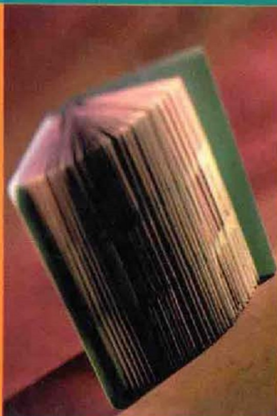
中学数学专题丛书

叶尧城 主编



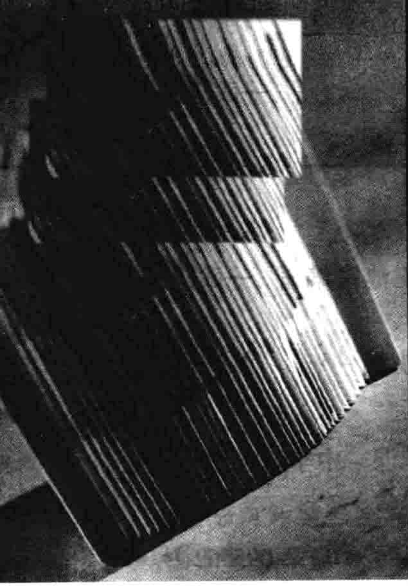
王池富 编著

中学数学
思维与思想方法

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

4



中学数学专题丛书

叶尧城 主编

中学数学思维与思想方法

王池富 编著

4

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

中学数学思维与思想方法/王池富编著 .—武汉:湖北教育出版社,2002

(中学数学专题丛书/叶尧城主编)

ISBN 7-5351-3160-3

Ⅰ.中…　Ⅱ.王…　Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料

Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 095562 号

出版　发行:湖北教育出版社
网　址:http://www.hbedup.com

武汉市青年路 277 号
邮编:430015　传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经　销:新　华　书　店
印　刷:文字六〇三厂印刷　(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开　本:787mm×1092mm　1/32　8.25 印张
版　次:2002 年 4 月第 1 版　2002 年 4 月第 1 次印刷
字　数:160 千字　印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3160-3/G·2565　定价:11.00 元

总　　序

随着素质教育的深入推进，需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁，以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建？改革教材成为了人们选择的突破口！当前，国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用，新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而，我国幅员辽阔，地区间的教育水平的差异大，个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”，发展学生的个性特长，让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高，还需要通过特定的教学过程来完成，其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等)。因此，我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物，以专题讲座的形式，帮助学生了解知识的发生、发展过程，学会分析、解决问题的思想方法，深化、拓宽相关知识。

有鉴于此，我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子，各册相对独立又相互联系，小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触，介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础**。通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力**。精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用**。精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新**。精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功**。选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

引　言

数学学习对学习者而言是一个发现和创造的过程．在数学学习过程中，如何寻求和形成适合学习者自身特点的有效学习方法，如何培养举一反三、触类旁通的数学迁移能力，如何感悟提炼基本的数学思想方法，如何培养解决数学问题的策略知识，思维障碍之处如何进行有效的预防和排除等等．这些都是学生、教师、家长共同关心的问题，本书既从理论上予以分析、阐述，又结合实例分析解读．

数学科学发展历程告诉我们：零星的观点汇聚形成有用的思路和特殊的技巧，有效的思路演变为系统的方法和策略，科学的方法拓变升华为科学思想．反过来，科学思想统摄指导思维方法，科学方法又演绎出若干技巧．因此，科学大师们认为思想方法的作用远大于具体知识的作用．作者衷心希望读者通过阅读本书学会科学的数学思维方法，形成有效的学习方法，养成良好的学习习惯，培养和提高应用所学数学知识分析、解决实际问题的能力．

本书写作过程中，除引用了本人部分论文外，还参考了大量的书籍及期刊论文，融聚了许多专家、师长、同事的真知灼见，在此一并致谢！

王池富

目录

第一章 数学与科学

第一节　从几何作图谈起

在初中阶段,同学们学习过用直尺(没有刻度的直尺)和圆规作图.关于作图,大约在2400多年前古希腊盛传三大作图题:

①立方倍积问题:求作一个立方体,使它的体积二倍于一已知立方体的体积;

②三等分角问题:将一已知角三等分;

③化圆为方问题:求作一正方形,使它的面积等于一已知圆的面积.

