金融数学

理论与方法

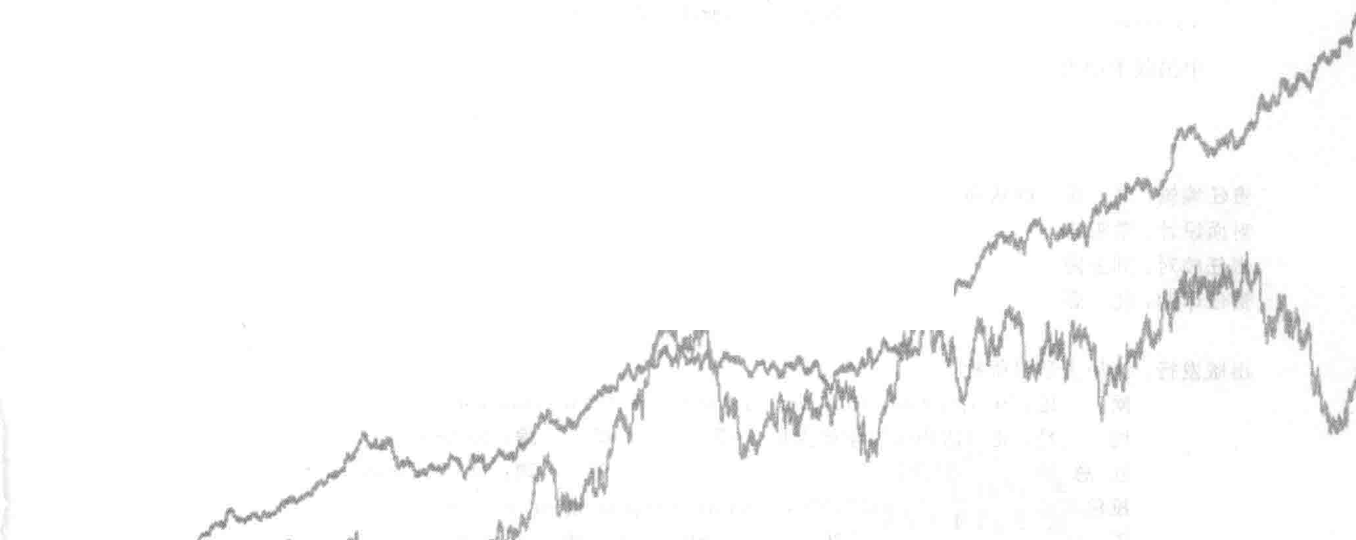
王生喜 编著

清华大学出版社

金融数学

理论与方法

王生喜 编著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书分3篇12章介绍金融数学基础知识、基本理论和主要模型.上篇包括学习金融数学所需要的随机分析、偏微分方程及金融衍生证券基础知识，中篇包括现值、风险与套利、资产选择、二叉树及Black-Scholes模型等金融数学基本模型，下篇介绍若干金融数学专题，包括Black-Scholes模型推广、一些重要的期权模型、随机利率模型及半鞅模型.本书以金融市场实践为背景，以无套利均衡理论为主线，关注学术前沿，突出理论模型与金融市场的有机衔接，兼顾了知识的严谨性和可读性.

本书适合作为金融类、应用数学类、统计类、管理类高年级本科生及研究生的教学用书，也可供从事上述专业教学的青年教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

金融数学理论与方法/王生喜编著. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-41199-4

Ⅰ.①金…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①金融—经济数学　Ⅳ.①F830

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第184833号

责任编辑：刘　颖　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：16　　**字　　数**：348千字
版　　次：2015年9月第1版　　**印　　次**：2015年9月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：35.00元

