

2016

挑战压轴题

中考数学

马学斌 舒耀俐 编著

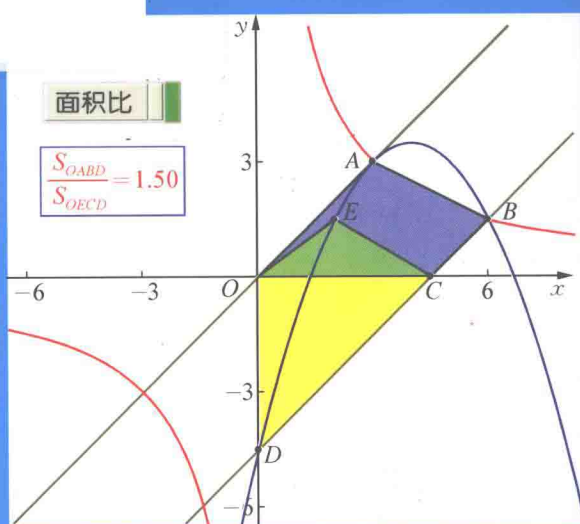
精讲解读篇

(第九版)

这里有一群学霸



微信号: tiaozhanyazhouf1



华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

挑战压轴题

中考数学

精讲解读篇

(第九版)

马学斌 舒耀俐 编著

图书在版编目(CIP)数据

挑战压轴题. 中考数学. 精讲解读篇/马学斌, 舒耀俐编
著. —9 版. —上海: 华东师范大学出版社, 2015. 7
ISBN 978-7-5675-3958-7

I. ①挑… II. ①马…②舒… III. ①中学数学课—
初中—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 179726 号

挑战压轴题·中考数学:精讲解读篇(第九版)

编 著 马学斌 舒耀俐
总 策 划 倪 明
项目编辑 徐 平
组稿编辑 孔令志
特约审读 石 岩
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克
漫画设计 孙丽莹 胡 艺
责任发行 王 祥

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 浙江省临安市曙光印务有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 17.75
字 数 389 千字
版 次 2015 年 8 月第 9 版
印 次 2015 年 8 月第 1 次
印 数 700601—770600
书 号 ISBN 978-7-5675-3958-7/G·8544
定 价 40.00 元(含光盘)

出 版 人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

致亲爱的读者

亲爱的读者朋友,看到本书封面上的二维码了吗?一定要扫一扫加“关注”哦!那是我们开通的《挑战压轴题》专属微信公众号(微信号:tiaozhanyazhouti),关注了它,你不仅可以随时随地反馈图书的使用情况,还可以享受我们提供的一系列增值服务,比如说“学霸经验介绍”、“考试技巧与攻略”等等,并且可以与全国各地众多备考学子进行交流哦!!

无论中考还是高考,能拉开差距的其实只有压轴题.

但压轴题有点难,如何攻关?

为了帮助备考的莘莘学子攻克压轴题,圆名校梦.我们邀请了众多一线名师,打造了这套《挑战压轴题》丛书,深受考生欢迎.本丛书涉及中考、高考的数学、物理、化学三门学科,共计18种.

3步搞定压轴题

1. 轻松入门篇

- 适合初一、初二、高一、高二及中、高考第一轮复习使用;
- 难度由浅入深、层层推进.

↓
找思路

2. 精讲解读篇

- 有配套光盘,适合初三、高三复习使用;
- 主要以老师详细解析当年真题为主;
- 旨在帮助学生理解、消化.

↓
学诀窍

3. 强化训练篇

- 适合备考前3个月冲刺使用;
- 主要以练习题为主;
- 配详细的答案解析;
- 试题主要由真题、模拟题、创新题构成.

↓
练速度

如果你想搞定压轴题,不妨按照我们的“找思路→学诀窍→练速度”3步骤进行训练哦!

愿这套备考丛书能够帮助你顺利通过中高考升学考试,迈入新的理想校园.
挑战压轴题,轻松进名校!

