# 数学分析习题解析

（下册）

主编 杨熙鹏 邵子逊 刘颖植

陕西师范大学出版社

# 数学分析习题解析

（下　册）

主　编　杨熙鹏　邵子逊　刘颖植
副主编　朱长贵　杜兴朝　蒋棣华
编　委　（按姓氏笔划排列）
王玉英　付　磊　田菊蓉
朱长贵　刘颖植　李　琨
李瑞婷　杜兴朝　邵子逊
胡洪萍　冯世建　张永锋
张同琦　杨花娥　杨熙鹏
蒋棣华　薛怀玉

陕西师范大学出版社

(陕)新登字 008 号

数学分析习题解析

(上、下册)

主编　杨熙鹏　邵子逊　刘颖植
陕西师范大学出版社出版发行
(西安市陕西师大 120 信箱　邮局政编码 710062)
新华书店经销　第四军医大学印刷所印刷
开本 787×1092　1/32　印张 27　字数 584 千
1993 年 12 月第 1 版　1993 年 12 月第 1 次印刷
印数:1—4000
ISBN 7—5613—0994—5/G·740
定　价:12.70 元(上、下册)

# 目　　录

（下册）

# 第十二章　数项级数

## 一、教材说明

级数是研究函数的一个重要工具。本章的内容就是为进一步研究函数打基础的。为此，我们首先展开对最简单的级数——数项级数的有关问题进行讨论。手法是将无穷级数的收敛问题化归为部分和数列的收敛问题。从而使我们能够运用已熟知的有关数列极限的若干性质来推得级数的若干性质，同时解决了如何用收敛数列或数项级数来表示一个数的问题。

### 1. 目的与要求

本章的教学目的是：

(1) 明确认识级数是研究函数的一个重要工具；

(2) 明确认识无穷级数的收敛问题是如何化归为部分和数列收敛问题的；

(3) 理解并掌握收敛的几种判别法，记住一些特殊而常用的级数收敛判别法及敛散性。

本章的教学要求是：

(1) 理解并掌握级数、部分和、收敛、发散的概念；

(2) 理解级数的收敛准则和其性质；

(3) 熟练掌握正项级数敛散性判别法的比较原则、比式、

根式判别法；

(4) 牢记并熟练掌握等比级数、调和级数、P 级数的敛散性，且能灵活应用；

(5) 理解交错级数的概念，进而掌握其敛散性判别法；

(6) 弄清绝对收敛的含义并掌握其有关的性质及一般项级数的敛散性判别法。

2. 重点与以难点

本章的重点是级数敛散性的概念和正项级数敛散性的判别；难点是一般级数敛散性的判别法。

## 二、题解

### §1 级数的收敛性

1. 试讨论几何级数(也称为等比级数)

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots (a \neq 0)$$

的敛散性.

解　级数的部分和数列为

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}(1-r^n), & r \neq 1 \\ na, & r = 1 \end{cases}$$

当 $|r| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$；$|r| \geqslant 1$ 时，$\{S_n\}$ 发散. 故级数当 $|r| < 1$ 时收敛，$|r| \geqslant 1$ 时发散.

2. 证明下列级数的收敛性，并求其和：

(1) $\dfrac{1}{1.6} + \dfrac{1}{6.11} + \dfrac{1}{11.16} + \cdots \dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$；

(2) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}\right) + \cdots$；

(3) $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum \frac{2n-1}{2^n}$.

解　(1) $S_n=\frac{1}{5}$

$$\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$，从而该级数收敛，且和为$\frac{1}{5}$.

(2) $\sum \frac{1}{2^n}$ 是公比为$\frac{1}{2}$ 的几何级数，故收敛于$\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，同理 $\sum \frac{1}{3^n}$ 收敛于$\frac{1}{2}$，所以$\sum\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$收敛于$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

(3) 因 $a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$，从而

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\to\frac{1}{4}$$

故该级数收敛，其和为$\frac{1}{4}$.

(4) 因为其通项为

$a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$

$-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

所以 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$$

故该级数收敛且其和为 $1-\sqrt{2}$.