产品编号：066380-01

前 言

纵观现代经济学的发展轨迹我们发现，几乎所有的经济学分支对数学的依赖程度都呈现出日渐增强的趋势，其中的金融学更是如此. 一方面，现代数学早已成为金融学家研究和解决金融问题的基本工具. 他们应用现有的数学理论和方法构建金融模型，创新金融理论，极大地拓展了金融学的外延，丰富了金融学的内涵. 出自“象牙塔”中的许多金融数学模型，在现实的金融市场中大放异彩. 另一方面，金融学的研究和实践不断提出新的数学问题，继而催生出新的数学理论与方法，金融学由此成为现代数学发展和创新的重要源泉. 金融数学正是在现代金融理论快速发展的进程中诞生的一门新兴交叉学科. 顾名思义，金融数学就是金融理论与金融实践中涉及的数学理论与方法. 形象地说，金融数学属于金融学的一个“衍生品”.

迄今为止，国内外学者及业界对金融数学概念的外延及内涵尚未形成明确的界定，对金融数学内容体系的看法及观点尚处于“仁者见仁，智者见智”的阶段. 这种“百家争鸣”的格局为金融数学提供了巨大的发展空间，也为探索金融数学的差异化教学以及个性化研究带来了前所未有的机遇. 在这样的背景下，本书作者有幸成为金融数学百花园中一名快乐的园丁，试图在这片沃土上栽培出别样的花草.

基于本书作者对金融数学的学习体验、选择偏好及思维惯性，经过反复斟酌，最终确定以 3 篇 12 章的结构形式向读者介绍金融数学的基础知识、基本理论和若干重要模型. 上篇（第 1～4 章）包括学习金融数学所需要的概率论、随机分析、偏微分方程及金融衍生证券基础知识；中篇（第 5～8 章）包括现值、风险与套利、资产选择、二叉树及 Black-Scholes 模型等金融数学基本模型；下篇（第 9～12 章）介绍若干金融数学专题，包括 Black-Scholes 模型推广、几类重要的期权模型、随机利率模型以及半鞅模型.

本书以金融市场实践为背景，以无套利均衡理论为主线，既关注学术前沿，又强调理论模型与金融市场的有机衔接. 书中突出无套利思想的数学刻画，通过对一系列金融模型的构建，着重展示了鞅方法在复制金融产品套期保值策略过程中的重要性、普适性与简洁性.

作者在本书写作中充分考虑了初学者的需求，兼顾了相关知识的严谨性和可读性. 为提高初学者的学习效率，本书为前 8 章（上篇和中篇）配备了习题，书后附有全部习题的参考解

答.限于篇幅,书中略去了大部分定理的证明或推导.只要具备微观经济学、高等数学及初等概率论的读者,均可顺利阅读本书中的大部分内容,有效掌握金融数学的基本知识、基本方法与主要模型,为进一步学习和研究现代金融理论,探索金融市场规律奠定较为坚实的数学基础.

在本书的写作过程中,作者参阅了大量中外文献,其中部分章节的内容直接来源于这些文献资料.本人在此特别提及并鸣谢下述作者以及他们的相关著作:严加安(1981,2012),史树中(2004,2006),施利亚耶夫 A H(2008,2013),蒋殿春(2001),郭宇权(2012),姜礼尚(2003),张波(2014),黄志远(2001),唐亚勇(2012),Baxter M,Rennie A(1996),Alison Etheridge(2002),Shreve S E(2003),Delbaen F,Schachermayer W(2005),等等.

作者衷心感谢清华大学出版社的鼎力资助,感谢出版编辑刘颖老师、赵从棉老师以及未曾谋面的其他编辑朋友,他们为本书的出版发行倾注了大量的心血.

衷心感谢关心此书的所有亲朋好友和每一位读者朋友.

书中的谬误及疏漏均由作者自负其责,欢迎读者批评指正.

作　者

2015 年 8 月

目　录 »»

上篇　金融数学基础概要

中篇　金融数学基本模型

下篇　金融数学专题导引

上篇

金融数学基础概要

第1章

概率论基础

公理化的概率论是构造连续时间金融随机模型的数学基础.本章在学习初等概率论的基础上,适度融入了测度论的概念、思想与方法,简要介绍了 Riemann-Stieltjes 积分、关于概率测度的 Lebesgue 积分、特征函数、一般条件期望及收敛性等基础知识.