技术让思想更完美

这是一本供初中毕业生复习迎考,研究压轴题,挑战满分的书;

这是一本供初中数学教师通过继续教育学习,研究现代教育技术与中学数学课程整合的参考书;

这是一本用“几何画板”动态研究中考数学压轴题的书;

这是一本以中考数学压轴题为载体学习“几何画板”的书;

这是一本初中数学课件资源的素材库.

中考数学压轴题的灵魂是数形结合,数形结合的精髓是函数,函数的核心是运动变化.这本书的最大时尚就在于让读者在图形运动变化的过程中体验、把握、认知数学的美和压轴题的精髓.

全书共分四部分.第一部分为函数图象中点的存在性问题,这部分压轴题的主要特征是先求函数的解析式,然后在函数的图象上探求符合条件的点.

第二部分为图形运动中的函数关系问题,这部分压轴题的主要特征是在图形运动变化的过程中,探求两个变量之间的函数关系,并根据实际情况探求函数的定义域,进而在一般情形下探求符合条件的特殊性.探求符合条件的特殊性通常和分类讨论思想紧密地联系在一起.

第三部分为图形运动中的计算说理问题,这部分压轴题的主要特征是先给出一个图形进行研究,然后研究图形的位置发生变化后结论是否发生变化,进而进行证明.解决这部分压轴题的关键是抓住图形运动过程中的数据特征和不变关系,通过计算进行说理.

第四部分为图形的平移、翻折与旋转,这部分题目的主要特征是在图形的平移、折叠、旋转等运动变化中寻找不变的量,把握规律,探求关系.另一个主要特征是把图形的对称性与分类讨论思想结合在一起,也就是平常所说的一题多解.

本书收集的压轴题选自2015年上海市各区县的中考数学模拟题和2014年、2015年全国各地部分省市的中考题.每道压轴题由5个板块组成,首先介绍题目和出处;【动感体验】是这本书的特色,先打开这道题对应的光盘文件,在认真阅读理解题意的基础上,按照提示拖动屏幕上的主动点,在图形运动的过程中把握规律,理解内涵,探求关系;【思路点拨】也是这本书的一个亮点,它通过解读这道压轴题所考查的数学思想和数学方法,挑出解答这道压轴题的突破口,指出这道题目的难点;【满分解答】是比较规范、简练地对这道题目进行解答;【考点伸展】是我们在动态研究压轴题的过程中,对一些题目进行了深入的探讨,对这些题目提出的一点回顾与思考,压轴题作为命题组智慧的浓缩,我们不可能提出有突破性的反思,只是想借用“几何画板”把智慧延伸一下.更多压轴题的考点伸展我们只是追求形式上的对称,提出了一些常规性的问题.

由于全国各地数学教材版本不同,数学词语的表现有所差别,本书中统一用“连结”、

“图象”等数学词语。

尽管我们对几何画板的研究水平有限,但我们一直在迈着急实践的步伐,在此非常感谢全国几何画板的领路人、北京师范大学潘懋德教授和南京师范大学附中特级教师陶维林老师多年来对我们的鼓励和帮助。

