“十二五”普通高等教育
本科国家级规划教材

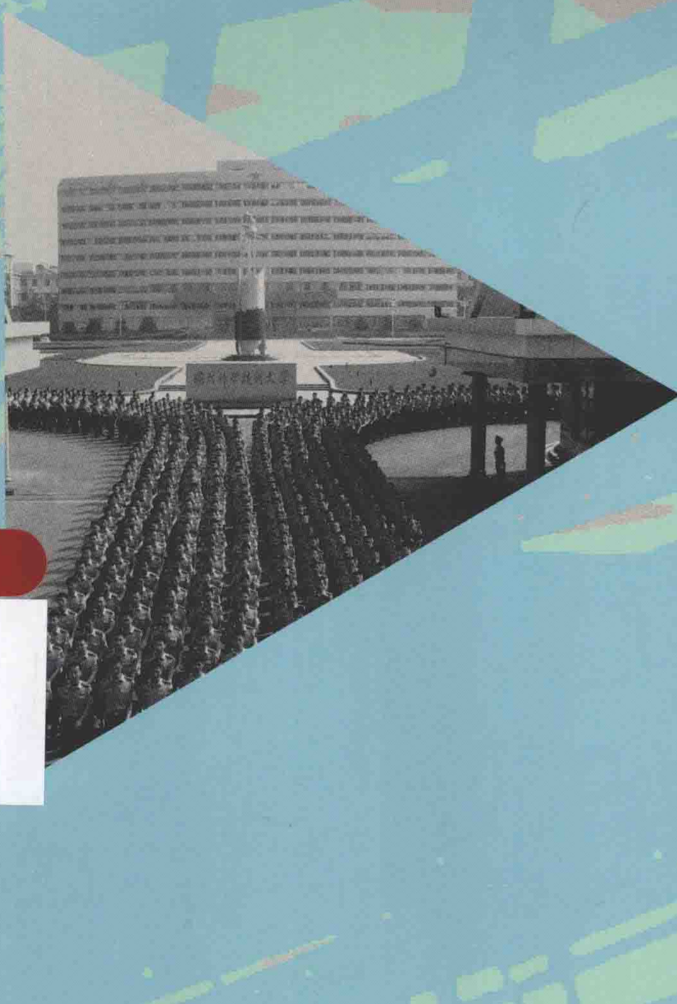
iCourse·教材

高等数学

第二版

下册

国防科学技术大学理学院
李建平 朱健民 主编



高等教育出版社

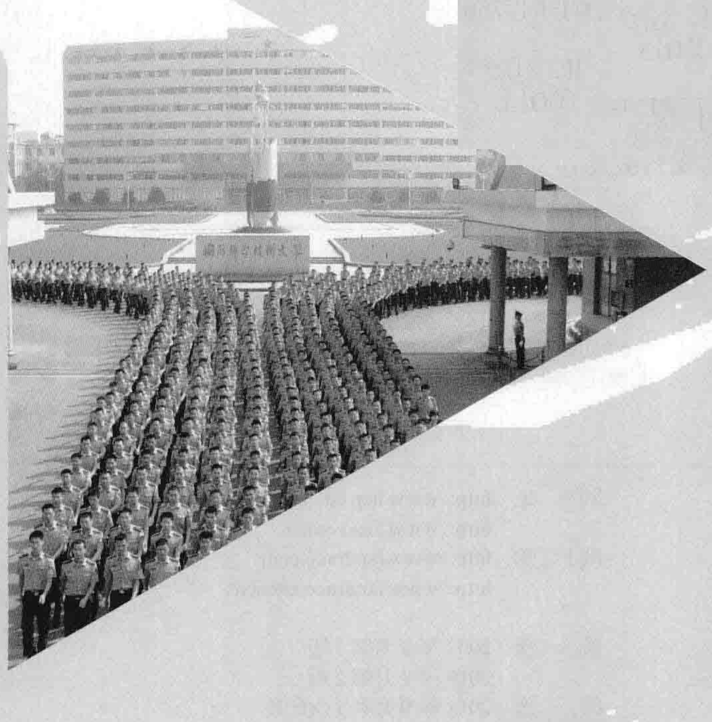
高等数学

GAODENG SHUXUE

第二版 下册

国防科学技术大学理学院

李建平 朱健民 主编



高等教育出版社·北京

内容简介

本书是与“爱课程”网上国防科学技术大学朱健民教授主讲的“高等数学 MOOC”课程配套使用的教材。全书分上、下两册，下册内容包括空间解析几何、向量值函数的导数与积分、多元函数的导数及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、幂级数与傅里叶级数、军事应用中的微分方程模型及其定性分析，涵盖了“高等数学 MOOC”中的“高等数学（三）第 6 讲—第 14 讲”、“高等数学（四）”、“高等数学（五）”等内容。全书将“高等数学 MOOC”中的微视频、随堂测验、讨论题、PPT 课件、作业与测验在正文适当位置进行标注，将课堂学习和在线学习进行有机的融合。学生通过登录“爱课程”网或“中国大学 MOOC”手机客户端可以浏览微视频、PPT 课件，在线进行随堂测验、参与讨论，在提升课程教学效果的同时，便于学生的自主学习。

本书可作为高等学校非数学专业的高等数学教材，也可供社会学习者学习“高等数学 MOOC”时参考使用。

图书在版编目（C I P）数据

高等数学. 下册 / 李建平，朱健民主编. -- 2版. -- 北京 : 高等教育出版社，2015.9

iCourse・教材

ISBN 978-7-04-042766-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②朱… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第115726号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　封面设计 张雨微　版式设计 张雨微
插图绘制 黄建英　责任校对 张小镝　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　刷 北京中科印刷有限公司
开　本 787 mm× 1092 mm 1/16
印　张 19.75
字　数 400 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　次 2007 年 6 月第 1 版
2015 年 9 月第 2 版
印　次 2015 年 9 月第 1 次印刷
