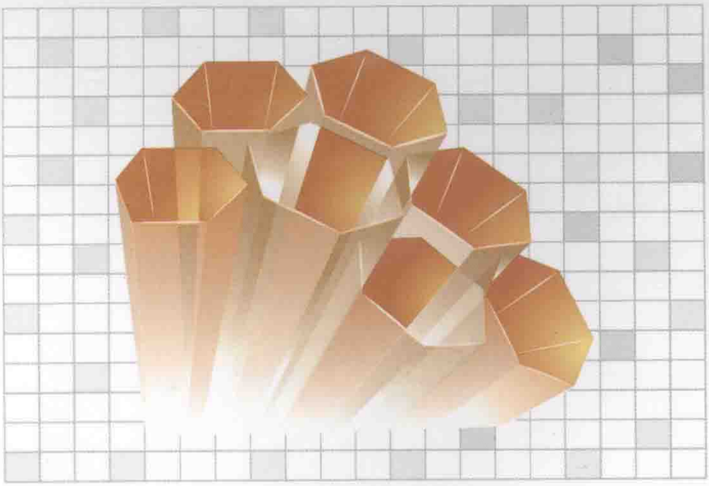
信息环境下大学数学课程改革系列教材

高等学校应用型创新型人才培养系列教材

新编概率论与数理统计

主编　孙淑娥　刘　蓉



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

信息环境下大学数学课程改革系列教材
高等学校应用型创新型人才培养系列教材

新编概率论与数理统计

主　编　孙淑娥　刘　蓉

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是理工类非数学专业学生的“概率论与数理统计”课程教材。全书共九章，内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析. 每章末均设有习题，其中有一部分是考研题. 书末附有习题答案和附表等.

本书可作为高等学校理工、农医、经济、管理等非数学专业学生的“概率论与数理统计”课程教材，亦可作为工程技术人员和大学生考研复习的参考用书. 为了帮助和提高各类读者学习，本书可以结合与其配套的书籍《新编概率论与数理统计学习指导》(孙淑娥，西安电子科技大学出版社)一起使用.

图书在版编目(CIP)数据

新编概率论与数理统计/孙淑娥，刘蓉主编. —西安：西安电子科技大学出版社，2015.4
高等学校应用型创新型人才培养系列教材
ISBN 978-7-5606-3561-3

Ⅰ.①新…　Ⅱ.①孙…　②刘…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材　②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 015551 号

策划编辑　毛红兵
责任编辑　王　飞　毛红兵
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西大江印务有限公司
版　　次　2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张　17.5
字　　数　411 千字
印　　数　1～3000 册
定　　价　32.00 元
ISBN 978-7-5606-3561-3/O
XDUP　3853001-1

前　言

“概率论与数理统计”是高等院校理工科专业的必修课，又是一门基础课程，同时也是工学和经济学硕士研究生入学考试数学科目的必考内容. 随着计算机的迅猛发展，能用于计算有关概率问题和处理统计分析问题的软件也应该充分运用于该课程的学习中. 为此，在体系安排方面，本书既考虑到了内容的完整性和基础性，又考虑到了计算机对该课程影响的先进性. 为了帮助和满足各类学生学习的需要，除本书之外，另外还专门配套一本《新编概率论与数理统计学习指导》，供广大读者学习使用. 本书可供高等学校理工科各类专业学生使用. 根据各校的实际情况或不同专业的需要，讲授约需 54～72 学时.

本书吸收了当前教材改革中的一些成功举措，使得该书更适合当前教学的需要，成为一本适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材，并保证知识体系的完整性和结构的严谨性. 在内容编排上，全书由直观到抽象，由具体到一般，由浅入深，循序渐进，并备有选学内容(加注了“*”号). 在习题配置方面不仅题型齐全，还编选了一些历年的考研真题. 本书在编写的过程中，力争保证逻辑清晰、概念准确、叙述详细，力求做到科学性与通俗性相结合. 对于一些抽象的概念，本书尽量用直观形象的图形给予解释和说明. 另一本《新编概率论与数理统计学习指导》，在对例题、习题做进一步拓展和延伸的基础上，增加了一些历年考研真题、案例分析，运用软件计算概率和进行统计分析，并利用数学文化熏陶当代大学生. 本书的主要特点反映在以下三个方面：首先，以先进的教育理念为前提，在数学文化背景下，分析问题，认识事物；其次，将抽象问题直观化；再次，突出数学应用的意识，充分体现该课程的先进性和实用性.