这本书多年来受到读者的欢迎并持续畅销。在这个版本中,所附赠光盘中有两个文件,一个是几何画板课件,还有一个是视频演示课件。

大家在使用本书的过程中有什么问题和建议请随时与我们联系(tzzksxyzt@163.com),以便我们学习和修改。

作 者

2015年6月

目 录

第一部分 函数图象中点的存在性问题

§ 1.1 因动点产生的相似三角形问题	2
例 1 2014 年武汉市中考第 24 题	2
例 2 2014 年菏泽市中考第 21 题	4
例 3 2015 年上海市宝山区嘉定区中考模拟第 24 题	6
例 4 2015 年上海市金山区中考模拟第 24 题	8
例 5 2015 年上海市闵行区中考模拟第 25 题	10
例 6 2015 年上海市长宁区中考模拟第 25 题	12
例 7 2015 年盐城市中考第 28 题	14
§ 1.2 因动点产生的等腰三角形问题	17
例 8 2014 年长沙市中考第 26 题	17
例 9 2014 年金华市中考第 24 题	20
例 10 2014 年上海市中考第 25 题	23
例 11 2015 年上海市崇明县中考模拟第 25 题	25
例 12 2015 年上海市金山区中考模拟第 25 题	28
例 13 2015 年上海市静安区青浦区中考模拟第 25 题	30
例 14 2015 年上海市松江区中考模拟第 24 题	32
例 15 2015 年重庆市中考第 25 题	34
§ 1.3 因动点产生的直角三角形问题	36
例 16 2014 年德州市中考第 24 题	36
例 17 2014 年苏州市中考第 29 题	38
例 18 2014 年重庆市中考第 25 题	40
例 19 2015 年上海市虹口区中考模拟第 25 题	42
例 20 2015 年上海市普陀区中考模拟第 24 题	44
§ 1.4 因动点产生的平行四边形问题	46
例 21 2014 年陕西省中考第 24 题	46
例 22 2014 年山西省中考第 24 题	48
例 23 2014 年河南省中考第 23 题	51
例 24 2015 年成都市中考第 28 题	54
例 25 2015 年黄冈市中考第 24 题	56
例 26 2015 年重庆市中考第 26 题	58

例 27	2015 年温州市中考第 24 题	60
§ 1.5	因动点产生的梯形问题	63
例 28	2014 年上海市中考第 24 题	63
例 29	2015 年上海市徐汇区中考模拟第 24 题	65
§ 1.6	因动点产生的面积问题	68
例 30	2015 年上海市黄浦区中考模拟第 24 题	68
例 31	2015 年上海市静安区青浦区中考模拟第 24 题	71
例 32	2015 年上海市闸北区中考模拟第 24 题	73
例 33	2015 年河南省中考第 23 题	76
例 34	2015 年衡阳市中考第 28 题	78
例 35	2015 年连云港市中考第 26 题	80
例 36	2015 年临沂市中考第 26 题	82
例 37	2015 年徐州市中考第 28 题	84
例 38	2015 年深圳市中考第 23 题	86
§ 1.7	因动点产生的相切问题	89
例 39	2015 年上海市闵行区中考模拟第 24 题	89
例 40	2015 年上海市浦东新区中考模拟第 25 题	91
例 41	2015 年上海市普陀区中考模拟第 25 题	93
例 42	2015 年上海市松江区中考模拟第 25 题	95
例 43	2015 年上海市闸北区中考模拟第 25 题	97
§ 1.8	因动点产生的线段和差问题	99
例 44	2015 年福州市中考第 26 题	99
例 45	2015 年济南市中考第 28 题	101
例 46	2015 年陕西省中考第 25 题	103
例 47	2015 年盐城市中考第 26 题	106
例 48	2015 年沈阳市中考第 25 题	108

第二部分 图形运动中的函数关系问题

§ 2.1	由比例线段产生的函数关系问题	112
例 1	2014 年天津市中考第 25 题	112
例 2	2015 年上海市宝山区嘉定区中考模拟第 25 题	114
例 3	2015 年上海市奉贤区中考模拟第 24 题	116
例 4	2015 年上海市黄浦区中考模拟第 25 题	118
例 5	2015 年上海市杨浦区中考模拟第 25 题	120
例 6	2015 年呼和浩特市中考第 25 题	122
例 7	2015 年上海市中考第 25 题	124
§ 2.2	由面积公式产生的函数关系问题	126
例 8	2014 年衡阳市中考第 28 题	126
例 9	2014 年呼和浩特市中考第 25 题	128