(5) $S_n-\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)-$

$$\left[1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

即 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$S_n=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

所以 $\lim_{n\to\infty}S_n=3.$

即所给级数收敛，且其和为 3.

3. 证明：若级数 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum Cu_n$ 也发散($c \neq 0$).

证　(反证法) 若 $\sum Cu_n$ 收敛，则由 $C \neq 0$ 知

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{C} \cdot Cu_n$$

由定理 12.2 知 $\sum u_n$ 也收敛，与题设矛盾. 从而当 $\sum u_n$ 发散时，$\sum Cu_n$ 也发散.

4. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散，试问 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散吗?又若 $u_n$ 与 $u_n (n = 1,2,\cdots)$ 都是非负数，则能得出什么结论?

解　当 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散时，$\sum (u_n + v_n)$ 不一定发散. 例：$\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ 和 $\sum v_n = \sum (-\frac{1}{n})$ 都发散，而 $\sum (u_n + v_n) = 0 + 0 + \cdots$ 收敛.

但当 $u_n$ 与 $v_n (n = 1,2,\cdots)$ 都是非负数时，则 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散，证明如下：

由 $\sum u_n$ 发散知，存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任何自然数 $N$，总存在自然数 $m_0 (> N)$ 和 $P_0$，有

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0.$$

从而 $|(u_{m_0+1} + v_{m_0+1}) + (u_{m_0+2} + v_{m_0+2}) + \cdots + (u_{m_0+p_0} + v_{m_0+p_0})| \geqslant |u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0.$

由柯西准则知 $\sum (u_n + v_n)$ 发散.

5. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$，则级数 $\sum (a_n + a_{n+1}) = a_1 - a$.

证　由已知 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$，而

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{k+1}$$

所以$\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty}(a_1 - a_{k+1}) = (a_1 - \lim\limits_{k\to\infty} a_{k+1}) = a_1 - a$

即 $\sum (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a.$

6. 证明：若数列$\{b_n\}$有$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，则

(1) 级数$\sum (b_{n+1} - b_n)$发散；

(2) 当$b_n \neq 0$时. 级数$\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}$.

证 (1) 因$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_1) = +\infty.$

故级数$\sum (b_{n+1} - b_n)$发散.

(2) 当$b_n \neq 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$，从而

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}$$

即$\sum \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}.$

7. 应用第 5、6 题结果求下列级数的和：

(1) $\sum \frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$；

(2) $\sum (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$；

(3) $\sum \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

解 (1) $\sum \frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$

$= \sum \left(\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n}\right)$，而数列$\left\{\frac{1}{a+n-1}\right\}$收敛于 0，所以

$$\sum \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a+1-1} - 0 = \frac{1}{a}.$$

(2) 原式 $= \sum\left[-\frac{(-1)^n}{n} - \left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right]$

而数列 $\left\{-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 收敛于 0，所以

$$\sum (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = -\frac{(-1)}{1} - 0 = 1.$$

(3) 原式 $= \sum\left[\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}\right]$，而数列 $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ 收敛于 0，所以

$$\sum \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{1}{1^2+1} - 0 = \frac{1}{2}.$$

8. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$；　(2) $\sum \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$；

(3) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$；　(4) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

解　(1) 任给自然数 P，有

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{m+k}} < \frac{1}{2^m}\left(1-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2^m}$$

而 $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{2^m} = 0$，于是任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $m > N$ 时，任给自然数 P，

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\right| < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$$

所以该级数收敛。

(2) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$，对任一 N，取 $m = N+1, P = 1$，则 $m > N$. 且

$$|u_{m+1}| = \left|\frac{(-1)^m (m+1)^2}{2(m+1)^2+1}\right| > \frac{(m+1)^2}{3(m+1)^2} = \frac{1}{3} = \varepsilon_0.$$

据柯西准则知原级数发散.

(3) 任给 $\varepsilon > 0$,取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $m > N$ 时,任给 P,

$$\left|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \cdots + (-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}\right| = \frac{1}{m+1}$$

$$-\frac{1}{m+2} + \cdots + (-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}$$

$$= \frac{1}{m+1} - \left[\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} + \cdots + (-1)^p \frac{1}{m+p}\right]$$

$$< \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

所以该级数收敛.