本书由长期从事大学数学基础课程教学的教师们编写，其中，孙淑娥承担概率论部分的编写和全书的统稿工作，刘蓉承担数理统计部分的编写工作.

编者需要特别声明的是，对编写此书提供了帮助而没能一一列举出来的有些电子网页资料的作者、某些精品课程资源网站的作者以及一些遗漏的参考文献的作者，在此一并表示最诚挚的感谢!

由于时间有限，书中难免有疏漏之处，加之作者水平有限，书中一定存在不妥之处，恳请广大专家、同行等各类读者批评指正，以便改正完善本书.

编　者

2014 年 11 月

目　录

第一章　随机事件及其概率 …………（1）

1.1　随机事件 …………（1）

1.1.1　随机现象与随机试验 …………（1）

1.1.2　样本空间与随机事件 …………（4）

1.1.3　随机事件间的关系与运算 …………（5）

1.2　随机事件的概率 …………（7）

1.2.1　概率的统计定义 …………（7）

1.2.2　概率的公理化定义 …………（9）

1.3　古典概型与几何概型 …………（12）

1.3.1　等可能概型 …………（12）

1.3.2　几何概型 …………（15）

1.4　条件概率与乘法公式 …………（17）

1.4.1　条件概率(conditional probability) …………（17）

1.4.2　乘法公式 …………（19）

1.5　全概率公式与贝叶斯公式 …………（19）

1.5.1　全概率公式 …………（19）

1.5.2　逆概率公式 …………（20）

1.6　随机事件的独立性与伯努利概型 …………（22）

1.6.1　两个事件的相互独立性 …………（22）

1.6.2　有限个事件的相互独立性 …………（23）

1.6.3　伯努利概型与二项概率公式 …………（24）

1.6.4　小概率原理 …………（26）

习题一 …………（27）

第二章　随机变量及其分布 …………（31）

2.1　随机变量及其分布函数 …………（31）

2.1.1　随机变量的概念 …………（31）

2.1.2　随机变量的分布函数 …………（33）

2.2　离散型随机变量及其概率分布 …………（36）

2.2.1　离散型随机变量及其分布律 …………（36）

2.2.2　几种常见的离散型随机变量 …………（39）

2.3 连续型随机变量及其概率分布 …… (46)
2.3.1 连续型随机变量及其概率密度 …… (46)
2.3.2 几种常见的连续型随机变量 …… (50)
2.4 随机变量的函数的分布 …… (56)
2.4.1 离散型随机变量函数的分布 …… (56)
2.4.2 连续型随机变量的函数的分布 …… (57)
习题二 …… (60)
第三章 多维随机变量及其分布 …… (65)
3.1 二维随机变量及其分布的概念 …… (65)
3.1.1 二维随机变量及其联合分布 …… (65)
3.1.2 二维随机变量的边缘分布 …… (67)
3.1.3 二维随机变量的条件分布 …… (68)
3.1.4 二维随机变量的独立性 …… (70)
3.2 二维离散型随机变量及其分布 …… (71)
3.2.1 二维离散型随机变量及其联合分布律 …… (71)
3.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布律 …… (73)
3.2.3 二维离散型随机变量的条件分布律 …… (74)
3.2.4 二维离散型随机变量的独立性 …… (75)
3.3 二维连续型随机变量及其分布 …… (76)
3.3.1 二维连续型随机变量及其概率密度 …… (76)
3.3.2 二维连续型随机变量的两个重要分布 …… (79)
3.3.3 二维连续型随机变量的边缘概率密度 …… (80)
3.3.4 二维连续型随机变量的条件概率密度 …… (82)
3.3.5 二维连续型随机变量的独立性 …… (85)
3.4 二维随机变量的函数的分布 …… (86)
3.4.1 二维离散型随机变量函数的分布 …… (87)
3.4.2 二维连续型随机变量函数的分布 …… (89)
习题三 …… (97)
第四章 随机变量的数字特征 …… (102)
4.1 数学期望 …… (102)
4.1.1 数学期望的概念 …… (102)
4.1.2 几种常见分布的数学期望 …… (106)
4.1.3 随机变量函数的数学期望 …… (108)
4.1.4 数学期望的性质 …… (111)
4.1.5* 条件数学期望 …… (112)