定　价 35.20 元

物 料 号 42766-00

与本书配套的高等数学MOOC使用说明

本书与爱课程网上的高等数学MOOC(包含(一)~(五)5门)配套使用,请登录网站后开始课程学习。

一、网站登录

1. 访问爱课程网 http://www.icourses.cn,在右上角点击“注册”,在注册页面输入邮箱、密码注册后,登录注册邮箱激活账号。已注册的用户直接输入邮箱和密码登录即可。

2. 希望通过“中国大学MOOC”平台加深课程理解的读者,可以通过以下方式进行学习:

① 重新访问爱课程网,点击“中国大学MOOC”栏目,在搜索栏中输入“高等数学”,找到相应课程。

② 进入课程后,点击“报名参加”或“立即参加”,开始课程学习。

3. 希望将高等数学MOOC作为本校课堂教学补充,且本校已使用高等数学MOOC作为SPOC的学生,可以通过以下方式进行学习:

① 重新访问爱课程网,点击“在线课程中心”栏目,在栏目下找到本校名称,进入后点击“进入本校专属(SPOC)课程”,点击“立即认证,开启学习之旅”,在弹出的页面中输入姓名、所在学校、学号、认证码进行身份认证。

② 身份认证通过后,重新点击“进入本校专属(SPOC)课程”,找到“高等数学”进入课程,在课程密码处输入任课教师指定的密码,点击“立即参加”,开始课程学习。

4. 希望将高等数学MOOC作为本校课堂教学补充,但本校未使用高等数学MOOC作为SPOC的学生,可以通过以下方式进行学习:

重新访问爱课程网,点击“在线课程中心”栏目,在栏目下点击“高等教育出版社”,找到“高等数学”进入课程,在课程密码处输入教材封底标签上的密码,点击“立即参加”,开始课程学习。

账号自登录之日起一年内有效,过期作废。

使用本账号如有任何问题,请发邮件至:lixp1@hep.com.cn。

二、资源说明

高等数学 MOOC 的课程资源按照单元、讲知识树的形式构成，每讲配有微视频、随堂测验、教学 PPT 和讨论题等内容，内容标题和特定图标为：

1. 微视频：针对知识点的系统讲解，视频短小精悍，时长均为 6~15 分钟，方便学生学习。

2. 随堂测验：针对知识点讲解的随堂测验，可以有效测试学生对知识的掌握程度，提高学习的效率。

3. 教学 PPT：与微视频紧密配套的教学 PPT，可以下载使用，也可供学生课前预习或课后复习使用。

4. 讨论题：针对每讲知识的综合讨论，启发学习的思维，激发学习的兴趣。

第二版前言

本书第一版从出版到现在，已经有八个年头。在这期间，国内外教学形势发生了翻天覆地的变化，尤其是以“慕课”为代表的大规模在线开放课程的兴起，对高等数学课程的内容和形式提出了新的要求。本次修订正是在这种形势下进行的，经过编者的共同努力，全新的第二版教材终于呈现在广大读者的面前。