1.1 概率空间

定义 1.1 设 Ω 是一个样本空间(样本点的集合),$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的某些子集构成的集类.若 $\mathscr{F}$ 满足以下条件:

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;(2) $A\in\mathscr{F}\Rightarrow A^c=\Omega\backslash A\in\mathscr{F}$;(3) $A_n\in\mathscr{F}(1,2,\cdots,n,\cdots)\Rightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$

则称 $\mathscr{F}$ 为 σ 代数或 σ 域,并称 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间,$\mathscr{F}$ 中的元素称为可测集或随机事件.本书中也称 $\mathscr{F}$ 为事件域.

容易验证,若 $\mathscr{F}$ 是事件的 σ 代数,则

(1) $\varnothing\in\mathscr{F}$;(2) 当 $A_n\in\mathscr{F},n\geqslant1$ 时,必有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

在金融分析中,σ 代数(事件域)被认为是一种相关事件出现与否的信息汇集形式.

例 1 抛掷一枚均匀硬币,记 H="正面向上",T="反面向上".

(1) 如果只抛掷硬币一次,则样本空间 $\Omega=\{H,T\}$,定义 $\mathscr{F}=\{\varnothing,\Omega,\{H\},\{T\}\}$,则 $\mathscr{F}$ 为包含 Ω 全部子集的 σ 代数(事件域).$\mathscr{F}$ 仅有一个真子 σ 代数 $\mathscr{G}=\{\varnothing,\Omega\}$.

(2) 如果连续抛掷一枚硬币两次,则样本空间 $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$,包含 Ω 全部子集的 σ 代数如下:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}=\{&\varnothing,\Omega,\{HH\},\{HT\},\{TH\},\{TT\},\{HH,HT\},\{HH,TH\},\{HH,TT\},\\&\{HT,TH\},\{HT,TT\},\{TH,TT\},\{HH,HT,TH\},\{HH,TH,TT\},\\&\{HH,HT,TT\},\{HH,TH,TT\}\}\end{aligned}$$

$\mathscr{F}$中包含了样本空间 $\Omega=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH},\mathrm{TT}\}$中所有可能的 $2^4=16$ 个随机事件.如果我们只关心“硬币在两次抛掷中都是正面向上”这一事件,则与此相关的 σ 代数为

$$\mathscr{G}=\{\varnothing,\Omega,\{\mathrm{HH}\},\{\mathrm{HT},\mathrm{TH},\mathrm{TT}\}\}$$

显然 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$,即 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数.

例 2 抛掷一颗骰子,记 ω_i=“i 点向上”,则样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.定义

$$F=\{\varnothing,\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_6\},\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1,\omega_3\},\cdots,$$
$$\{\omega_1,\omega_6\},\cdots,\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}\}$$

即集类 $\mathscr{F}$ 由 Ω 的全部子集构成.$\mathscr{F}$ 中共有 $C_6^0+C_6^1+\cdots+C_6^6=2^6=64$ 个不同的事件(集合).容易验证 $\mathscr{F}$ 是 σ 代数(事件域).

本例中,设 $\mathscr{G}=\sigma(A)$是包含事件 $A=\{\omega_1,\omega_2\}$的最小 σ 代数.容易验证,$\mathscr{G}$ 具有如下的形式:$\mathscr{G}=\{\varnothing,\Omega,A,\overline{A}\}=\{\varnothing,\Omega,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}\}$,通常也称该 σ 代数由事件 A 生成.易知 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$,即 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数.如果我们只关心事件 $A=\{\omega_1,\omega_2\}$是否发生,则用 σ 代数 $\mathscr{G}$ 描述我们所关心的问题就已经足够.容易看出,本例中 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数还有很多.