4.2　方差 …………………………………………………………………… (113)
4.2.1　方差的概念 ………………………………………………………… (113)
4.2.2　方差的性质 ………………………………………………………… (115)
4.2.3　几种常见分布的方差 ……………………………………………… (116)
4.2.4　切比雪夫(Chebyshey)不定式 …………………………………… (119)
4.2.5*　条件方差 ………………………………………………………… (120)
4.3　协方差(covariance)及相关系数 …………………………………… (121)
4.3.1　协方差 ……………………………………………………………… (121)
4.3.2　相关系数 …………………………………………………………… (124)
4.4　矩与协方差矩阵 ……………………………………………………… (129)
4.4.1　矩 …………………………………………………………………… (129)
4.4.2　协方差矩阵 ………………………………………………………… (130)
4.4.3*　n 维正态分布 ………………………………………………… (131)
习题四 ……………………………………………………………………… (132)
第五章　大数定律和中心极限定理 ……………………………………… (136)
5.1　大数定律 ……………………………………………………………… (136)
5.1.1　几个概念 …………………………………………………………… (136)
5.1.2　几个常用的大数定律 ……………………………………………… (137)
5.2　中心极限定理 ………………………………………………………… (140)
习题五 ……………………………………………………………………… (146)
第六章　样本及抽样分布 ………………………………………………… (150)
6.1　简单随机样本与统计量 ……………………………………………… (151)
6.1.1　总体与总体分布 …………………………………………………… (151)
6.1.2　样本与样本分布 …………………………………………………… (151)
6.1.3　统计量 ……………………………………………………………… (155)
6.2　常用统计分布 ………………………………………………………… (157)
6.2.1　分位数 ……………………………………………………………… (157)
6.2.2　χ^2 分布 …………………………………………………………… (157)
6.2.3　t 分布 ……………………………………………………………… (159)
6.2.4　F 分布 ……………………………………………………………… (160)
6.3　抽样分布 ……………………………………………………………… (161)
6.3.1　抽样分布 …………………………………………………………… (161)
6.3.2　正态总体的样本均值与样本方差的分布 ………………………… (161)
6.3.3　一般总体抽样分布的极限分布 …………………………………… (164)
习题六 ……………………………………………………………………… (165)

第七章 参数估计 …… (169)
7.1 点估计 …… (169)
7.1.1 矩估计法 …… (169)
7.1.2 极大似然估计法 …… (171)
7.1.3 估计量的评选标准 …… (173)
7.2 区间估计 …… (174)
7.2.1 区间估计的含义 …… (174)
7.2.2 区间估计的基本思想 …… (175)
7.2.3 区间估计的基本方法 …… (175)
7.2.4 单侧置信区间 …… (176)
7.3 正态总体均值与方差的区间估计 …… (178)
7.3.1 单正态总体参数的区间估计 …… (178)
7.3.2 双正态总体参数的区间估计 …… (181)
7.4 (0—1)分布参数的区间估计 …… (184)
习题七 …… (185)
第八章 假设检验 …… (189)
8.1 假设检验的基本概念 …… (189)
8.1.1 假设检验的基本思想 …… (189)
8.1.2 假设检验的两类错误 …… (190)
8.1.3 假设检验问题的一般提法 …… (190)
8.1.4 假设检验的一般步骤 …… (191)
8.2 单正态总体参数的假设检验 …… (191)
8.2.1 单正态总体均值的检验 …… (191)
8.2.2 单正态总体方差的检验 …… (194)
8.3 两正态总体参数的假设检验 …… (195)
8.3.1 两正态总体均值差的检验 …… (196)
8.3.2 两正态总体方差相等的假设检验 …… (198)
8.4 置信区间与假设检验之间的关系 …… (200)
8.5 关于一般总体数学期望的假设检验 …… (201)
8.5.1 一个总体均值的大样本假设检验 …… (201)
8.5.2 两个总体均值的大样本假设检验 …… (202)
8.6 假设检验问题的 p 值检验法 …… (203)
8.7 分布拟合检验 …… (204)
习题八 …… (207)
第九章 方差分析及回归分析 …… (212)