第一版教材出版之时，正值国内外大学视频公开课的兴起，名校的教学影响力和其丰富的在线课程资源，将学习者的注意力从传统的大学课堂，吸引到了广阔的在线课堂，使学习者的学习不再受教学内容、教学进程和教学环境等因素的限制，极大地激发了学习者的学习热情和学习主动性。而近两年出现的大规模在线开放课程，更是把大学教学推到风头浪尖，更加丰富的在线课程资源，加之教学团队与学习群体形成的学习社区，弥补了视频公开课教学互动的缺失，让师生共同感受释疑解惑的全过程，也形成了丰富的教学拓展资源。相比之下，传统的纸质教材和授课模式在发挥其传统优势的同时，也显现出明显的不足，尤其是在与教学视频、在线测试与学习研讨互动等方面。只有将教材建设与在线开放课程建设相结合，才能焕发出传统教学的生命力，这也是第二版教材重点解决的问题。

教学视频资源建设是第二版教材修订工作的重要基础。这得益于国防科学技术大学于2012年下半年启动的高水平本科视频课建设，高等数学为其中的建设项目。由我校高等数学课程组教学骨干组成的课程建设项目组，确定了视频课的建设目标为“精心设计每讲内容，形成鲜明课程特色：设置问题，引入概念，突出直观，化解难点，结合应用，理解内涵，拓展知识，引发思考；运用现代教育技术手段，深化和拓展教学内容，建设丰富的辅助教学与学习资源；充分体现主讲教师的教学风采和人格魅力，引发学习者的好奇心，激发学习兴趣；发挥团队的作用，集中课程组教师的智慧和力量，促进我校高等数学课程建设水平的大提升”。视频课以高等数学第一版教材内容为基础，优化整合成100讲教学内容并完成各讲视频的录制，在保留传统高等数学内容的同时，补充和拓展了部分教学内容，如“微积分纵览”、“如何用 Mathematica 做微积分”、“函数的一致连续性”、“解非线性方程的牛顿切线法”、“向量场的微积分基本定理”、“微分方程稳定性初步”等内容，以满足不同学习者对学习内容的需求。

接下来，我们对视频课进行了“慕课”化改造。为适应“慕课”课程的特点和要求，将高等数学分成了五个部分：

“高等数学(一)”包括：一元函数极限、数值级数、连续函数，共21讲；

“高等数学(二)”包括：一元函数导数及应用、定积分及应用，共26讲；

“高等数学(三)”包括：常微分方程、空间解析几何，共14讲；

“高等数学(四)”包括：多元微分学及应用、重积分，共21讲；

“高等数学(五)”包括：曲线曲面积分、幂级数与傅里叶级数、微分方程定性理论初步，共18讲。

同时，将视频按知识点分割成481个微视频，它们构成了“高等数学 MOOC”的视频资源。

然后，为微视频配备驻点测试题和随堂测验题，对每个教学单元配备测验题和讨论题，与教学课件等组成“高等数学 MOOC”的基本资源。

最后，经过课程团队的共同努力，国防科学技术大学“高等数学 MOOC”于 2014 年 5 月 20 日成为爱课程网的中国大学 MOOC 的首批上线课程。

本次修订，纸质教材在形式上相比第一版做了较大改动。双色印刷使文字图形更加生动形象，宽阔的留白将教材内容与“高等数学 MOOC”的教学资源紧密相连，极大地延伸了读者的学习空间。学习者使用教材的时候，结合“高等数学 MOOC”中的教学资源进行学习，可以对课堂学习进行补充，实现本校教师的教学特色与“慕课”优质资源的有机融合，有效提高了教学效率和教学质量。同时，为解决“高等数学 MOOC”开课周期与高校课程开设周期不对应的问题，我们在“爱课程”网上在线课程中心开设了“高等数学 MOOC”的 SPOC 课程，教师和学生可以随时随地访问本课程，为高校探索线上线下相结合的混合式教学模式提供了途径。

作为本书的学习者，充分利用与教材链接的资源将会让你体验同伴学习带来的新感受。首先，内容生动的教学视频向你娓娓道来知识的来龙去脉，有网络的地方就有老师面对面地向你授课，为你的学习带来极大的方便。其次，层次分明的驻点测验、随堂测验和单元测验将有效测试对知识的掌握程度，尽情享受收获知识的快乐。再次，讨论区更让你的学习不再孤独，当你在学习中遇到困惑时，立即有老师和学习者向你伸出援助之手，老师还可以通过讨论区“展示问题、提示引导、评判鼓励、示范解答”，真正做到师生之间、生生之间互相学习、互相促进。