(4) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$,对任一N,取 $m = 2N, p = m$,则 $m >$ N,且

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{(m+k)+(m+k)^2}}\right|$$

$$\geqslant \frac{p}{\sqrt{(m+p)+(m+p)^2}} > \frac{p}{\sqrt{2}(m+p)} = \frac{m}{2m\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

所以此级数发散.

9. 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是:任给正数 ε,有某自然数 N,对一切 $n > N$ 总有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon$$

证　必要性　若 $\sum u_n$ 收敛,则由柯西准则知:任给 $\varepsilon > 0$,存在自然数 $N_1$,使当 $n > m > N_1$ 时,

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \varepsilon$$

取 $N \geqslant N_1 + 1$,则对任何 $n > N$,有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon.$$

充分性　若任给 $\varepsilon > 0$，存在某自然数 N，对一切 $n > N$，总有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon$$

则对一切 $n > m > N$，都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| = |(u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n) - (u_N + u_{N+1} + \cdots + u_m)| \leqslant |u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| + |u_N + u_{N+1} + \cdots + u_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

由柯西准则知 $\sum u_n$ 收敛.

10. 举例说明：若级数 $\sum u_n$ 对每一个自然数 P 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{u+p}) = 0$$

则这级数不一定收敛.

解　例如级数 $\sum \frac{1}{n}$，对每一个自然数 P，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+p} = 0$$

但级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散.

## §2　正项级数

1. 应用比较原则判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum \frac{1}{n^2 + a^2}$；　(2) $\sum 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$；

(3) $\sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$；

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$；

(5) $\sum\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$;

(6) $\sum\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\sum\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}-2\right)$, $(a>0)$;

(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

解 (1) 由于 $0\leqslant\dfrac{1}{n^2+a^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\dfrac{1}{n^2+a^2}$ 收敛.

(2) $2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}\sim\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，而 $\sum\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故原级数收敛.

(3) 因为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}\sim\dfrac{1}{n}$，而 $\sum\dfrac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

(4) 因为 $0<\dfrac{1}{(\ln n)^n}<\dfrac{1}{2^n}(n>e^2)$，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛，故原级数收敛.

(5) $1-\cos\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{2n^2}$，而 $\sum\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

(6) $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\dfrac{1}{n}$，而 $\sum\dfrac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

(7) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{a^t+a^{-t}-2}{t^2}$$

$=(\ln a)^2$（罗比塔法则）

又 $\sum\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

(8) 因为$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}<\frac{1}{n^2}(n>e^{e^2})$,而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故原级数收敛.

2. 用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性:

(1) $\sum\frac{1.3\cdots(2n-1)}{n!}$; (2) $\sum\frac{(n+1)!}{10^n}$;

(3) $\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (4) $\sum\frac{n!}{n^n}$;

(5) $\sum\frac{n^2}{2^n}$;

(6) $\sum(\frac{b}{a^n})^n$,(其中 $a_n\to a(n\to\infty)$;$a_n,a,b>0$ 且 $a\neq 0$).

解 (1) 因

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)!!n!}{(2n-1)!!(n+1)!}=\frac{2n+1}{n+1}\to 2(n\to\infty)$$

故该级数发散.

(2) 因$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+2}{10}\to\infty(n\to\infty)$,所以该级数发散.

(3) 因$\sqrt[n]{u_n}=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$,故该级数收敛.

(4) 因$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to\frac{1}{e}(n\to\infty)$,故该级数收敛.

(5) 因$\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}\sqrt[n]{n^2}\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$,故该级数收敛.

(6) 因$\sqrt[n]{u_n}=\frac{b}{a_n}\to\frac{b}{a}(n\to\infty)$,从而 $b>a$ 时,该级数发散;$b<a$ 时,该级数收敛,$a=b$ 时敛散性不定.

3. 设$\sum u_n$、$\sum v_n$为正项级数,且存在正数 $N_0$,对一切 $n>N_0$,有