不难理解,如果认为 Ω 的全部子集都是事件,则包含 Ω 全部子集的 σ 代数中 $\mathscr{F}$ 描述了一个样本空间上所有事件的状态及信息结构.$\mathscr{F}$ 的子 σ 代数描述样本空间上我们所关心的部分事件的状态及信息结构.

包含 Ω 全部子集的 σ 代数 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$统称为平凡 σ 代数,对于 $\mathscr{F}$ 的任意非平凡子 σ 代数 $\mathscr{G}$,$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$.

实际应用中,如果样本空间 Ω 至多可列,则研究包含 Ω 全部子集的 σ 代数是有意义的,即 Ω 的任意子集都可以看做随机事件.如果样本空间 Ω 是不可列集(例如区间 $\Omega=[0,1]$),则由于包含 Ω 全部子集的 σ 代数(集类)太大而失去意义.换句话说,在不可列的样本空间 Ω 上,并非 Ω 的任意子集都是随机事件.对于这样的样本空间,我们只考虑非平凡的 σ 代数.由此可知,σ 代数(事件域)的引入,主要是为了解决非可列样本空间上的相关问题.

定义 1.2 设 $\Omega=\mathbb{R}$,包含集族$\{(-\infty,x),x\in\mathbb{R}\}$的最小 σ 代数称为$\mathbb{R}$上的 Borel-σ 数代数,记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$,其中的元素称为 Borel 集.

由定义 1.2,Borel-σ 代数 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$是由所有半无限区间$(-\infty,x)$生成的集类,$\mathbb{R}$上的各种区间及所有的单点集、可列集等都是 Borel 集.Borel 集实际上是实数区间的自然推广,例如 $A=\{0\}\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}(k,k+1)$就是 Borel 集.类似地,可定义$\mathbb{R}^n$上的 Borel-$\sigma$ 代数 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

定义 1.3 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间,$P(\cdot)$是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数.如果满足以下条件:

(1) 对任意事件 $A\in\mathscr{F}$,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) $R(\Omega)=1$;

(3) 对两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$(即当 $i\neq j$ 时,$A_i\cap A_j=\varnothing$)有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 P 是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率测度,实数 $P(A)$为随机事件 A 发生的概率,并称三元组$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一个概率空间.

随机事件的概率具有如下基本性质:

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) 若 $A,B\in\mathscr{F}$,则 $P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$;

(3) 若 $A,B\in\mathscr{F}$,且 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$(单调性);

(4) 若 $A,B\in\mathscr{F}$,且 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$;

(5) 若 $A_n\in\mathscr{F},n\geqslant 1$,则 $P(\bigcup\limits_{n\geqslant 1}A_n)\leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1}P(A_n)$;

(6) 若 $A_n\in\mathscr{F}$,且 $A_n\uparrow A$(即 $A_{n+1}\subset A_n,n\geqslant 1$),且 $\bigcup\limits_{n\geqslant 1}A_n=A$,则 $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)$(下连续性);

(7) 若 $A_n\in\mathscr{F}$,且 $A_n\downarrow A$(即 $A_n\subset A_{n+1},n\geqslant 1$),且 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1}A_n=A$,则 $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)$(上连续性).

如果概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中的 P 零集(即零概率事件)的每个子集仍为事件,则称其为完备的概率空间.为了避免 P 零集的子集不是事件的情形出现,我们把概率测度完备化:令 $\mathscr{N}$ 表示 Ω 中 P 零集的子集的全体,由$(\mathscr{F},\mathscr{N})$生成的 σ 代数(即包含 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{N}$ 的最小 σ 代数)称为 $\mathscr{F}$ 的完备化,记为 $\overline{\mathscr{F}}$. $\overline{\mathscr{F}}$ 中的每一个元素 B 都可以表示为 $B=A\cup N$,其中 $A\in\mathscr{F},N\in\mathscr{N}$,且 $A\cap N=\varnothing$.定义 $\overline{P}(B)=P(A\cup N)=P(A)$,则 P 被扩张到 $\overline{\mathscr{F}}$ 上.

