

安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

高等学校理工科数学基础

高等数学下

(修订版)

主 编 杜先能 孙国正
副主编 蒋 威 侯为波 祝东进

安徽大学出版社

安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

高等学校理工科数学基础

高等数学下

(修订版)

主 编 杜先能 孙国正

副主编 蒋 威 侯为波 祝东进

安 徽 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 杜先能, 孙国正主编. —合肥: 安徽大学出版社,
2004. 2(2008. 9 修订)

高等学校理工科数学基础

ISBN 978-7-81052-763-7

I. 高... II. ①杜...②孙... III. 高等数学—高等学校—教学参考资料
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 001765 号

高等数学下(修订版)

高等学校理工科数学基础

主 编 杜先能 孙国正

副主编 蒋 威 侯为波 祝东进

出版发行 安徽大学出版社

(合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)

联系电话 编辑室 0551-5108438

发行部 0551-5107784

电子邮箱 ahdxchps@mail. hf. ah. cn

责任编辑 鲍家全 徐 建

封面设计 张 犇

经 销 各地新华书店

印 刷 中国科学技术大学印刷厂

开 本 710×1000 1/16

印 张 19.25

字 数 304 千

版 次 2008 年 9 月第 2 版

印 次 2008 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81052-763-7

定 价 27.00 元

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

高等数学教材编审委员会

马阳明	叶 鸣	孙国正	许志才
杜先能	张从军	陈松林	陈 秀
姚云飞	侯为波	费为银	祝家贵
钱 云	黄己立	梁仁臣	蒋 威

高等数学教材参编人员

王良龙	孙国正	刘树德	朱春华
张敬和	束立生	何江宏	杜先能
宋寿柏	陆 斌	郭大伟	侯为波
祝东进	赵礼峰	胡舒合	徐建华
徐德璋	殷晓斌	蒋 威	葛茂荣
雍锡琪			

前 言

微积分是理工科非数学专业最重要的一门基础课,对培养面向 21 世纪的复合型应用人才起着至关重要的作用。为此,我们根据全国高等学校理工科《高等数学教学大纲》,参照 2003、2004 年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,在安徽大学原自编系列教材《高等数学》(安徽大学出版社,1999 年版)的基础上,集中省内多所高校长期从事高等数学教学,具有丰富教学经验的老师,本着推陈出新、锐意改革的宗旨,编写了这套微积分教材。本书是《高等数学》体系中微积分部分的下册,是数学理论的基础。

我们始终坚持微积分教学不仅仅是讲授基础数学知识,为其他学科提供工具,更重要的是传授现代数学思想,培养科学创新意识,提高应用数学能力。在编写过程中,我们做了以下一些尝试。

1. 抓住本质,突出重点,强调微积分的基本思想和基本方法,立足于传授微积分的基本理论与基本技能。我们把主要精力集中在最基本、最主要的内容中,真正让读者学深学透。对抽象难懂的概念,抓住其实质,使用通俗流畅的语言阐述清楚,并由应用实例作导引,使读者明白易懂。而对简单和非关键的内容,力求删繁就简,言简意赅。

2. 突出数学建模思想,注重培养学生应用数学能力。尽管有不少专业在其后续教学中还要开设数学模型课程,但我们认为,如果在像微积分这样的基础课程教学中能充分体现数学建模思想,在抽象的数学定理、数学公式与丰富多彩、纷繁复杂的客观世界之间架起一座数学应用桥梁,岂不真正起到学以致用效果!编写中,我们结合教学进程,适当地介绍了用微积分理论解决实际问题的若干应用实例。这些实例,不仅使读者感到抽象的微积分理论趣味无穷,进而激发其学习微积分的兴趣,而且对培养读者的数学应用能力帮助极大。

3. 坚持循序渐进原则,注意渗透现代数学思想,促进微积分与相关科学分支的结合,为微积分和相关数理分支的有机结合提供了一个可供操作使用的应用平台。

4. 本着学以致用原则,精心设计典型例题和习题。本书精心挑选和设计各类典型例题,一方面巩固和理解所学理论,另一方面加强数学思维的训练,锻炼数学思维能力。此外,本书每节配备了大量习题供读者训练,每章还精心设计了综合练习题,供复习提高使用,目的是扩大读者视野,熟练数学技巧,提高综合应用数学的能力。