两千多年以来,不少数学家对此问题进行了无数次的尝试.当正面作图未果时,人们便转向从反面去怀疑这三个问题是不可能用直尺和圆规来完成的.到了1837年和1882年,终于有数学家证明了这三大问题是不能仅仅用直尺和圆规来完成的.

在众多的数学王国探秘者中,古希腊数学家梅内克莫斯在试图解决立方倍积问题时发现了圆锥曲线,约是公元前4世

纪.后来,阿波罗尼斯对圆锥曲线的性质作了全面、透彻的研究,这约是公元前3世纪时期.当时,无论梅内克莫斯、阿波罗尼斯,还是其他古希腊数学家,都万万没料到这种曲线会同真实的物理世界之间有什么联系.大约过了1800年,当开普勒根据哥白尼的日心说体系分析行星的运动轨道时,他发现古希腊数学家们为寻求内在的数学美而深入研究过的这种曲线,正好是描述行星的运动轨道所必需的.

另外,18世纪以前,人们所认识的太阳系成员只有太阳、六大行星及一些卫星.1776年,德国一位天文爱好者根据一些已知的行星数据,发现已知的六大行星与太阳的距离似乎有一定的规律性.他指出:

如果把太阳到土星的距离分成100个单位,那么水星到太阳的距离是4,金星到太阳的距离是$4+3=7$,地球到太阳的距离是$4+6=10$,火星到太阳的距离是$4+12=16$.另外,木星到太阳的距离是$4+48=52$,土星到太阳的距离是$4+96=100$.其中呈现出序列:$3, 3\times2=6, 6\times2=12,$ $\boxed{\quad\quad}$ $, 24\times2=48, 48\times2=96$.从火星往外,按说应该是$4+24=28$,可是该处既无行星,也无卫星.于是,他信心十足地作出猜测:该位置是属于一颗尚未发现的新星的.

后来,天文学家根据这一天文数字规律,经过细致观察,搜寻发现了天王星……

上述发现是成功地运用数学思想和方法的范例.

数学应用的广泛性日益明显,“数学的内容、思想、方法和语言已广泛渗透自然科学和社会科学,成为现代文化的重要组成部分”.数学除在物理、化学学科有广泛应用外,现已渗入

到生物学、地质学、航空航天、机械设计与制造、生命科学探秘、大型工程模拟计算及论证等领域.通过学习数学可以增强我们分析和解决问题的能力;学习数学可以陶冶我们的情操,提高我们的审美意识和水平;学习数学可使我们学会科学的思想方法.总之,数学将使我们变得更聪明.

第二节 数学的美育功能

法国著名的数学家群体布尔巴基学派曾说:“数学好像一座大城市,它的郊区在周围的土地上不停地有点杂乱无章地向外扩展,同时市中心隔一段时间就进行重建,每一次设计更加明确,布局更加雄伟,总是以老的住宅区和它们迷宫式的小街道为基础,通过更直、更宽、更舒适的林阴大道通往四面八方.”“数学完美的定理、结论等简直是一座大花园,开的都是人类思维的花朵,它们长有空谷幽兰、高塞杜鹃、老丛中的人参、冰山上的雪莲、绝顶上的灵芝、抽象思维的牡丹.”

在数学学习与研究中,大量表面看来枯燥无味的推理和计算,其中蕴藏着内在的、深邃的、理性的美.当我们创设了一种简便的方案、作出一个简捷的论证、发现一种新的成功应用时,就会在内心深处激起强烈的美感.

数学从形式到内容、到具体知识结构,本身具有一定美感.数学能陶冶人的美感、增进理性的审美能力.正如法国著名数学家所言:“数学是艺术,又是科学,它也是一种智力游戏,然而它又是描绘现实世界的一种方式和创造现实世界的

一种力量."

一、黄金分割及其应用

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$称为黄金比,意指将一条线段分成两段,使其中较大的一段是原线段与较小一段的比例中项,人们有时将$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618034$称为黄金数.如果从代数角度来看,可提出问题:

试求一个正数 x(不一定是有理数),使它的小数部分$\{x\}$、整数部分$[x]$与此数本身成等比数列.