纸质教材的内容符合教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新颁布的工科类本科高等数学教学基本要求，可以作为理工科高等学校高等数学或微积分课程的教学用书。按照我们的教学实践经验，课程在 160—180 学时的学校可以讲授除第十四章外的教学内容。纸质教材的内容继续保持第一版教材的特色，整合优化传统内容实现与高中数学及大学相关课程的顺利衔接，适当选择数学建模与数学实验的内容融入教材，将应用数学软件的技术手段贯穿教材始终，多角度引入和阐述教材涉及的重要概念。值得注意的是，上述特色在教学视频中得以发扬光大，使得纸质教材内容具有更强的感染力。为便于检索教学视频与高等数学五个部分的对应关系，每段视频标注有相应的编号，如“微视频 4-4-4：二元函数全微分的概念”，表明其为高等数学（四）的第四讲的第四个微视频。

本教材的编写和在线课程资源建设是集体劳动的成果。教材第一章、第八章由周敏编写，第二、三、四、十一、十二章由朱健民编写，第五、六、九、十章由李建平编写，第七、十三、十四章由黄建华编写。刘雄伟负责实验题配置和大部分图形的绘制。王晓、倪谷炎、吴强、胡小荣、陈挚、陈吉美、唐斌兵、唐杨斌、戴丽、刘易成、龙汉、唐玲艳、李君、谢新艳、杨淑芳等教师参与了习题的选配和校对工作，罗建书教授对本书的编写给予了全程指导。全书由朱健民和李建平统稿、定稿。在线课程的教学资源由朱健民、李建平、黄建华、王晓、周敏、刘雄伟、罗永、赵侠、吴强、王淼、胡小荣、童照春等组成的团队共同建设。

最后，衷心感谢国防科学技术大学的各级领导对教材编写和“慕课”建设的高度重视和热情指导。感谢高等数学课程组的全体同志，他们的辛勤付出为我们积累了丰富的资源和经验，成为本次教材修订和课程资源建设的重要基础。感谢高等教育出版社的李晓鹏编辑，是他的精心策划和指导使教材呈现出时代特色。感谢“爱课程”及其团队，是他们搭建的中国大学 MOOC 平台让我们的教材与课程有了展示的舞台，在此以作者在中国大学 MOOC 上线一周年的感言表达对

他们的谢意：

是你让大学课堂延伸到世界每个地方，
是你让广大学友汇聚到在线开放课堂，
是你让传统教学转变到学习者为中心，
是你让大学数学放射出迷人智慧之光，
感谢你，中国大学 MOOC
有你的地方就有无数慕友在尽情徜徉……

编　者
2015 年 5 月

第一版前言

这部高等数学教材是我们通过 5 年多的教学改革与实践,在对编写方案进行充分论证的基础上完成初稿,并经过一轮教学试点后修订而成的。

在教材编写过程中,我们始终将提高学生的数学素质和应用能力摆在首位,努力贯彻现代教育思想,改革、更新和优化微积分教学内容,使用现代教育技术,吸收国内外优秀教材的经验和我校多年来在高等数学教学改革、研究和实践中积累的成果,力求使教材更具特色。

(1) 努力实现课程体系和内容的优化整合

高等数学课程必须既注意高中数学教材中涉及的微积分内容,又注意到它和线性代数与空间解析几何、大学物理、工科专业课程内容及其表述之间的联系;既注意经典内容向现代数学的扩展,同时也有意弱化极限的严密化表述,以此降低学习难度。同时,努力减少课程之间重复内容的讲述,实现课程之间无缝衔接和知识的顺利过渡,从而真正实现课程体系的优化,彻底消除学生在知识表述的不一致性方面的认知负担。如将数列极限与数值级数合成一章,既可减少数列极限计算的重复训练,又能突出数列极限的应用;在多元函数微分学的处理上,采用向量方法,既加强了和线性代数之间的联系,又有利于向非线性最优化等领域的扩展;采用向量场的积分学,有利于加强高等数学与大学物理等课程的有机结合。