5. 理顺教学内容体系,推陈出新,体现科学创造意识。数代杰出科学家经过约 300 年的不懈努力,建成了微积分大厦,改革谈何容易。但是,科学技术的突飞猛进,也为微积分注入了新的活力,因此作为一本改革教材,应充分体现这种数学发展趋势。本书对许多定理的证明,作了简化或采用新的证法。

本书的编写是在安徽大学、安徽师范大学、淮北煤炭师范学院三校数学系、教务处的领导和许多教师的大力支持下完成的。安徽大学数学系部分老师演算了全书的习题。在此一并致谢。

在本书的编写过程中,我们参阅了国内外许多教材,谨表诚挚谢意。

囿于编者学识,加之任务本身难度大,时间仓促,书中的错误与缺陷在所难免,恳请同行、读者提出宝贵意见,使本书在教学实践中不断完善。

编者

2003 年 9 月

目 录

第 9 章 空间解析几何	1
§ 9.1 空间直角坐标系	1
§ 9.2 向量代数	6
§ 9.3 空间的平面与直线	19
§ 9.4 几种常见的二次曲面	32
第 9 章综合练习题	41
第 10 章 多元函数微分学	44
§ 10.1 多元函数的基本概念	44
§ 10.2 偏导数与全微分	54
§ 10.3 多元复合函数微分法	65
§ 10.4 隐函数求导法则	71
§ 10.5 偏导数在几何上的应用	78
§ 10.6 多元函数的泰勒公式	84
§ 10.7 多元函数的极值	88
第 10 章综合练习题	101
第 11 章 重积分	103
§ 11.1 二重积分的概念与性质	103
§ 11.2 二重积分的计算	107
§ 11.3 三重积分	121
§ 11.4 重积分的应用	131
第 11 章综合练习题	140

第 12 章 曲线积分与曲面积分	142
§ 12.1 第一类曲线积分	142
§ 12.2 第二类曲线积分	150
§ 12.3 格林(Green)公式	163
§ 12.4 第一类曲面积分	178
§ 12.5 第二类曲面积分	185
§ 12.6 高斯(Gauss)公式	196
§ 12.7 斯托克斯(Stokes)公式	202
§ 12.8 场论初步	209
第 12 章综合练习题	225
第 13 章 无穷级数	228
§ 13.1 数项级数的概念与性质	228
§ 13.2 数项级数的收敛判别法	234
§ 13.3 幂级数	246
§ 13.4 傅立叶(Fourier)级数	266
第 13 章综合练习题	280
附录 习题及综合练习题参考答案	283

第9章

空间解析几何

空间解析几何是用代数方法研究空间图形的一门学科. 它可以为多元函数提供直观的几何解释; 它的思想方法和几何直观性可为许多抽象的数学物理问题提供模型和背景; 此外在工程技术上也有广泛的应用. 通过建立空间坐标系, 用代数方程来描述空间的几何图形, 进而利用其代数方程的性质来刻画几何图形的性质.

本章首先建立空间直角坐标系, 然后引入向量的概念, 介绍向量代数的基础知识, 最后以向量为基本工具讨论空间的平面和直线, 以及几种常见的二次曲面.

§ 9.1 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

在平面解析几何中, 我们通过建立平面坐标系, 使得平面上的点与一对有序数组对应, 平面上的曲线与一个代数方程对应, 从而利用代数方法研究平面几何问题. 为了研究空间图形的几何性质, 我们引进空间直角坐标系.

过空间一点 O , 作三条相互垂直的数轴 Ox 、 Oy 和 Oz , 它们均以 O 为原点, 并且取相同的单位长度, 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系. 点 O 称为坐标原点, Ox 、 Oy 和 Oz 称为坐标轴, 又称为 x 轴、 y 轴和 z 轴. 通常我们规定三个坐标轴符合右手法则, 即以右手握住 z 轴, 让右手的四指以 x 轴的正向转向 y 轴的正向, 大拇指的指向就是 z 轴的正方向. 此时的空间直角坐标系称为右手直角坐标系(图9.1). 每两条坐标轴所确定的平面称为坐标平面, 分别称为 xy 平面、 yz 平面和 zx 平面(xy 平面也可记为 xOy 、 xOy 等).