9.1 单因素试验的方差分析 …… (212)
9.1.1 数学模型 …… (213)
9.1.2 偏差平方和及其分解 …… (214)
9.1.3 S_E 与 S_A 的统计特性 …… (215)
9.1.4 检验方法 …… (216)
9.1.5 参数估计 …… (217)
9.2 双因素试验的方差分析 …… (218)
9.2.1 双因素等重复试验方差分析 …… (218)
9.2.2 双因素无重复试验方差分析 …… (222)
9.3 一元线性回归 …… (226)
9.3.1 一元线性回归模型 …… (226)
9.3.2 回归系数的最小二乘估计 …… (227)
9.3.3 最小二乘估计的性质 …… (230)
9.3.4 回归方程的显著性检验 …… (230)
9.3.5 预测与控制 …… (232)
9.3.6 可线性化的一元非线性回归 …… (234)
9.4 多元线性回归 …… (237)
9.4.1 多元线性回归模型 …… (237)
9.4.2 参数的估计 …… (238)
习题九 …… (240)
附表 …… (245)
习题答案 …… (256)
参考文献 …… (270)

第一章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.1.1　随机现象与随机试验

1. 随机现象

自然界及人类的社会活动中普遍存在着两类现象，即必然现象和随机现象.

1）**必然现象**

我们完全可以预知它在一定的条件下必然发生或必然不发生的现象称为**确定性现象**，也称**必然现象**(certain phenomenon).

例如：

(1) 向上抛一枚硬币，必然落下；

(2) 函数在间断点处不存在导数；

(3) 从一批全是合格品的产品中任取一件，取到的必是合格品.

这类确定性现象的特点是：其结果总是确定的.

2）**随机现象**

在一定的条件下我们无法准确预知其结果的现象，称为**非确定性现象**，也称**随机现象**(random phenomenon).

例如：

(1) 向上抛一枚硬币，落下后可能正面向上，也可能正面向下；

(2) 某运动员投篮一次，可能投中，也可能投不中；

(3) 从一装有白球和黑球的袋中任取一球，可能是白球，也可能是黑球.

这类随机现象的特点是：其结果具有不确定性.

然而，在同一随机现象大量重复出现时，人们却发现了其固有的规律性. 比如，每一种现象可能的结果出现的频率具有稳定性. 人们把这种随机现象在相同条件下大量重复出现时所表现出的某种量的规律性称之为随机现象的**统计规律性**.

例如：我们用计算机模拟掷硬币的试验，考察正面和反面出现的情况. 具体做法是：首先由计算机产生(0，1)区间内的随机数 R，若 $0<R<0.5$，则认为是正面朝上，否则认为反面朝上. 模拟掷币 10 次，100 次，1000 次，10 000 次，各做 6 遍得表 1－1. 其中 n 表示试验次数，n_A 表示正面朝上的次数，$f(A)$表示正面朝上的频率.

表 1－1　计算机模拟掷硬币出现正面的比例

序号＼次数	$n=10$		$n=100$		$n=1000$		$n=10\,000$	
	n_A	$f(A)$	n_A	$f(A)$	n_A	$f(A)$	n_A	$f(A)$
1	3	0.3	57	0.57	484	0.484	5022	0.5022
2	2	0.2	52	0.52	514	0.514	5040	0.5040
3	6	0.6	47	0.47	514	0.514	4971	0.4971
4	8	0.8	46	0.46	500	0.500	5081	0.5081
5	6	0.6	51	0.51	522	0.522	4977	0.4977
6	3	0.3	55	0.55	485	0.485	5057	0.5057

下面图 1－1 给出了投币 100 次时正面出现的比例的直观图.