例 10	2014 年黄冈市中考第 25 题	130
例 11	2014 年无锡市中考第 28 题	132
例 12	2014 年广州市中考第 25 题	135
例 13	2014 年长春市中考第 24 题	137
例 14	2015 年上海市徐汇区中考模拟第 25 题	140
例 15	2015 年上海市长宁区中考模拟第 24 题	142
例 16	2015 年淮安市中考第 28 题	144
例 17	2015 年山西省中考第 24 题	146
例 18	2015 年天津市中考第 24 题	148
例 19	2015 年武汉市中考第 22 题	150

第三部分 图形运动中的计算说理问题

§ 3.1	代数计算及通过代数计算进行说理问题	154
例 1	2014 年武汉市中考第 25 题	154
例 2	2014 年南宁市中考第 26 题	156
例 3	2014 年天津市中考第 24 题	159
例 4	2015 年上海市浦东新区中考模拟第 24 题	161
例 5	2015 年北京市中考第 29 题	163
例 6	2015 年广州市中考第 25 题	165
例 7	2015 年河北省中考第 25 题	167
例 8	2015 年湖州市中考第 24 题	170
例 9	2015 年江西省中考第 23 题	173
例 10	2015 年兰州市中考第 28 题	175
例 11	2015 年泰州市中考第 26 题	177
例 12	2015 年天津市中考第 25 题	179
§ 3.2	几何证明及通过几何计算进行说理问题	181
例 13	2014 年安徽省中考第 23 题	181
例 14	2014 年河北省中考第 25 题	183
例 15	2014 年北京市中考第 24 题	185
例 16	2014 年沈阳市中考第 24 题	187
例 17	2014 年沈阳市中考第 25 题	189
例 18	2014 年济南市中考第 28 题	191
例 19	2014 年长春市中考第 23 题	193
例 20	2015 年上海市崇明县中考模拟第 24 题	195
例 21	2015 年上海市奉贤区中考模拟第 25 题	197
例 22	2015 年上海市杨浦区中考模拟第 24 题	199
例 23	2015 年安徽省中考第 23 题	202
例 24	2015 年北京市中考第 28 题	204
例 25	2015 年杭州市中考第 22 题	206

例 26	2015 年河南省中考第 22 题	208
例 27	2015 年厦门市中考第 27 题	210
例 28	2015 年武汉市中考第 24 题	212
例 29	2015 年徐州市中考第 26 题	214
例 30	2015 年烟台市中考第 25 题	216
例 31	2015 年珠海市中考第 22 题	218
例 32	2015 年沈阳市中考第 24 题	220

第四部分 图形的平移、翻折与旋转

§ 4.1	图形的平移	224
例 1	2015 年泰安市中考第 15 题	224
例 2	2015 年咸宁市中考第 14 题	224
例 3	2015 年株洲市中考第 14 题	225
§ 4.2	图形的翻折	226
例 4	2015 年上海市宝山区嘉定区中考模拟第 18 题	226
例 5	2015 年上海市崇明县中考模拟第 18 题	226
例 6	2015 年上海市金山区中考模拟第 18 题	227
例 7	2015 年上海市闵行区中考模拟第 18 题	228
例 8	2015 年上海市浦东新区中考模拟第 18 题	228
例 9	2015 年上海市普陀区中考模拟第 18 题	229
例 10	2015 年上海市松江区中考模拟第 18 题	230
例 11	2015 年上海市闸北区中考模拟第 18 题	231
例 12	2015 年上海市徐汇区中考模拟第 18 题	231
例 13	2015 年安顺市中考第 17 题	232
例 14	2015 年内江市中考第 11 题	233
例 15	2015 年山西省中考第 16 题	233
例 16	2015 年泰州市中考第 16 题	234
例 17	2015 年武汉市中考第 16 题	234
例 18	2015 年玉林市防城港市中考第 18 题	235
§ 4.3	图形的旋转	237
例 19	2015 年上海市奉贤区中考模拟第 18 题	237
例 20	2015 年上海市虹口区中考模拟第 18 题	237
例 21	2015 年上海市杨浦区中考模拟第 18 题	238
例 22	2015 年怀化市中考第 14 题	239
例 23	2015 年武汉市中考第 10 题	240
例 24	2015 年扬州市中考第 17 题	240
例 25	2015 年福州市中考第 16 题	241
例 26	2015 年德州市中考第 6 题	242
例 27	2015 年上海市中考第 18 题	242