(2) 将数学建模及数学实验的思想与方法融入教材及课程教学中

将数学建模及数学实验的思想与方法融入教材及课程教学中,一方面利用数学软件开展数学实验,另一方面运用数学知识和数学软件工具解决来自自然科学、社会科学、工程及军事应用中的实际问题。这样设计教学内容,有助于培养学生多角度、多层次思考问题的习惯,有助于提升学生实践性动手能力,有助于拓宽学生的知识面和视野,有助于提高学生"用数学"的兴趣和能力,有助于培养学生科学研究的探索精神和创新意识。我们在内容的取舍和习题的选配上特别增加了应用性和实验性的内容,重点关注微积分在现代科学、工程及军事各领域的应用,以此加强数学课程的实践性教学环节,通过对开放性问题的探索,培养学习者的创新精神和创新能力。

(3) 将数学软件的学习和使用穿插在教学内容中

利用现代化的数学软件,如 Mathematica、Maple、MATLAB 等解决数学教学中计算、数值分析、图形处理等问题,将抽象的数学概念与理论直观化、实验化、可视化,有助于消除学生对数学知识的困惑,提高学生的学习兴趣。在涉及微积分内容的符号、数值计算以及图形显示等方面,将 Mathematica 软件的常用格式命令分散在教材相应章节介绍,使学习者在学习教材内容的同时,也学会了该数学软件的使用方法,同时也为淡化计算技巧、加强对概念的直观理解提供了有利条件。

(4) 突出数学思想,通过多角度描述来加深对内容的理解

与传统高等数学教材相比,这本教材篇幅有较大的增加,这里并不是多个知识点的堆砌而使

得内容如此庞大,其主要原因是增加了大量描述性的内容。无论是概念的引入、定理的建立还是应用例题的讲解,我们大都从不同角度、不同层次加以描述,并经常用数值表格或直观图形来阐明,让读者能在自我阅读过程中理解和把握学习内容,试图改变传统教材由于表述简洁而带来阅读上的困难。同时,教材的易读易懂,也为课堂教学变“细讲少练”为“精讲多练”提供了可能。

本教材是集体劳动的成果,在编写过程中充分发挥了团队的凝聚力和刻苦攻关的精神。其中,第一章由周治修编写,第二、三、四、十一、十二章由朱健民编写,第五、六章、九、十章由李建平编写,第七、十四章由黄建华编写,第八章由周治修、李建平共同编写,第十三章由罗建书编写。除此以外,周治修、胡小荣、刘雄伟、陈挚、周敏、吴强、陈吉美等同志参与了习题的选配和校对工作,刘雄伟同志为本书绘制了图形。全书由朱健民和李建平统稿、定稿,并对一些章节作了适当修改。

关于本教材的使用我们强调两点:首先,我们前面指出,本教材内容遵循“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,涵盖微积分和空间解析几何所要求的全部内容,因此适合高等工科院校工科和非数学类理科的所有教学对象。其次,通过我们的教学试点,我们认为在160学时以内,可以讲授本书除第十四章以外的全部内容。若不讲授空间解析几何(第八章),则148学时可以讲完剩余内容,不过该章内容也不失为一个好的阅读材料。对于只需满足基本要求的教学对象,还可根据具体情况,通过调整讲授内容减少课时。

在本书的编写过程中,我们参考了国内外大量的参考文献和资料,由于追根溯源的困难和不便,我们未在书中明确指出引用材料的出处。但我们深感正是这些优秀的参考文献和资料给我们带来诸多编写的启示,同时也为我们提供了大量可引用的素材,在此特别对参考文献和资料的作者表示衷心的感谢!

最后,感谢校、部和学院三级领导对本教材编写的支持和指导,学校训练部为教学试点提供有利条件,并设立专项课题给予经费支持,理学院院领导时刻关注编写及试点工作情况,并不时给予热情鼓励。同时也要感谢我校汪浩教授、黄柯棣教授、李圣怡教授、皇甫堪教授和杨晓东教授,他们认真评审了本教材的立项申请报告,并提出了许多建设性的意见。最后,特别感谢闫岘峰教授、敖武峰教授、李志祥教授,他们对本书初稿进行了认真细致的审阅,对整个编写工作给予了具体指导。正是由于有了领导、教师们的大力支持和鼓励,才使得高等数学教材建设顺利进行。高等教育出版社的王强编辑和李陶编辑对本书的选题和成书给予了大量的指导,在此表示衷心的感谢!