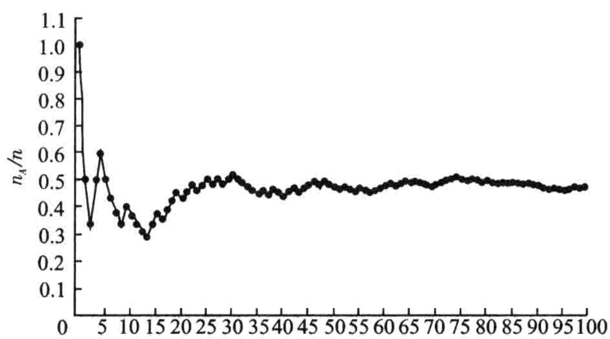


图 1－1　在 100 次投币中出现正面的比例

由此可见，随机现象具有两个特点：一是个别现象的结果表现出不确定性；二是大量重复出现的同一现象的结果却呈现出了统计规律性.

对于随机现象，人们很早就注意到它的存在了. 从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机现象在生活中的作用，只是他们没有认识到有必要去研究这些随机现象，也没有意识到不确定性可以度量. 许多数学家都曾研究过随机现象，如帕斯卡、贝努利、高斯等. 但直到 20 世纪初，人们才认识到随机现象也可以通过数量化方法来进行研究. **概率论与数理统计**就是以数量化方法来研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

帕斯卡与“业余数学家之王”费马

布莱士·帕斯卡(Blaise Pascal，1623—1662)是法国数学家、物理学家、哲学家和散文学家. 帕斯卡于 1623 年 6 月 19 日出生于法国奥弗涅地区多姆山省的克莱蒙费朗城，从小体质虚弱，三岁丧母，1662 年 8 月 19 日逝世，终年 39 岁. 他是 17 世纪最卓越的数理科学家之一，他对于近代初期的理论科学和实验科学两方面都做出了巨大的贡献.

16 世纪早期，意大利出现了卡尔达诺等数学家研究骰子中的博弈机会，在博弈的点中探求赌金的划分问题. 到了 17 世纪，帕斯卡和“业余数学家之王”费马研究了意大利的帕乔里的著作《摘要》，通过通信联系，他们建立了概率学的基础，并得出了关于概率论问题的一系列解法. 帕斯卡在短暂的一生中，作出了许多贡献，以数学及物理学中的贡献最大. 帕斯卡的数学造诣很深，除对概率论等方面有卓越贡献外，最突出的是他提出的著名的帕

斯卡定理——他在《关于圆锥曲线的论文》中提出的. 帕斯卡定理是射影几何的一个重要定理，即“圆锥曲线内接六边形其三对边的交点共线”.

皮耶·德·费马(Pierre de Fermat)是17世纪法国的一个律师，是一位业余数学家. 之所以称业余，是因为皮耶·德·费马具有律师的全职工作. 费马一生从未受过专门的数学教育，数学研究也不过是他的业余爱好，然而，在17世纪的法国还找不到哪位数学家可以与之匹敌. 他是解析几何的发明者之一；他对于微积分诞生的贡献仅次于艾萨克·牛顿、戈特弗里德·威廉·凡·莱布尼茨；他是概率论的主要创始人，也是独撑17世纪数论天地的人. 此外，费马对物理学也有重要贡献. 一代数学天才费马堪称是17世纪法国最伟大的数学家之一.

2. 随机试验

为了研究随机现象及其统计规律性，必须对随机现象进行大量重复的观察或试验. 把对随机现象所进行的观察或试验称为**随机试验**(random experiment)，简称**试验**，通常用字母 E 或 E_1，E_2，…表示. 例如：

(1) E_1：投一枚硬币3次，观察正面出现的次数.

(2) E_2：从一批产品中，依次任选三件，记录出现正品与次品的情况.

(3) E_3：记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

(4) E_4：灯泡的使用寿命.

下面给出科学家们抛掷硬币试验所得到的相关数据，见表1-2.