§ 4.4	三角形	244
例 28	2015 年上海市长宁区中考模拟第 18 题	244
例 29	2015 年广州市中考第 16 题	245
例 30	2015 年河南省中考第 15 题	245
例 31	2015 年江西省中考第 14 题	246
例 32	2015 年泸州市中考第 12 题	247
例 33	2015 年随州市中考第 16 题	247
例 34	2015 年重庆市中考第 18 题	248
§ 4.5	四边形	250
例 35	2015 年安徽省中考第 9 题	250
例 36	2015 年包头市中考第 6 题	250
例 37	2015 年江西省中考第 5 题	251
例 38	2015 年温州市中考第 10 题	251
§ 4.6	圆	253
例 39	2015 年上海市黄浦区中考模拟第 18 题	253
例 40	2015 年上海市静安区青浦区中考模拟第 18 题	254
例 41	2015 年重庆市中考第 16 题	254
例 42	2015 年武威市中考第 17 题	255
例 43	2015 年泰安市中考第 17 题	255
例 44	2015 年恩施州中考第 15 题	256
例 45	2015 年兰州市中考第 15 题	257
例 46	2015 年舟山市中考第 16 题	258
例 47	2015 年漳州市中考第 9 题	258
例 48	2015 年陕西省中考第 14 题	259
例 49	2015 年台州市中考第 16 题	260
§ 4.7	函数的图象及性质	261
例 50	2015 年青岛市中考第 8 题	261
例 51	2015 年潍坊市中考第 18 题	261
例 52	2015 年日照市中考第 16 题	262
例 53	2015 年荆门市中考第 17 题	263
例 54	2015 年铜仁市中考第 10 题	263
例 55	2015 年绍兴市中考第 15 题	264
例 56	2015 年温州市中考第 9 题	265
例 57	2015 年深圳市中考第 16 题	265
例 58	2015 年荆州市中考第 9 题	266
例 59	2015 年德州市中考第 12 题	267
例 60	2015 年烟台市中考第 12 题	268
例 61	2015 年中山市中考第 10 题	269
例 62	2015 年武威市中考第 10 题	270
例 63	2015 年呼和浩特市中考第 10 题	270

第一部分 函数图象中点的存在性问题

这部分压轴题的主要特征是先求函数的解析式,然后在函数的图象上探求符合几何条件的点.

简单一点的题目,就是用待定系数法直接求函数的解析式.

复杂一点的题目,先根据图形给定的数量关系,运用数形结合的思想,求得点的坐标,进而用待定系数法求函数的解析式.

还有一种常见题型,解析式中有待定字母,这个字母可以和根与系数的关系联系起来求解,或者根据题意列出方程组求解.

§ 1.1 因动点产生的相似三角形问题

例 1 2014 年武汉市中考第 24 题

如图 1, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$, 动点 P 从点 B 出发, 在 BA 边上以每秒 5 cm 的速度向点 A 匀速运动, 同时动点 Q 从点 C 出发, 在 CB 边上以每秒 4 cm 的速度向点 B 匀速运动, 运动时间为 t 秒 ($0 < t < 2$), 连结 PQ .

- (1) 若 $\triangle BPQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求 t 的值;
- (2) 如图 2, 连结 AQ 、 CP , 若 $AQ \perp CP$, 求 t 的值;
- (3) 试证明: PQ 的中点在 $\triangle ABC$ 的一条中位线上.

