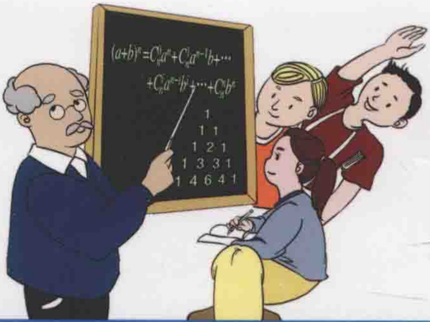


数林外传系列

跟大学名师学中学数学

解析几何的技巧

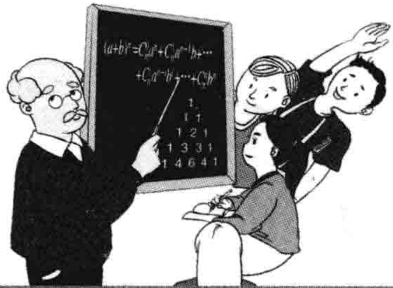
第4版

◎单墫 著

中国科学技术大学出版社

数林外传系列

跟大学名师学中学数学



解析几何的技巧

第4版

◎单 墫 著

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析几何的技巧/单墫著. —4 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015. 6

（数林外传系列:跟大学名师学中学数学）

ISBN 978-7-312-03724-5

Ⅰ. 解…　Ⅱ. 单…　Ⅲ. 解析几何—普及读物　Ⅳ. O182-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 112001 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

http://press. ustc. edu. cn

合肥万银印刷有限公司印刷

全国新华书店经销

*

开本:880×1230/32　印张:6. 75　字数:146 千

1989 年 6 月第 1 版　2015 年 6 月第 4 版

2015 年 6 月第 5 次印刷

定价:18. 00 元

第 4 版前言

《解析几何的技巧》,1989 年作为“数学奥赛辅导丛书”的一种,由中国科学技术大学出版社出版.到现在,已经二十五年过去了.

这本书问世后,颇受欢迎,多次重印,并在 2009 年出版第 3 版.

这些年来,大学入学考试、自主招生考试、各种各样的高中数学竞赛,往往都有解析几何的问题.我也搜集了这方面的内容,本想从中选择一些,补充到书中,但时间与精力都不支持这样做.而且增加篇幅过大,与原作相差过多,也不一定合适.因此,仍然维持原书的基本内容.搜集的材料或许将来有暇,可以另写一本《解析几何一百例》.

这次再版,我将本书重新审阅了一遍,做了多处修改.

其中有些修改较大.如第 26 节二次曲线束,增

加了确定二次曲线的定理，并给出定理的证明．再如第 17 节例17.7Desarques 定理的证明，完全改写．此外也改进了一些例题的解法．

希望这次再版的书，能比以前略好一点．

单　墫

2014.9.15

第 1 版前言

“几何难!”

很多人有这样的感慨.

感谢笛卡尔发明了解析几何,为解决几何问题开辟了一条康庄大道.可是,仍然有不少人不乐意采用这一方法,原因之一是他们觉得解析几何“繁”.其实,真正掌握了技巧,许多问题用解析几何来解,不但不繁,而且解答井井有条,十分优雅.

这本小册子的目的就是撷取一些问题来表现解析几何的技巧.希望读者阅读此书时带着纸和笔,在看例题的解答之前,自己先演算一遍,这样才能真正掌握解题的技巧.如果您的解答更好,请告诉我们,以便今后改进.

单　墫

目　　次

1 距 离 公 式

点(x_1, y_1)与(x_2, y_2)之间的距离是

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \tag{1.1}$$

这是大家熟悉的距离公式,它可以用来解很多几何问题.

【例 1.1】 设$\triangle ABC$的三边长为a, b, c,则BC边上的中线m_a的平方为

$$m_a^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2 \tag{1.2}$$

解 设BC中点为D,则D的坐标为

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}, \quad y_D=\frac{y_B+y_C}{2} \tag{1.3}$$

(以后我们用x_P, y_P分别表示P点的横坐标与纵坐标,不一一声明). 于是由公式(1.1),

$$\begin{aligned} m_a^2 &= (x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2 \\ &= \left(x_A-\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(y_A-\frac{y_B+y_C}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}[(x_A-x_B)+(x_A-x_C)]^2+\frac{1}{4}[(y_A-y_B)+(y_A-y_C)]^2 \\ &= \frac{1}{4}[(x_A-x_B)^2+(x_A-x_C)^2+2(x_A-x_B)(x_A-x_C)] \\ &\quad +\frac{1}{4}[(y_A-y_B)^2+(y_A-y_C)^2+2(y_A-y_B)(y_A-y_C)] \end{aligned}$$