2. 空间点的坐标

设 P 为空间的一点, 过 P 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的平面, 它们与坐标轴分别相交于 A 、 B 、 C 三点, 且这三点在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的坐标依次为 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 和 $\bar{z}$, 则点 P 唯一地确定了一组有序数组 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; 反之, 设给定一组有序数组 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 在 x 轴、 y 轴和 z 轴上确定三个点 A 、 B 和 C , 使得它们在各坐标轴上坐标分别为 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 和 $\bar{z}$, 过 A 、 B 和 C 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的平面, 这三个平面确定了唯一的交点 P . 于是我们建立了空间的点与一组有序数组 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 之间的一一对应关系(图 9.2). $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 称为点 P 的坐标, 记为 $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 分别称为点 P 的 x 坐标、 y 坐标和 z 坐标.

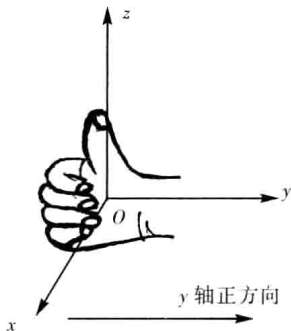


图 9.1

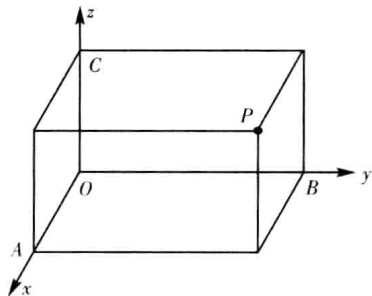


图 9.2

显然, 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$, 坐标轴上的点至少有两个坐标为 0, 坐标平面上的点至少有一个为 0. 例如, P 在 x 轴上, 则 $\bar{y} = \bar{z} = 0$, P 在 xy 坐标平面上, 则 $\bar{z} = 0$.

最后, 三个坐标平面将空间分成八个部分, 每一部分称为一个卦限, 各卦限内点的坐标的正负号规定为:

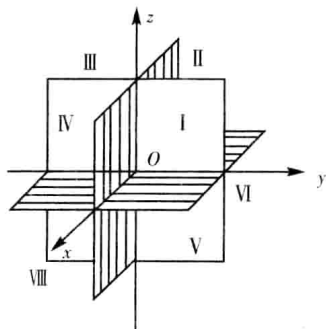


图 9.3

$I(+, +, +), II(-, +, +), III(-, -, +), IV(+, -, +),$
 $V(+, +, -), VI(-, +, -), VII(-, -, -), VIII(+, -, -).$

3. 空间两点之间的距离

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点. 分别过 P_1 和 P_2 作 xy 坐标平面的垂线, 垂足分别为 M_1 和 M_2 , 过 P_1 作 P_2M_2 的垂线, 垂足为 P_3 . 易知 P_3 的坐标为 (x_2, y_2, z_1) , 并且

$$|P_1P_3| = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, |P_2P_3| = |z_2 - z_1|.$$

由勾股定理得, P_1, P_2 两点的距离为:

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

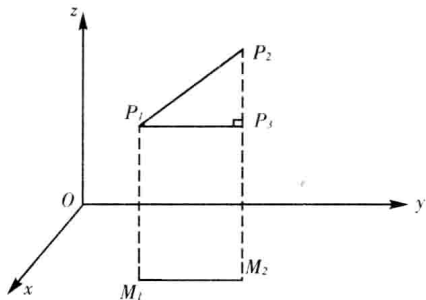


图 9.4

特别地, 点 $P(x, y, z)$ 到原点 $(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

例 1 求点 $P(2, 1, 5)$ 到 z 轴的距离.