容易验证,$\overline{P}$ 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 上的概率测度.我们称 $\overline{P}$ 为 P 的完备化,并称$(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{P})$为完备的概率空间.以后总假定 P 是完备化的概率测度.

1.2 随机变量及其分布

1.2.1 随机变量及其分布函数

定义 1.4 映射 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ 是定义在 Ω 上,取值于实数集$\mathbb{R}$ 的函数.如果对任意实数 $x\in\mathbb{R}$,$\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$(即集合$\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}$是随机事件),则称 $X=X(\omega)$是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的随机变量,也称函数 $X(\omega)$关于事件域 $\mathscr{F}$ 可测.关于 $\mathscr{F}$ 可测的随机变量 $X(\omega)$有时简记为 $X(\omega)\in\mathscr{F}$.

显然,随机变量的定义不依赖于概率测度.

在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上,随机变量 X 具有如下特征:

(1) 取值的随机性,即事先不能确定 X 取哪个值;

(2) 取值的统计规律性,即完全可以确定 X 取值在某一个 Borel 集上的概率.

若 $X=X(\omega)$是随机变量,则实值函数 $F(x)=P\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}(x\in\mathbb{R})$称为随机变量 X

的分布函数.

由定义1.4可知，任意随机变量 X 都存在分布函数，且 X 的分布函数完整地描述了 X 的统计规律性. X 的分布函数 $F(x)$ 具有下述性质：

(1) $F(x)$ 是非降函数，即若 $x_1 \leqslant x_2$，则 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$；

(3) $F(x)$ 是右连续函数，即 $F(x+0)=F(x)$.

设 M 是关于样本空间 Ω 中样本点的某种性质，如果使得 M 不成立的事件是 P 零集，则称性质 M 几乎必然(almost surely)成立，记为 a. s..

设 X 与 Y 是两个随机变量，如果满足 $P\{X(\omega)\neq Y(\omega)\}=0$ 或者 $P\{X(\omega)=Y(\omega)\}=1$，则称它们是等价的. X 与 Y 等价简记为 $X=Y$, a. s..

定理 1.1 下列命题等价：

(1) X 是随机变量；(2) $\{\omega\colon X(\omega)\geqslant x\}\in\mathscr{F}, \forall x\in\mathbb{R}$；

(3) $\{\omega\colon X(\omega)>x\}\in\mathscr{F}, \forall x\in\mathbb{R}$；(4) $\{\omega\colon X(\omega)<x\}\in\mathscr{F}, \forall x\in\mathbb{R}$.

为简单起见，今后将 $\{\omega\colon X(\omega)\geqslant x\}$ 简记为 $\{X\geqslant x\}$，等等.

定理 1.2 设 X,Y 是随机变量，(X_n) 是随机变量序列，则

(1) $\{X<Y\},\{X\leqslant Y\},\{X=Y\}$ 及 $\{X\neq Y\}$ 均属于 $\mathscr{F}$(即都是随机事件)；

(2) $X\pm Y$ 与 XY 都是随机变量(即关于 $\mathscr{F}$ 可测)；

(3) $\sup X_n, \inf X_n, \limsup X_n$ 以及 $\liminf X_n$ 都是随机变量.

映射 $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^d$，表示为 $X=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_d(\omega))$. 若对所有的 k, $1\leqslant k\leqslant d$, X_k 都是随机变量，则称 X 为 d 维随机向量.

设 X 和 Y 为两个实值随机变量，则称 $Z=X+\mathrm{i}Y$ 为复值随机变量.

给定随机变量 X，我们称包含所有形式如 $\{X\leqslant x\}, x\in\mathbb{R}$ 的最小 σ 代数为由随机变量 X 生成的 σ 代数，记为 $\sigma(X)$. 类似的，可定义由随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 生成的 σ 代数 $\sigma(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

在实际中，常用的随机变量有两种类型：离散型随机变量和连续型随机变量.