注意到恒等式

$$\begin{aligned}&2(x_A-x_B)(x_A-x_C)\\=&(x_A-x_B)^2+(x_A-x_C)^2-(x_B-x_C)^2\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}&2(y_A-y_B)(y_A-y_C)\\=&(y_A-y_B)^2+(y_A-y_C)^2-(y_B-y_C)^2\end{aligned}\tag{1.4'}$$

便可得出

$$\begin{aligned}m_a^2=&\frac{1}{4}[2(x_A-x_B)^2+2(x_A-x_C)^2-(x_B-x_C)^2]\\&+\frac{1}{4}[2(y_A-y_B)^2+2(y_A-y_C)^2-(y_B-y_C)^2]\\=&\frac{1}{2}[(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2]+\frac{1}{2}[(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2]\\&-\frac{1}{4}[(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2]\end{aligned}$$

即(1.2)式成立.

上面的推导仅是极简单的计算,没有添加辅助线,没有巧妙的推理,甚至没有明确用到余弦定理,只用了距离公式(1.1)与中点的坐标(1.3)式.这正是解析几何的优点所在,请读者回忆中线公式(用纯几何方法)的证明,对比一下体会更深.

注 1 上面出现的一些式子中,横坐标与纵坐标处在平等的地位.由于这种对称性,在非正式的书写中,可以只写出含 x 的部分,而将含 y 的部分用"+……"来代替(学过向量的读者将关于两个坐标的表达式改成一个用向量表示的式子,更为简单).

注 2　上面的(1.4)与(1.4′)相加得出

$$(x_A-x_B)(x_A-x_C)+(y_A-y_B)(y_A-y_C)=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) \tag{1.5}$$

它相当于余弦定理,即(1.5)式左边就是 $bc\cos A$. 这一点我们以后将会用到[熟悉向量的读者可以看出(1.5)式左边是向量 **AB**,**AC** 的数量积].

【例 1.2】　求证:当 P 为$\triangle ABC$ 的重心时,P 到三个顶点距离的平方和最小.

证　设重心为 G,则

$$x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C),\quad y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C) \tag{1.6}$$

因为

$$\begin{aligned}(x_P-x_A)^2&=[(x_P-x_G)+(x_G-x_A)]^2\\&=(x_P-x_G)^2+(x_G-x_A)^2+2(x_P-x_G)(x_G-x_A)\end{aligned}$$

关于 x_B,x_C 也有类似的等式,这样的三个等式相加得

$$\begin{aligned}\sum(x_P-x_A)^2=&3\cdot(x_P-x_G)^2+\sum(x_G-x_A)^2\\&+2(x_P-x_G)\sum(x_G-x_A)\end{aligned}$$

其中$\sum$ 表示将字母 A,B,C 轮换后所得的三个式子相加,例如$\sum(x_P-x_A)^2=(x_P-x_A)^2+(x_P-x_B)^2+(x_P-x_C)^2$. 由于式(1.6),上式右端最后一个和为零. 所以

$$\sum(x_P-x_A)^2=3(x_P-x_G)^2+\sum(x_G-x_A)^2$$

关于纵坐标也有类似的等式. 于是

$$PA^2+PB^2+PC^2$$
$$=3PG^2+GA^2+GB^2+GC^2\geqslant GA^2+GB^2+GC^2$$

即当且仅当点 P 与重心 G 重合时，$PA^2+PB^2+PC^2$ 取得最小值 $GA^2+GB^2+GC^2$.

注 3　如果读者不熟悉轮换的和号，可以将式子中所有的项逐一写出. 但轮换的和号是方便的，我们今后多次用到，希望不熟悉的读者渐渐熟悉它.

注 4　如果取 G 为原点，计算更简单，可参看第 8 节例 8.6.

【例 1.3】　证明：任意四边形四条边的平方和，等于两条对角线的平方和，再加上对角线中点连线的平方的 4 倍.

证　如果不用解析几何，需要添辅助线，还需要一些细致的分析，并不很容易. 采用解析几何，只需要简单直接的计算，图都不必画.