表1-2　历史上科学家们抛掷硬币试验的相关数据

试　验　者	投掷次数 n	正面出现的频数 n_A	正面出现的频率 f_n
蒲丰(Boffon)	4040	2048	0.5069
德·摩根(DeMorgan)	4092	2048	0.5005
费勒(Feller)	10 000	4979	0.4979
皮尔逊(Pearson)	12 000	6019	0.5016
罗曼诺夫斯基(Romanovsky)	80 640	39 699	0.4923

试验表明：虽然每次抛掷硬币前无法准确预知其结果将出现正面还是反面，但大量重复试验后，出现正面和反面的次数大致相当，即各占总试验次数的比例大致为0.5，并且随着试验次数的增加，这一比例更加稳定地趋于0.5. 这说明虽然随机现象在少数几次观察或试验中并无规律可循，具有不确定性或随机性，但通过长期观察或大量重复的试验可以发现随机试验自身所固有的规律性.

上述随机试验具有以下三个共同特征：

(1) 重复性：试验可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 明确性：所有可能结果在试验之前是明确可知的；

(3) 随机性：每次试验的结果是不确定的或随机的，但又必定是所有可能结果之中的某一个.

例如，在福利彩票的抽奖中，从标号0～35的36个乒乓球中随意抽取一个，则抽一次有36种可能结果，事先不能确定抽出哪一个，事后是明确的. 在相同条件下，重复抽7次，产生中奖号码.

又如，电话程控交换机在早上8:00～9:00接到的信号次数，每天都可在相同条件下重复观察，事先不知道有多少信号，但事后明确.

概率论与数理统计有着广泛的应用. 例如，金融、信贷、医疗、保险等行业策略的制定；流水线上产品的质量检验与质量控制；食品保质期、弹药储存分析、电器与电子产品的寿命分析等方方面面. 概率问题与我们的生活如此密切相关，正如法国数学家拉普拉斯所说："在生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率问题."

1.1.2　样本空间与随机事件

1. 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 将随机试验 E 中所有可能的结果组成的集合称为 E 的**样本空间**(sample space)，记为 Ω(或 S)，样本空间 Ω 中的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**(sample point)，记为 ω.

对于上面的4个例子来说，根据每个随机试验 $E_k(k=1, 2, 3, 4)$可能出现的结果，可得样本空间 $\Omega_k(k=1, 2, 3, 4)$分别是：

(1) $\Omega_1=\{0, 1, 2, 3\}$；

(2) $\Omega_2=\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$，其中"1"表示"出现正品"，"0"表示"出现次品"；

(3) $\Omega_3=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$；

(4) $\Omega_4=\{x\in R\,|\,0\leqslant x<+\infty\}$.

例1　试给出下列随机试验的样本空间.

(1) E_1：投一枚硬币3次，观察正面、反面出现的情况；

(2) E_2：对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上"正品"，不合格的记上"次品"，连续查出2个次品就停止检查，或检查4个产品就停止检查，记录检查的结果.

解　(1) 试验 E_1 中，设H表示"正面朝上"，用T表示"反面朝上"，则样本空间 $\Omega_1=\{(\mathrm{H\ H\ H}), (\mathrm{H\ H\ T}), (\mathrm{H\ T\ H}), (\mathrm{T\ H\ H}), (\mathrm{T\ T\ H}), (\mathrm{T\ H\ T}), (\mathrm{H\ T\ T}), (\mathrm{T\ T\ T})\}$；

(2) 试验 E_2 中，设"1"表示正品，"0"表示次品，则样本空间 $\Omega_2=\{(0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$.

注　对于同一随机试验，由于所要观察的问题不同，试验的样本点与样本空间随之改变.

2. 随机事件

在实际进行随机试验时，人们常常关心试验的结果是否具有某一种指定的可观察的特征. 在概率论中，把具有某一种可观察特征的随机试验的结果称为一个事件. 事件可以分为以下三类：

(1) **随机事件**(random event)：在随机试验中可能发生也可能不发生的事件，称为**随机事件**，简称**事件**，随机事件的集合通常用大写字母 A、B、C 等表示. 当一次试验结果出现在这个集合时，即当一次试验结果 $\omega\in A$ 时，就称这次试验中事件 A 发生；当结果 $\omega\notin A$ 时，就称 A 不发生. 特别地，由一个样本点 ω 构成的单点集$\{\omega\}$称为一个**基本事件**. 显然，

一个随机事件由若干个基本事件所组成.

例如，在抛掷一枚骰子的试验中，若 A 表示“点数小于 3”这一事件，则 A 是一个随机事件，A 包括样本点为“点数 1”和“点数 2”的两个基本事件.