如果随机变量 X 以正概率至多取可列多个值，则称 X 为离散型随机变量. 离散型随机变量 X 的概率分布一般用分布列描述：

$$p_k=P\{X=x_k\},\quad k=1,2,\cdots$$

其分布函数为 $F(x)=P\{\omega\colon X(\omega)\leqslant x\}=\sum\limits_{x_k\leqslant x} p_k$.

离散型随机变量 X 的分布列具有如下性质：

(1) $p_k\geqslant 0, k=1,2,\cdots$；(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k=1$.

因此，分布列表明所有随机事件的概率在各个可能值之间的分配规律，它全面描述了离散型随机变量的统计规律性.

如果可积的非负函数 $f(x)$ 满足

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

则称 $f(x)$ 为随机变量 X 的分布密度函数或概率密度函数，简称 X 的密度. 具有分布密度函数的随机变量 X 称为连续型随机变量. 由定义，对 $f(x)$ 的连续点 x，必有 $F'(x)=f(x)$.

随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 具有如下性质：

(1) $f(x)\geqslant 0$；(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

概率密度函数全面描述了连续型随机变量的统计规律性.

随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_d)$ 的 d 维联合分布函数定义为

$$F(x_1,\cdots,x_d)=P\{X\leqslant x_1,\cdots,X_d\leqslant x_d\}，其中(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$$

定理 1.3 若 $F(x_1,\cdots,x_d)$ 是随机向量 $(X_1,\cdots,X_d)$ 的联合分布函数，则

(1) $F(x_1,\cdots,x_d)$ 对每个变量 $x_i,i=1,2,\cdots,d$ 都是单调不减的；

(2) $F(x_1,\cdots,x_d)$ 对每个变量 $x_i,i=1,2,\cdots,d$ 都是右连续的；

(3) 对 $i=1,2,\cdots,d$，$\lim\limits_{x_i\to-\infty} F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_d)=0$，$\lim\limits_{x_i,\cdots,x_d\to\infty} F(x_1,\cdots,x_d)=1$.

如果 $f(x_1,\cdots,x_d)=\dfrac{\partial^d F}{\partial x_1,\cdots,\partial x_d}$ 对几乎所有的 $(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ 存在，则称 $f(x_1,\cdots,x_d)$ 为随机向量 $(X_1,\cdots,X_d)$ 的联合密度函数，并且

$$F(x_1,\cdots,x_d)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_d} f(t_1,\cdots,t_d)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_d$$

设 $F(x_1,\cdots,x_d)$ 为随机向量 $(X_1,\cdots,X_d)$ 的联合分布函数，$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n\leqslant d$，则 $(X_1,\cdots,X_d)$ 关于 $(X_{k_1},\cdots,X_{k_n})$ 的边际分布函数定义为

$$F_{k_1,\cdots,k_n}(x_{k_1},\cdots,x_{k_n})=F(\infty,\cdots,\infty,x_{k_1},\infty,\cdots,\infty,x_{k_2},\infty,\cdots,\infty,x_{k_n},\infty,\cdots,\infty)$$

1.2.2 几个重要的分布

1. 二项分布

若离散型随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

其中 $q=1-p$，n 为自然数，则称 X 服从二项分布，记作 $X\sim b(n,p)$. 当 $n=1$ 时，相应的分布称为二点分布.

2. Poisson 分布

若离散型随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的 Poisson(泊松)分布，记作 $x\sim p(\lambda)$. 在 $\lambda=np$ 恒定的条件下，当 $n\to\infty$ 且 $p\to 0$ 时，二项分布趋向于 Poisson 分布. 从而当 n 很大，p 很小时，有如下的

近似公式：

$$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

3. 正态分布

正态分布是统计学中最重要的一种分布，它的应用极为广泛. 正态分布的重要性体现在三个方面：①刻画许多随机现象的随机变量都近似服从正态分布；②许多统计量的极限分布为正态分布；③正态分布具备完善的数学理论和成熟的计算技术.