因为　$x=[x]+\{x\}$,且$\frac{[x]}{\{x\}}=\frac{x}{[x]}$

所以　$\frac{[x]}{\{x\}}=\frac{[x]+\{x\}}{[x]}=1+\frac{\{x\}}{[x]}$

由于　$[x]\neq 0$,从而$[x]\geqslant 1$

所以　$[x]<\frac{[x]}{\{x\}}=1+\frac{\{x\}}{[x]}<2$

因此　$[x]=1$

由$\frac{1}{\{x\}}=1+\{x\}$　解得$\{x\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,故 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

黄金分割是欧洲文艺复兴时期,由意大利著名艺术家、科学家达·芬奇所冠以的美称.黄金分割在美学、建筑、艺术及日常生活中有非常广泛的应用.独唱演员站在舞台的黄金分割点,给人感觉最佳,音响效果最好.若人的肚脐是身高的黄金分割点,膝盖是肚脐到脚跟的黄金分割点,则人的身材最匀称.古希腊的智慧女神和太阳神的塑像都采用这种建设比;医生认为,对晕车的病人,膏药贴在肚脐上,有神奇的治疗效果.

摄影及绘画中,主题大多在画面的0.618处.再如现代印刷的书籍、图片以及门窗等其长宽之比大多接近黄金比,显得既美观大方,又节省材料.建筑中,在摩天大厦的黄金分割点设置饰物,整个大厦显得雅致.平面几何中,应用直尺和圆规作正五角星,关键也在于作出黄金分割点,作法为:

首先作直径 $PA \perp BC$,以 A 为圆心,以 R 为半径画弧交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 F;再以 F 为圆心,以 AB 为半径画弧交 OP 于 G.则 BG 即为$\odot O$ 的内接正五边形的边长,从而可作出正五角星,此时 G 为半径 OP 的黄金分割点.(如图1)

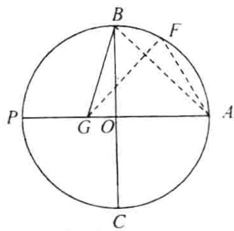


图 1

我们可以计算得出,正五边形的边长与对角线之比正好等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(请同学们自己推证).

更有趣的是,斐波那契数列1,1,2,3,5,8,13,21,……($a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$及 $a_1 = a_2 = 1$)的比值$\frac{a_n}{a_{n+1}}$当 n 无限增大时,也等于黄金数,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

享有美感之称的$0.618\cdots = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$的如下变形,也给人以和谐、统一的感觉.

$\omega = 2\sin 18^\circ$

$$\omega=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots\sqrt{1-a}}}}\quad(0<a<1)$$

$$\omega=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots\sqrt{\cdots}}}}}$$

$$\omega=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

数学本身是科学、是艺术.数学知识严谨、和谐、有一定的内在联系(比如杨辉三角),给人以美的享受;另外,解题及思维过程中表现或体验的协调、统一、简单、和谐、对称、直观概括等实质上是一种美妙愉快的感觉.通过对数学中大量对称与和谐、简单与直观、奇异与突变等的感觉,可以培养自己的数学审美能力,而这种能力正是我们今后从事社会工作和数学发现等不可缺少的一种创造思维能力.

二、优美图及其应用

下列各图(图2、图3、图4),我们将每个点标号后(最大标号恰为边数)发现,点的标号之差的绝对值互不相同,具备上述特点的图叫优美图,这种貌似游戏的优美图在科学技术中有很好的实际用途.

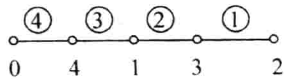


图 2

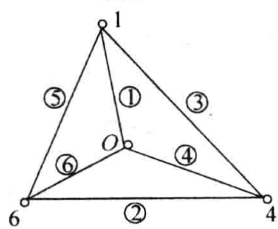


图 3

关于优美图,美国国防部曾

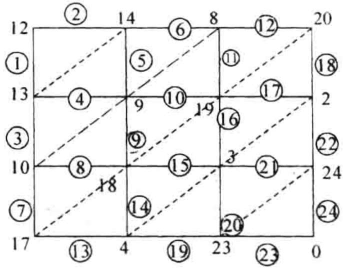


图 4

于 20 世纪 70 年代拨专款资助数学家开展研究,并将其应用于空军部门.下面的例子也可说明优美图的应用.