设四个顶点的坐标为 $A_i(x_i, y_i)$($i=1,2,3,4$). 这时对角线中点为 $B\left(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2}\right)$，$C\left(\frac{x_2+x_4}{2},\frac{y_2+y_4}{2}\right)$，而

$$4\left(\frac{x_1+x_3}{2}-\frac{x_2+x_4}{2}\right)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2$$
$$=(x_1+x_3-x_2-x_4)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2$$
$$=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1)$$
$$=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2$$

关于纵坐标也有类似的等式，所以

$$4BC^2+A_1A_3^2+A_2A_4^2=A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_4^2+A_4A_1^2$$

用解析法（代数方法）解几何题是本书的重点之一. 本节

举了三个例子,从这些例子可以看出在解某些几何题时,解析几何比纯几何或纯三角的方法优越. 当然要解得好,就必须掌握一些技巧. 从第 2 节到第 7 节,我们先介绍一些基本、简单的技巧.

2　平行四边形的顶点

已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点的坐标为 $A(3,2)$，$B(4,-3)$，$C(2,5)$. 求 D 的坐标.

这个问题的解法很多. 如果利用平行四边形的对边平行，可以先求出直线 AD 与 CD 的方程，再定出它们的交点 D 的坐标. 如果利用平行四边形的对边相等，可以由 D 到 A 的距离为 BC 及 D 到 C 的距离为 AB 定出它的坐标. 当然还可以利用 AD 与 BC 平行并且相等来确定 D. 但是最简单的方法是利用平行四边形的对角线互相平分，即 AC，BD 的交点 E 既是(线段)AC 的中点，也是 BD 的中点，所以有

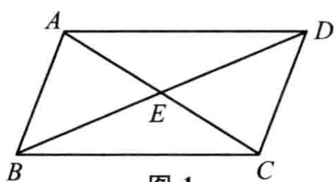


图 1

$$x_E = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2}(x_B + x_D)$$

及

$$y_E = \frac{1}{2}(y_A + y_C) = \frac{1}{2}(y_B + y_D)$$

于是

$$\left.\begin{aligned} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

(2.1)式虽然简单，却很有用处[本书中将多次用到(2.1)式].

对于本节开头的问题,我们有

$$x_D = x_A + x_C - x_B = 3 + 2 - 4 = 1$$

$$y_D = y_A + y_C - y_B = 2 + 5 - (-3) = 10$$

同一个问题,往往可以从几种不同的途径入手,我们应当选用最简单的方法.

如果将平行四边形 $ABCD$“压扁”,使 A,C 都落到 BD 上,那么便产生下面的结果:

设 B,A,C,D 为一直线上顺次四点,并且 BD 与 AC 的中点相同,则

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

这个结论,后面(如第 30 节例题 30.2)还要用到.

3 过已知点的平行线

【例 3.1】 直线 l 过点(3,2)并且与已知直线 $5x-2y+4=0$ 平行,求 l 的方程.

教科书上这道题的解法是先求出直线

$$5x-2y+4=0 \tag{3.1}$$

的斜率为$\frac{5}{2}$.由于 l 与直线(3.1)平行,所以 l 的斜率也是$\frac{5}{2}$.再利用点斜率得出 l 的方程为

$$y-2=\frac{5}{2}(x-3)$$

即

$$5x-2y-11=0$$

在刚开始学习解析几何时,这样按部就班地解,当然是必要的.但在完成解析几何的初级阶段后,就应当采用下面的解法:

首先注意直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

与直线

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

平行的充分必要条件是

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

(约定在比式的后项为 0 时，它的前项也自动为 0. 所以$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{0}$表示 $b_1=0$). 因此在直线 l 与

$$5x-2y+4=0$$

平行时，l 的方程应当呈

$$5x-2y+c=0$$

的形式. 由于点(3,2)在直线 l 上，所以

$$c=-(5\times3-2\times2)=-11$$

即 l 的方程为

$$5x-2y-11=0$$

以上过程均可用心算完成(凡是能用心算完成的，决不要用笔算. 凡是能一步完成的运算，决不要分成几步去完成).

【例 3.2】 直线 l 与直线 $2x-3y+12=0$ 平行，并且经过点(2,－1)，求 l 的方程.

解　l 的方程为

$$2x-3y-7=0$$

其中“头”$2x-3y$ 与直线 $2x-3y+12=0$ 相同，可以立即写出. 而“尾”(常数项)－7 则是 $2x-3y$ 在点(2,－1)处的值的相反数，可以通过心算得出，所以 l 的方程能够也应当直接写出. 在这里，任何过程都是多余的.

一般地，过点(x_0,y_0)且与直线 $ax+by+c=0$ 平行的直线是

$$ax+by-(ax_0+by_0)=0$$