; 如果对于任意的 $x \in D$, 总有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

例如, 对于正整数次幂函数 $f(x) = x^n$, 当 n 为偶数时, 它是偶函数, 当 n 为奇数时, 它是奇函数.

又例如, $f(x) = x^4 - 2x^2$ 是偶函数 (图 1.7), 因为 $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$. $f(x) = \frac{1}{x}$ 是奇函数 (图 1.8), 因为

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$. $f(x) = \sin x + 1$ 既非偶函数又非奇函数 (图 1.9).

可见, 函数的奇偶性刻画了这个函数的图形关于原点的中心对称性质或关于 y 轴的轴对称性质. 所以对这种函数, 常常只需考虑 $x \geq 0$ 时的情形.

(3) 单调函数 — 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 总有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

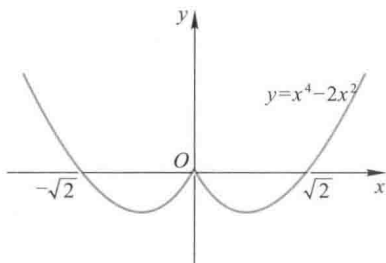


图 1.7

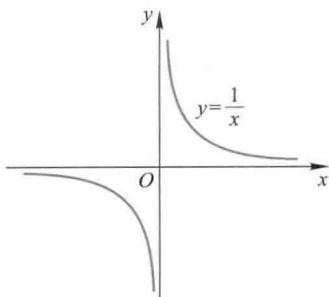


图 1.8

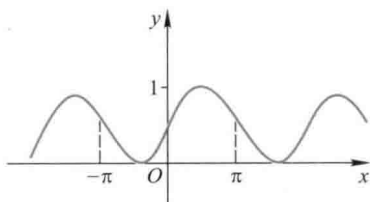


图 1.9

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是 (严格) 单调增加的; 如果总有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是 (严格) 单调减少的.

单调增加或单调减少的函数都称为单调函数.

例如, 函数 $f(x) = e^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的; 函数 $f(x) = e^{-x}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调减少的 (图 1.10); 而函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的, 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的 (图 1.11).

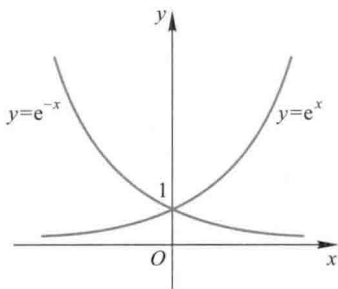


图 1.10

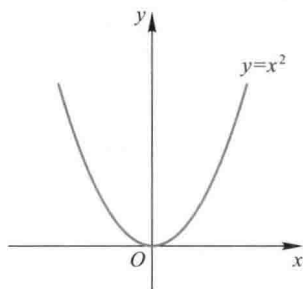


图 1.11

由此可见, 讨论函数的单调性也必须强调 x 所在的区间.

(4) 周期函数 — 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D \subset \mathbf{R}$, 如果存在一个正数 T , 使对于任意的 $x \in D$, 都有 $(x \pm T) \in D$, 且

$$f(x + T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们所说周期函数的周期是指最小正周期.