解 过点 P 作 z 轴的垂线, 垂足为 M . 则 M 的坐标为 $M(0, 0, 5)$, 并且 P 到 z 轴的距离就是 $|PM|$.

$$|PM| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{5}$$

例 2 求 x 轴上一点 M , 使得 M 到 $A(-4, 5, 2)$ 和 $B(3, 1, -7)$ 的距离相等.

解 设 M 的坐标为 $(x, 0, 0)$, 依题意有 $|MA| = |MB|$, 即

$$\sqrt{(x+4)^2 + (0-5)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (0-1)^2 + (0+7)^2},$$

解得 $x = 1$, 故所求的点为 $M(1, 0, 0)$.

4. 空间曲面与曲线方程

空间的曲面可以看做是满足某一条件的点的轨迹. 例如, 圆柱面是

到一直线的距离为定长的点的轨迹.

设曲面 S 上的点的坐标为 (x, y, z) , 用方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

表示曲面 S 上点的坐标所满足的条件. 如果方程(3)和曲面之间有下列关系:

(i) 曲面 S 上所有点的坐标都满足方程(3);

(ii) 坐标满足方程(3)的所有点都在曲面 S 上,

则称方程(3)为曲面 S 的方程, 而曲面 S 称为方程(3)对应的曲面.

例 3 求以 (x_0, y_0, z_0) 为球心, R 为半径的球面方程.

解 设 (x, y, z) 为球面上任一点, 由已知得

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \quad (4)$$

反之, 满足(4)的任一点 (x, y, z) 到 (x_0, y_0, z_0) 的距离为 R , 从而这点在球面上. 因此方程(4)为所求的球面方程.

由例 3 可知, 球心为坐标原点 O , 半径为 R 的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

例 4 求以 Oz 为对称轴, 到对称轴的距离为 R 的圆柱面方程, 其中 R 称为圆柱面的半径.

解 设 (x, y, z) 为柱面上的点, 取参数 u, v , 其中 $z = v$, u 为过 z 轴及点 (x, y, z) 的平面与 xOz 面所围成的角, 于是得到

$$\begin{cases} x = R \cos u, \\ y = R \sin u, & 0 \leq u < 2\pi, \\ z = v, & -\infty < v < +\infty. \end{cases} \quad (5)$$

消去 u, v , 得到圆柱面的一般方程

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (6)$$

从例 4 可知, 曲面的方程还可以用参数表示, (5)也称为圆柱面的参数方程.

一般地, 如果曲面 S 上点的坐标可以表示成两个参数 (u, v) 的函数, 则称方程组

$$\begin{cases} x = f_1(u, v), \\ y = f_2(u, v), & a \leq u \leq b, \\ z = f_3(u, v), & c \leq v \leq d. \end{cases} \quad (7)$$

为曲面 S 的参数方程.

空间的曲线可以看做两个曲面的交线. 设这两个曲面的方程为 $F(x, y, z) = 0$ 和 $G(x, y, z) = 0$, 若它们的交线 L 和方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

有如下关系:

(i) 曲线 L 上所有点的坐标都满足方程组(8);

(ii) 坐标满足方程组(8)的所有点都在曲线 L 上,

则称方程(8)为曲线 L 的一般方程, 而曲线 L 称为方程组(8)对应的曲线.

例5 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 表示空间中的一个圆.

方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 表示空间中的一个椭圆.

事实上, 令

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z', \\ z = -\frac{2}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'. \end{cases}$$

则上述方程组变为:

$$\begin{cases} x'^2 + \frac{1}{3}y'^2 = R^2, \\ z' = 0. \end{cases}$$

因而原方程组表示一个椭圆.

习题 9.1

1. 指出下列各点位于第几卦限?

- (1) $(1, -1, 2)$ (2) $(2, 3, -4)$
(3) $(2, -3, -4)$ (4) $(-2, -3, 1)$

2. 指出下列各点在哪条坐标轴上或哪个坐标平面上?

- (1) $(-3, 0, 0)$ (2) $(0, -8, 0)$
(3) $(0, -5, 3)$ (4) $(-4, 0, 2)$

3. 求点 $P(x, y, z)$ 关于(1)各坐标平面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

4. 求点 $P(-3, 4, -5)$ 与原点及各坐标轴间的距离.