变压器中输入电压与输出电压之比等于原线圈匝数与副线圈匝数之比.如果要获得 100 伏、200 伏、…、600 伏 6 种不同电压值,如何设计最少的抽头?

笨办法是造 6 个抽头,但 6 条边的(简单)图以图 3 顶点最少,图 3 是优美图,所以只用 4 个抽头(图 5).

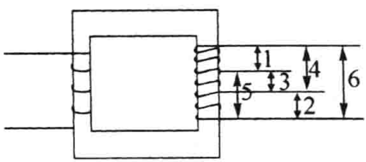


图 5

我们解决问题总是力求简捷的过程,明快、清晰的思路;不少数学公式(如 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$),数学命题(对 a、b、$c\in R^+$, $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$, $a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$)呈现对称的优雅结构形式;有的数学图形本身具有对称形态;有的定理、结论(如圆锥曲线统一极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$)包容诸多内容,体现了高度的统一.有的理论突破常量、有限等传统框框

显得奇异(如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$).

如果我们在学习数学过程中能有意识地去欣赏、有目的地去挖掘,一方面可将相关知识串联起来,助于记忆、便于应用;另一方面可增强对数学知识的迁移、联想思维能力,可激发审美情趣,有时甚至能做出惊人的成绩.下面列举平面几何中几个精彩美妙的结论供大家鉴赏、回味.

拿破仑三角形:以任意一个三角形的三边为边长,向外各作一个正三角形,则三个正三角形的中心又构成一个正三角形.

莫莱定理:将任意三角形的各角三等分,则与每边相对的两条三等分角线的交点构成一个等边三角形.

蝴蝶定理:过圆中 AB 弦的中点 M 引任意两条弦 CD 和 EF,连接 CF 和 ED 分别交 AB 于 P、Q,则 $PM=MQ$.

完美正方形:把一个矩形(或正方形)剖分成大小(规格)不同的正方形问题称为剖分问题.能够被完美剖分的矩形(或正方形)则称为完美矩形(或正方形)(如图6).

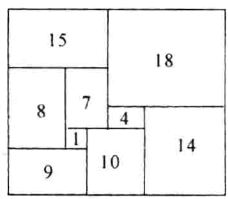


图 6

数学定理的和谐美、数学推理的完全美、数学语言的简约美、数学构思的创新美等,都是其他科学训练中难以获得的.学习过程本身就是欣赏和体验的过程,对学习者而言,也是一个创新的过程.

第三节 数学的文化功能

数学起源于计数的需要和自然数的发明,从"有"、"无"两个朦胧概念到结绳计数,数学几乎是伴随着人类的诞生而诞生的,所以说劳动创造人,也创造了数学.数学文化源远流长.随着社会的进步、经济的发展,数学也得到相应的发展,数学科学的成果往往带有开发性和预见性,它能指导、调控人类未来的实践活动.1847年,英国数学家、逻辑学家布尔和德·莫干两人创立了逻辑代数.当时谁也不知道它究竟有何作用,谁知1946年第一台电子计算机问世后,逻辑代数竟成了自动化系统和计算机科学的奠基石!

当今时代,数学已渗入各行各业,数学知识已渐渐成为一种人人必备的文化,高新技术产业数字化的程度越来越高.因此,有的数学家认为:各种高新技术(仿真技术、电子技术)本质上是一种数学技术,未来的文盲是不具备必需数学知识的人.生活中的实物分配、住房分配、运输计划调度,乃至国民经济规划设计、生命科学研究、大型工程论证、空间技术探秘都显示了数学的威力.正如华罗庚教授于1950年的精辟论述:"宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁无处不用数学."

著名数学家王梓坤教授在《今日数学及其应用》中曾指出:有些重要问题的解决,数学方法是惟一的,也就是说,除数学外,用任何其他方法、仪器、手段都是一筹莫展.报告中列举