尽管我们倾注了极大的心血,但书中肯定还存在着不足,甚至某些错误,恳请大家及时指出,以便进一步修正。

编　者

2006年7月15日,长沙

目 录

第八章
空间解析几何

微积分的许多概念和原理都具有直观的几何意义，将抽象的数学概念及原理与几何直观有机地结合起来，不仅能帮助人们加深对问题的理解，而且能够提高人们的想象能力与创造能力. 在本书上册中，我们已经看到平面解析几何对于学习一元微积分的重要性. 同样，为了学习多元函数微积分，我们需要空间解析几何的一些基本知识. 本章介绍向量及其运算、空间平面与直线、空间曲面与曲线等相关知识以及常见的空间曲面的图形及特点.

8.1 向量及其运算

MOOC
微视频
3-6-1
问题引入——笛卡儿是数学的坐标

8.1.1 空间直角坐标系

MOOC
微视频
3-6-2
空间直角坐标系——空间点的坐标

MOOC
随堂测验

1. 空间中点的坐标

为了确定平面上的点的位置，人们通过建立平面直角坐标系，使得平面上的点与二元有序数组(x,y)之间建立起一一对应关系，这些二元有序数组的集合记作：

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}.$$

它是平面上全体点的集合.

为了确定空间中点的位置，需要引入空间直角坐标系. 如图 8.1.1 所示，以空间中一定点 O 为原点，引三条互相垂直的数轴构成的坐标系，称为空间直角坐标系. 这三条数轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 按习惯，规定 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴为铅直垂线. 它们的正向通常符合右手法则，即以右手握住 z 轴，四指指向 x 轴正向，并将拳握向 y 轴正向，拇指恰好指向 z 轴正向. 通常，x 轴的正向朝着前方（向着读者的一方），y 轴的正向由左到右，z 轴的正向从下到上.

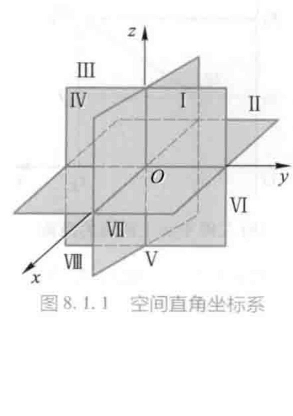


图 8.1.1 空间直角坐标系

三个坐标轴两两决定一个平面，称之为坐标平面，分别记作 xOy、yOz 及 zOx

平面. 这三个坐标平面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 含有正向 x 轴、正向 y 轴及正向 z 轴的那个卦限称为第一卦限. 其余七个卦限没有公认的定义，通常可以按图 8.1.1 的方式进行定义. 在坐标平面 xOy 上方的四个卦限按逆时针方向分别是第一、二、三、四卦限；在坐标平面 xOy 下方的四个卦限按逆时针方向分别是第五、六、七、八卦限，其中第五卦限恰好位于第一卦限的正下方. 在图 8.1.1 中，这八个卦限分别用罗马数字Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示.

取定了空间直角坐标系之后就可以建立空间中的点与有序三元数组之间的一一对应关系. 如图 8.1.2，设 M 为空间中的已知点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴及 z 轴，它们与三个坐标轴的交点依次为 P、Q 及 R，这三个点在坐标轴上的坐标分别为 x、y 及 z. 于是，空间中一点 M 就唯一地确定一个有序三元数组 (x,y,z)；反之，已知一个有序三元数组 (x,y,z)，就可以在 x 轴、y 轴及 z 轴上分别找到坐标为 x，y 及 z 的三点 P、Q 及 R. 过这三点 P、Q 及 R 分别作平面垂直于该点所在的轴，这三个平面就唯一地确定了一点（交点）M. 这样，空间中一点 M 就与有序三元数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系，这一有序三元数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标，其中 x 称为横坐标，y 称为纵坐标，z 称为竖坐标. 点 M 也记为 $M(x,y,z)$. 所有三元有序数组的集合记作 $\mathbb{R}^3$：

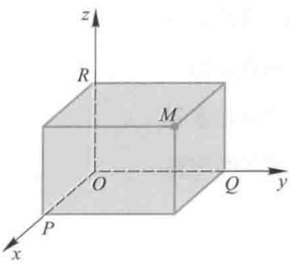


图 8.1.2　空间点的直角坐标

微视频
3－6－3
空间直角坐标系——两点间的距离

随堂测验

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R},z\in\mathbb{R}\}.$$

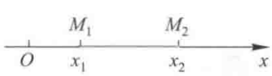
它是空间中全体点的集合.