若连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<\infty$$

则称 X 服从正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，称 X 服从标准正态分布. 其中参数 μ 是 X 的数学期望，σ 是 X 的标准差. 当 n 很大，p 和 q 都不太小时，二项分布可用正态分布近似计算，此时 $\mu\approx np,\sigma^2\approx npq$.

正态分布具有下述性质：

(1) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=aX+b$，其中 $a(a\neq 0)$，b 为任意常数，则

$$Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$$

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意 n 个常数 k_1，k_2，$\cdots$，k_n（不全为零），$\sum_{i=1}^n k_iX_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n k_i\mu_i, \sum_{i=1}^n k_i^2\sigma_i^2\right)$.

(3) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

4. χ^2 分布

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均服从 $N(0,1)$，且相互独立，则随机变量 $X=\sum_{i=1}^n X_i^2$ 所服从的分布称为 χ^2 分布，记作 $X\sim\chi^2(n)$，其中参数 n 称为自由度，表示平方和 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 中独立随机变量的个数.

5. t 分布

设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则随机变量 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 的分布称为 t 分布，记作 $T\sim t(n)$，其中参数 n 称为自由度. 随 n 趋向于无穷大，t 分布以标准正态分布为极限. 当 $n\geqslant 50$ 时，一般无法在 t 分布表中查出分位点，这时可以用分布 $N(0,1)$ 代替分布 $t(n)$.

6. F 分布

设随机变量 $X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X 与 Y 相互独立，则随机变量 $F=\frac{X/n}{Y/m}$ 的分布称

为自由度为n和m的F分布,记作$F\sim F(n,m)$.通常的F分布表只给出由右向左累加的概率.给定α(一个较小的正数),可查得临界值$F_\alpha(n,m)$.$F_{1-\alpha}(n,m)$不能直接通过查表得到,但可利用F分布的一个重要性质

$$F_{1-\alpha}(n,m)=\frac{1}{F_\alpha(m,n)}$$

在F分布表得出$F_\alpha(m,n)$,再计算其倒数即可求出$F_{1-\alpha}(n,m)$.

以上几个分布涉及"独立性"的概念,本章1.5节将给出独立性的严格定义.

1.3 积分知识

1.3.1 R-S积分

定义1.5 设$g(x)$,$F(x)$为有限区间$[a,b]$上的实值普通函数,$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$为$[a,b]$的一个任意分割,令$\Delta F(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$,记

$$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\quad 1\leqslant i\leqslant n;\quad \lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$$

如果极限$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta F(x_i)$存在,且与分割的选择及$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$的取法无关,则称该极限值为函数$g(x)$关于$F(x)$在区间$[a,b]$上的Riemann-Stieltjes(R-S)积分,记为

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta F(x_i)\tag{1.1}$$

易见,当$F(x)=x$时,式(1.1)化为普通的Riemann积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;当$F'(x)=f(x)$存在时,式(1.1)化为Riemann积分$\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x$.

可以证明:若函数$g(x)$连续,$F(x)$单调,则R-S积分(1.1)必存在.

为了将R-S积分推广到无限区间上,定义

$$\int_a^{\infty}g(x)\mathrm{d}F(x)=\lim_{b\to\infty}\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x),\quad \int_{-\infty}^{b}g(x)\mathrm{d}F(x)=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)$$

R-S积分具有以下性质:

(1) $\int_a^b[\alpha g_1(x)+\beta g_2(x)]\mathrm{d}F(x)=\alpha\int_a^b g_1(x)\mathrm{d}F(x)+\beta\int_a^b g_2(x)\mathrm{d}F(x)$;

(2) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)=\int_a^c g(x)\mathrm{d}F(x)+\int_c^b g(x)\mathrm{d}F(x)$;

(3) $\int_a^b \mathrm{d}F(x)=F(b)-F(a)$,

其中α,β为常数,f,g均可积,a,b,c均为有限数或无穷大;