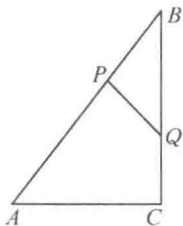


图 1

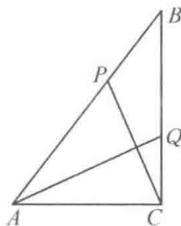


图 2



动感体验

请打开几何画板文件名“14 武汉 24”, 拖动点 P 运动, 可以体验到, 若 $\triangle BPQ$ 可以两次成为直角三角形, 与 $\triangle ABC$ 相似. 当 $AQ \perp CP$ 时, $\triangle ACQ \sim \triangle CDP$. PQ 的中点 H 在 $\triangle ABC$ 的中位线 EF 上.



思路点拨

1. $\triangle BPQ$ 与 $\triangle ABC$ 有公共角, 按照夹角相等, 对应边成比例, 分两种情况列方程.
2. 作 $PD \perp BC$ 于点 D , 动点 P 、 Q 的速度, 暗含了 $BD = CQ$.
3. PQ 的中点 H 在哪条中位线上? 画两个不同时刻 P 、 Q 、 H 的位置, 一目了然.



满分解答

(1) $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = 6$, $BC = 8$, 所以 $AB = 10$.

$\triangle BPQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 存在两种情况:

- ① 如果 $\frac{BP}{BQ} = \frac{BA}{BC}$, 那么 $\frac{5t}{8-4t} = \frac{10}{8}$. 解得 $t = 1$. (如图 3)
- ② 如果 $\frac{BP}{BQ} = \frac{BC}{BA}$, 那么 $\frac{5t}{8-4t} = \frac{8}{10}$. 解得 $t = \frac{32}{41}$. (如图 4)

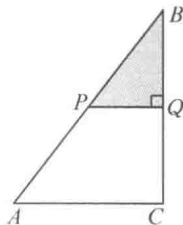


图 3

(2) 如图 5, 作 $PD \perp BC$, 垂足为 D .

在 $\text{Rt}\triangle BPD$ 中, $BP = 5t$, $\cos B = \frac{4}{5}$, 所以 $BD = BP \cos B = 4t$, $PD = 3t$.

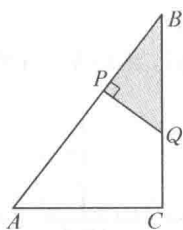


图 4

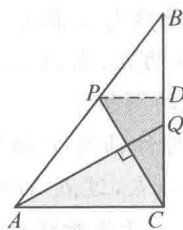


图 5

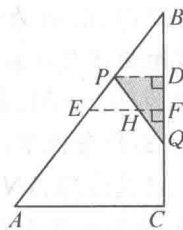


图 6

当 $AQ \perp CP$ 时, $\triangle ACQ \sim \triangle CDP$.

所以 $\frac{AC}{QC} = \frac{CD}{PD}$, 即 $\frac{6}{4t} = \frac{8-4t}{3t}$. 解得 $t = \frac{7}{8}$.

(3) 如图 6, 过 PQ 的中点 H 作 BC 的垂线, 垂足为 F , 交 AB 于 E .

由于 H 是 PQ 的中点, $HF \parallel PD$, 所以 F 是 QD 的中点.

又因为 $BD = CQ = 4t$, 所以 $BF = CF$.

因此 F 是 BC 的中点, E 是 AB 的中点.

所以 PQ 的中点 H 在 $\triangle ABC$ 的中位线 EF 上.



考点伸展

本题情景下, 如果以 PQ 为直径的 $\odot H$ 与 $\triangle ABC$ 的边相切, 求 t 的值.

如图 7, 当 $\odot H$ 与 AB 相切时, $QP \perp AB$, 就是 $\frac{BP}{BQ} = \frac{BC}{BA}$, $t = \frac{32}{41}$.

如图 8, 当 $\odot H$ 与 BC 相切时, $PQ \perp BC$, 就是 $\frac{BP}{BQ} = \frac{BA}{BC}$, $t = 1$.

如图 9, 当 $\odot H$ 与 AC 相切时, 直径 $PQ = \sqrt{PD^2 + QD^2} = \sqrt{(3t)^2 + (8t-8)^2}$, 半径 $HN = FC = 4$. 所以 $\sqrt{(3t)^2 + (8t-8)^2} = 8$.