根据空间中点的坐标表示，容易确定该点空间位置的某些特征. 例如：

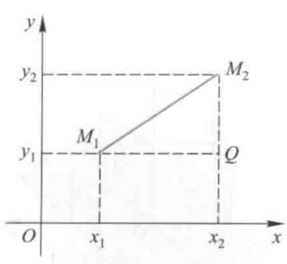
（1）点 $(0,0,a)$ 位于 z 轴上；

（2）点 $(0,a,b)$ 位于 yOz 平面上；

（3）点 $(1,2,3)$ 位于第Ⅰ卦限；点 $(1,2,-3)$ 位于第Ⅴ卦限. 这两点关于 xOy 面对称.



(a) 一维数轴上两点的距离



(b) 二维平面上两点的距离

图 8.1.3　一维数轴与二维平面上两点的距离

2. 空间两点的距离

我们知道，一维数轴上两点 $M_1(x_1)$ 与 $M_2(x_2)$ 的距离为

$$|M_1M_2|=|x_2-x_1|.$$

二维平面上两点 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$ 的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.\qquad(8.1.1)$$

如图 8.1.3 所示.

现在我们考察三维空间中两点的距离.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中两点. 如图 8.1.4 所示，过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面构成一个以 M_1M_2 为对角

线的长方体. 在直角三角形 M_1NM_2 中,有

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2.$$

又$\triangle M_1PN$ 也是直角三角形,且

$$|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2,$$

所以

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \tag{8.1.2}$$

这就是空间两点间的距离公式.

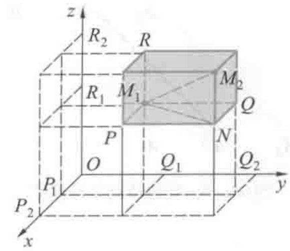


图 8.1.4 三维空间中两点的距离

MOOC
讨论题
3-6
空间中两点之间的距离
设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中两点,它们之间的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(1) 试用代数方法验证,对空间中任意三点 P_1, P_2, P_3,成立三角不等式

$$|P_1P_2| \leqslant |P_1P_3| + |P_2P_3|;$$

(2) 试用其他方式定义 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离,使之满足上述三角不等式.

例1 在 z 轴上求与两点 $A(3,1,-4)$ 和 $B(5,3,2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 z 轴上,所以设该点为 $M(0,0,z)$,依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\sqrt{(3-0)^2+(1-0)^2+(-4-z)^2} = \sqrt{(5-0)^2+(3-0)^2+(2-z)^2}.$$

两边去根号,解得 $z=1$. 因此,所求的点为 $M(0,0,1)$.

特别地,点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{8.1.3}$$

例2 求点 $A(a,b,c)$ 到 yOz 面以及 x 轴的距离.

解 点 $A(a,b,c)$ 在 yOz 面上的投影点为 $A_1(0,b,c)$,所以点 A 到 yOz 面的距离为

$$|AA_1| = \sqrt{(0-a)^2+(b-b)^2+(c-c)^2} = |a|.$$

又点 $A(a,b,c)$ 在 x 轴上的投影点为 $A_2(a,0,0)$,所以点 A 到 x 轴的距离为

$$|AA_2| = \sqrt{(a-a)^2+(0-b)^2+(0-c)^2} = \sqrt{b^2+c^2}.$$

8.1.2 向量及其线性运算

1. 向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用学科时,常常会遇到这样一类量,它们既有大小,又有方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等,向量就是这些量的数学抽象. 相比较而言,只有大小没有方向的量称为数量. 例如,一架从长沙飞往北京的客机,在飞行过程中,它的速度和加速度都是向量,但是飞行时间以及油箱中的油量是数量.

MOOC
微视频
3-6-4
向量及其线性运算——向量的基本概念

MOOC
随堂测验

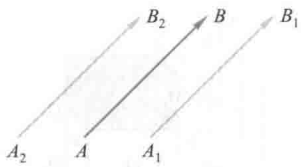


图 8.1.5　向量及其平行移动

在几何上，往往用一条带箭矢的线段，即有向线段来表示向量，所以，向量也称为矢量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$，如图 8.1.5 所示. 通常，向量用印刷体的粗体字母或书写体上面加箭头的字母来表示. 例如，我们用$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{F}$或$\vec{v}$、$\vec{a}$、$\vec{F}$分别表示速度、加速度及力这几个向量.