5. 求在 yOz 平面上, 与三个已知点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 及 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

6. 在 y 轴上, 求与点 $A(4, 2, -1)$ 和 $B(3, -5, 1)$ 等距离的点.
7. 求与 z 轴和点 $(1, 3, -1)$ 等距离的点的轨迹方程.
8. 已知动点在 Oxz 平面内, 且它与原点的距离等于它与点 $(5, -3, 1)$ 的距离, 求动点的轨迹方程.
9. 求以点 $(1, -2, 0)$ 为球心, 2 为半径的球面方程.
10. 已知球面过原点, 球心坐标为 $(3, -2, 1)$, 求球面方程.
11. 求经过 $(0, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 2, -2)$, $(2, 2, 0)$ 四个点的球面方程.
12. 指出下列方程所表示的图形:
 - (1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2 = 0$;
 - (2) $x^2 + y^2 - 2x = 0$;
 - (3) $y^2 - 2z^2 = 1$;
 - (4) $x^2 - 4y^2 = 4z$, $y = -2$;
 - (5) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$;
 - (6) $x = 1$, $y = 2$.

§ 9.2 向量代数

本节主要介绍向量的基本概念及其代数运算, 利用向量法可解决一些初等几何问题, 在研究平面和直线时, 方程的向量表示使用起来更加方便; 此外向量也是研究物理学等其他一些学科的重要工具.

1. 向量的概念

在自然科学研究中, 有一些量只需用一个实数就可以明确表示, 我们称之为数量, 如距离、时间、温度等; 而另外一些量不但有大小而且还有方向, 如位移、速度、加速度、力等, 我们称之为向量(或矢量), 用符号 $a, b, x, \dots$ 或 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 来表示.

一个向量 a 还可以用一个有向线段 AB 来表示, 其中 $\overrightarrow{AB}$ 的长度表示向量的模(或长度), 记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|a|$; 从始点 A 到终点 B 的指向表示向量的方向.

定义 1 如果两个向量 a 和 b 的模相等, 方向相同, 则称这两个向量是相等的, 记为 $a = b$.

由定义可知, 一个向量在空间平移后得到的向量与原来的向量相等.

定义 2 与向量 a 的模相等, 但方向相反的向量称为 a 的负向量(或反向量), 记为 $-a$.

定义3 模为零的向量称为零向量,记作 0 .

零向量的始点和终点重合,它的方向可看做是任意的.

定义4 模等于1的向量称为单位向量.

当 $a \neq 0$ 时,与向量 a 方向相同的单位向量记为 e_a .

2. 向量的线性运算

定义5 对于向量 a, b ,作有向线段使得 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{BC} = b$,则 $\overrightarrow{AC} = c$ 称为向量 a 与 b 的和,记为 $c = a + b$,或 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

上述向量加法定义称为三角形法则(如图9.5).

由加法法则易知,若 $a = \overrightarrow{OA}, b = \overrightarrow{OB}$,以 OA, OB 为边作一平行四边形(如图9.6),则 $\overrightarrow{OC} = a + b$,此方法又称为向量加法的平行四边形法则.

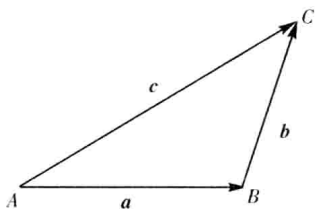


图 9.5

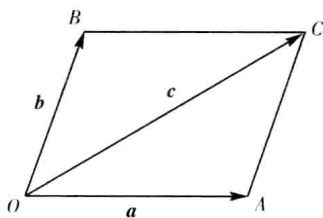


图 9.6

由定义容易验证,向量加法满足下列运算律:

(i) 交换律 $a + b = b + a$;

(ii) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$;

(iii) $a + 0 = 0 + a = a$;

(iv) $a + (-a) = 0$.

根据向量的减法是加法的逆运算,我们给出向量减法的定义.

定义6 $a - b = a + (-b)$.