解得 $t = \frac{128}{73}$, 或 $t = 0$ (如图 10, 但是与已知 $0 < t < 2$ 矛盾, 舍去).

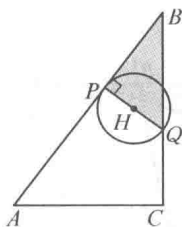


图 7

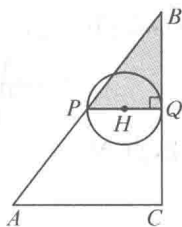


图 8

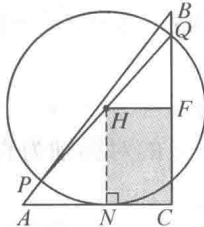


图 9

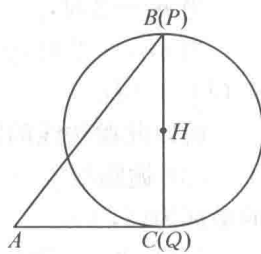


图 10

例 2 2014 年菏泽市中考第 21 题

如图 1, 在平面直角坐标系中, 已知抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 - 9$.

(1) 求证: 无论 m 为何值, 该抛物线与 x 轴总有两个交点;

(2) 该抛物线与 x 轴交于 A 、 B 两点, 点 A 在点 B 的左侧, 且 $OA < OB$, 与 y 轴的交点坐标为 $(0, -5)$, 求此抛物线的解析式;

(3) 在(2)的条件下, 抛物线的对称轴与 x 轴的交点为 N , 若点 M 是线段 AN 上的任意一点, 过点 M 作直线 $MC \perp x$ 轴, 交抛物线于点 C , 记点 C 关于抛物线对称轴的对称点为 D , 点 P 是线段 MC 上一点, 且满足 $MP = \frac{1}{4}MC$, 连结 CD 、 PD , 作 $PE \perp PD$ 交 x 轴于点 E , 问是否存在这样的点 E , 使得 $PE = PD$, 若存在, 求出点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

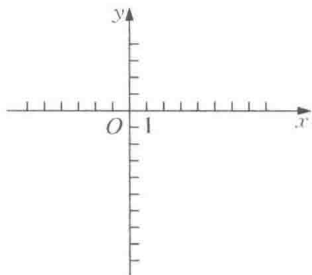


图 1



动感体验

请打开几何画板文件名“14 菏泽 21”, 拖动点 M 运动, 可以体验到, 当 $PE = PD$ 时, $\triangle EMP \cong \triangle PCD$.



思路点拨

- 第(1)题求 Δ 的值就可以得出结论了.
- 第(2)题对 m 的值要进行筛选验证.
- 第(3)题的主动点不是 E 而是 M . 数形结合, 把线段的等量关系转化为坐标关系.



满分解答

(1) 因为 $\Delta = (-2m)^2 - 4(m^2 - 9) = 36 > 0$, 所以无论 m 为何值, 该抛物线与 x 轴总有两个交点.

(2) 解 $m^2 - 9 = -5$, 得 $m = \pm 2$.

当 $m = 2$ 时, $y = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$, 符合点 A 在点 B 的左侧, 且 $OA < OB$.

当 $m = -2$ 时, $y = x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$, 不符合 $OA < OB$.

所以此抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x - 5$.

(3) 抛物线 $y = x^2 - 4x - 5$ 的对称轴为直线 $x = 2$, 点 N 的坐标为 $(2, 0)$.

如果 $PE = PD$, 那么 $\triangle EMP \cong \triangle PCD$.

设 $CD = 2a$, 那么 $MP = CD = 2a$, $MC = 4MP = 8a$, $PC = ME = 6a$.