在实际问题中，有些向量与起点有关，有些向量与起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以数学上只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量（以后简称为向量）.

对于自由向量，如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平移后能完全重合的向量是相等的. 这时，它们看做是同一个向量. 在图 8.1.5 中，向量$\overrightarrow{A_1B_1}$与$\overrightarrow{A_2B_2}$都能由向量$\overrightarrow{AB}$平行移动得到，所以，它们是同一个向量.

向量的大小叫做向量的模. 向量$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$的模依次记作$|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于 0 的向量叫做零向量，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看做是任意的.

两个非零向量，如果它们的方向相同或者相反，就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看做是任意的，因此可以认为零向量与任何向量平行.

在高中，我们已经从几何的观点熟悉了向量的概念以及加法与减法等运算. 下面，我们将从代数的观点来定义向量以及它的运算，这将为向量的计算提供极大的方便. 我们还会看到，用代数观点定义的向量及其运算与用几何观点给出的相应概念是一致的.

在平面上，从点 $A(x_1,y_1)$ 到点 $B(x_2,y_2)$ 的向量$\overrightarrow{AB}$表示为

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1),$$

其中 x_2-x_1 与 y_2-y_1 分别称为$\overrightarrow{AB}$的 x,y 轴方向的分量，它们分别对应$\overrightarrow{AB}$在 x 轴、y 轴上的投影.

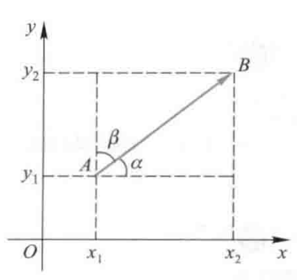


图 8.1.6　平面上的向量及其表示

向量$\overrightarrow{AB}$的模等于有向线段 AB 的长度，即 A、B 两点的距离，所以，由(8.1.1)式知

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

它的方向可由有向线段 AB 与 x 轴、y 轴正向的夹角 α,β 确定，规定 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$（图 8.1.6）. 称 α,β 为向量$\overrightarrow{AB}$的方向角，$\cos\alpha$,$\cos\beta$ 为它的方向余弦. 根据图 8.1.6，容易得到

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}.$$

于是,我们有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1.$$

由平面解析几何知识知道,对于向量$\overrightarrow{AB}$以及从点$C(x_3,y_3)$到$D(x_4,y_4)$的向量$\overrightarrow{CD}=(x_4-x_3,y_4-y_3)$,当且仅当它们的分量对应相等,即当

$$x_2-x_1=x_4-x_3,y_2-y_1=y_4-y_3$$

时,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. 向量$\overrightarrow{CD}$可由$\overrightarrow{AB}$平移得到,所以,它们是同一向量. 因此,平面上的向量由它的分量唯一确定.

类似地,在空间中,从点$A(x_1,y_1,z_1)$到点$B(x_2,y_2,z_2)$的向量$\overrightarrow{AB}$表示为

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

其中x_2-x_1、y_2-y_1与z_2-z_1分别称为$\overrightarrow{AB}$的x,y,z轴方向的分量,它们分别对应$\overrightarrow{AB}$在x轴、y轴、z轴上的投影.

向量$\overrightarrow{AB}$的模等于有向线段AB的长度,即A、B两点的距离,所以,由(8.1.2)式知

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

它的方向可由有向线段AB与x轴、y轴及z轴正向的夹角α,β,γ确定,规定$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$. 称$\alpha,\beta,\gamma$为向量$\overrightarrow{AB}$的方向角,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为它的方向余弦,其中

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\beta=\dfrac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\gamma=\dfrac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.\end{cases}\tag{8.1.4}$$

根据图8.1.7,读者容易证明(8.1.4)式.

我们有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

同样,空间中的向量也由它的分量唯一确定. 因此,一个空间中的向量通常表示为

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),$$

并称它为一个三维向量. 此时,向量$\boldsymbol{a}$的模为

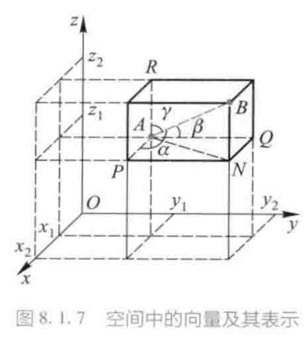


图8.1.7 空间中的向量及其表示