$a - b$ 的几何意义如下图9.7:

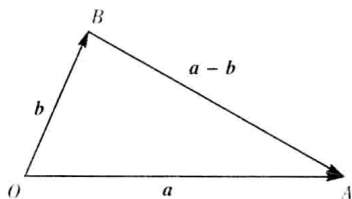


图 9.7

定义 7 数 λ 与向量 a 的乘积 λa 是一个向量,它的模为 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$,它的方向为,当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同;当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反;当 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

显然有 $(-1)a = -a$, $k0 = 0$, $e_a = |a|^{-1}a$.

向量的数乘满足以下运算律:

$$(i) \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b;$$

$$(ii) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$(iii) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a.$$

下面介绍向量共线和共面的一些基本知识.

定义 8 平行于同一直线(或平面)的向量组称为共线的(共面的)向量组.

定理 1 向量 a 与 b 共线的充要条件是,存在不全为零的数 λ_1 和 λ_2 ,使得 $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$.

证明 必要性.

当 $a = 0$ 时,显然有 $1a + 0b = 0$.

当 $a \neq 0$ 时,取非负实数 k 使得 $|b| = k|a|$,则当 a 与 b 同向时, $ka - b = 0$;当 a 与 b 反向时, $ka + b = 0$,结论均成立.

充分性.

不妨设 $\lambda_1 \neq 0$,则 $a = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}b$. 由数乘定义可知,向量 a 与 b 或者同向或者反向, a 与 b 共线.

定理 2 设向量 a 和 b 不共线,则向量 c 与 a, b 共面的充要条件是,存在数 λ_1, λ_2 ,使得 $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$.

证明 充分性.

设 $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$,若 $\lambda_1 \lambda_2 = 0$,例如 $\lambda_1 = 0$,则 $c = \lambda_2 b$,即 c 与 b 共线,故 c 与 a, b 共面;若 $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$,则由向量加法定义知, c 与 $\lambda_1 a, \lambda_2 b$ 共面,亦即 c 与 a, b 共面.

必要性.

不妨设 a, b 和 c 的始点均在 O 点,并且在同一个平面内. 过向量 c 的终点 c 分别作直线平行于 a 和 b ,并交 a 和 b 所在的直线于点 A 和 B ,由定理 1,存在数 λ_1, λ_2 , $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 a$, $\overrightarrow{OB} = \lambda_2 b$,因此, $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$.

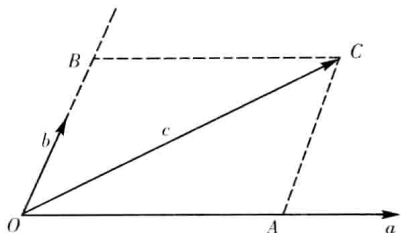


图 9.8

3. 向量的坐标表示

设 γ 是空间直角坐标系中任一向量, 将 γ 的始点平移到坐标原点 O 时, 其终点 P 的坐标 (x, y, z) 称为向量 γ 的坐标.

显然, 相等的向量有相同的坐标表示.

设 i, j, k 分别表示 x, y, z 轴正向的单位向量, 并称它们为这一坐标系的基本单位向量. 过 $\gamma = \overrightarrow{OP}$ 的终点作三个分别垂直于 x, y, z 轴的平面, 并交各坐标轴于点 A, B, C , 则有

$$\overrightarrow{OA} = xi, \overrightarrow{OB} = yj, \overrightarrow{OC} = zk,$$

由于 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 故 $\gamma = xi + yj + zk$, 称此式为向量 γ 的坐标分解式.

有时向量 γ 表示为 (x, y, z) , 或者 $\{x, y, z\}$.

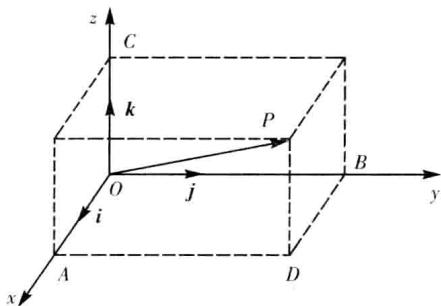


图 9.9

对于始点不在原点的向量 M_1M_2 , 下面给出其坐标表示.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1i + y_1j + z_1k, \overrightarrow{OM_2} = x_2i + y_2j + z_2k,$$