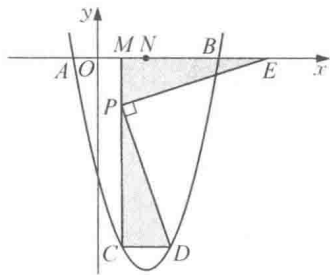


图 2

由 C 、 D 关于直线 $x = 2$ 对称, 得点 C 的横坐标为 $2 - a$, 所以 $C(2 - a, -8a)$.

将 $C(2 - a, -8a)$ 代入 $y = (x + 1)(x - 5)$, 得 $-8a = (3 - a)(-3 - a)$.

整理, 得 $a^2 + 8a - 9 = 0$. 解得 $a = 1$, 或 $a = -8$ (舍去).

所以点 C 的坐标为 $(1, -8)$.

所以 $OM = 1$, $ME = PC = 6a = 6$. 所以 $OE = 7$, $E(7, 0)$.



考点伸展

第(3)题也可以这样解:

设点 M 的横坐标为 x , 那么 $C(x, x^2 - 4x - 5)$, $CD = 2NM = 2(2 - x)$.

由 $MP = \frac{1}{4}MC$, 得 $MP = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x - 5)$.

当 $PE = PD$ 时, $\triangle EMP \cong \triangle PCD$.

然后根据 $MP = CD$ 列方程 $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x - 5) = 2(2 - x)$.

解得 $x = 1$, 或 $x = 11$ (舍去).

例3 2015年上海市宝山区嘉定区中考模拟第24题

如图1,在平面直角坐标系中,双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 与直线 $y = x + 2$ 都经过点 $A(2, m)$.

(1) 求 k 与 m 的值;

(2) 此双曲线又经过点 $B(n, 2)$, 过点 B 的直线 BC 与直线 $y = x + 2$ 平行交 y 轴于点 C , 连结 AB 、 AC , 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 在(2)的条件下, 设直线 $y = x + 2$ 与 y 轴交于点 D , 在射线 CB 上有一点 E , 如果以点 A 、 C 、 E 所组成的三角形与 $\triangle ACD$ 相似, 且相似比不为1, 求点 E 的坐标.

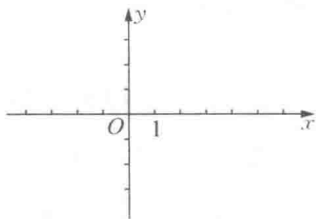


图1



动感体验

请打开几何画板文件名“15 宝山嘉定 24”, 拖动点 E 在射线 CB 上运动, 可以体验到, $\triangle ACE$ 与 $\triangle ACD$ 相似, 存在两种情况.



思路点拨

1. 直线 $AD \parallel BC$, 与坐标轴的夹角为 45° .
2. 求 $\triangle ABC$ 的面积, 一般用割补法.
3. 讨论 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ACD$ 相似, 先寻找一组等角, 再根据对应边成比例分两种情况列方程.



满分解答

(1) 将点 $A(2, m)$ 代入 $y = x + 2$, 得 $m = 4$. 所以点 A 的坐标为 $(2, 4)$.

将点 $A(2, 4)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得 $k = 8$.

(2) 将点 $B(n, 2)$, 代入 $y = \frac{8}{x}$, 得 $n = 4$.

所以点 B 的坐标为 $(4, 2)$.

设直线 BC 为 $y = x + b$, 代入点 $B(4, 2)$, 得 $b = -2$.

所以点 C 的坐标为 $(0, -2)$.

由 $A(2, 4)$ 、 $B(4, 2)$ 、 $C(0, -2)$, 可知 A 、 B 两点间的水平距离和竖直距离都是 2, B 、 C 两点间的水平距离和竖直距离都是 4.

所以 $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $\angle ABC = 90^\circ$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8$.

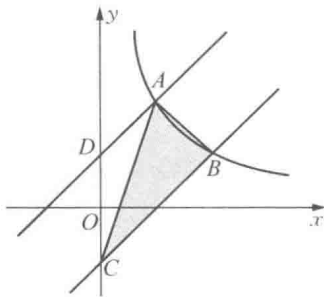


图2