(2) **必然事件**(certain event)：在每一次试验中一定发生的事件，用 Ω(或 S)表示.

(3) **不可能事件**(impossible event)：在任何一次试验中都不可能发生的事件，用 $\varnothing$ 表示.

例如：$A=\{$同性电荷相斥$\}$是必然事件 S；$B=\{$没有水分，种子会发芽$\}$是不可能事件 $\varnothing$.

注　必然事件和不可能事件实质上都是确定性现象的表现，为了便于讨论，通常把它们当作随机事件的特殊情况来看待.

1.1.3　随机事件间的关系与运算

1. 随机事件间的关系与运算

事件之间的关系及其运算类似于集合之间的关系及运算. 下面我们给出这些关系和运算在概率论中的提法、含义及其文氏图.

(1) 若 $A\subset B$，则称**事件** B **包含事件** A. 其含义是，指事件 A 出现，必然导致事件 B 发生，如图 1-2(a)所示.

特别地，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称**事件** A 与**事件** B 相等. 其含义是，事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，且事件 B 的发生也必然导致事件 A 的发生.

(2) 事件 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的**和(或并)事件**(union of events). 其含义是，当且仅当事件 A 与 B 至少有一个发生时，和事件 $A\cup B$ 发生. 和事件 $A\cup B$ 也记作 $A+B$，如图 1-2(b)所示.

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件；称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 A_1，A_2，… 的和事件. 它们也可记作 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(3) 事件 $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的**积事件**(intersection of events). 其含义是，当且仅当事件 A 与 B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生. 积事件 $A\cap B$ 也简记为 AB，如图 1-2(c)所示.

易见，若 $A\subset B$，则 $AB=A$.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…A_n 的积事件；称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 A_1，A_2，… 的积事件. 它们也可记作 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$ 和 $\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(4) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容事件**(mutually exclusive events)(或**互斥事件**). 其含义是，事件 A 与 B 不能同时发生，如图 1-2(d)所示. 显然，基本事件之间是两两互不相容的.

(5) 若事件 A 与事件 B 满足 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互为对立事件(或互为逆事件)**(complementary event). 其含义是，指每次试验中，事件 A 与事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件 $B=\overline{A}$，表示 A 不发生，如图 1-2(e)所示.

易见，若 A 与 B 互不相容，则 $A\subset\overline{B}$，$B\subset\overline{A}$.

(6) 事件 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 其含义是，当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生，如图 1-2(f)所示.

若 $B\subset A$，则称 $A-B$ 为**真差**；对任意 A 和 B，称为**一般差**.

显然，$A-B=A\overline{B}=A-AB$，易得，$A\cup B=A\cup(B-A)=A\cup B\overline{A}$.

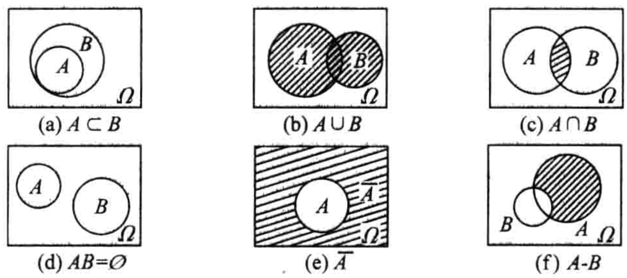


图 1-2　事件关系及运算(Venn)图

注　对立事件必然是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件. 对立事件只适用于两个事件之间，而互斥事件适用于任意多个事件之间.

例 2　从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，设事件 A_i $(i=1,2,3)$表示第 i 次取到合格品，试用 A_1、A_2、A_3 表示下列事件：

(1) 只有第一次取到合格品；

(2) 第一次取到合格品，第二次没取到合格品；

(3) 三次不都取到了合格品；

(4) 三次都不取到合格品；

(5) 三次中至少有一次取到了合格品；

(6) 三次中恰有两次取到了合格品.

解　(1) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(2) $A_1\overline{A}_2$；

(3) $\overline{A_1A_2A_3}$或$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$；

(4) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(5) $A_1\cup A_2\cup A_3$；

(6) $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$.

2. 随机事件的运算律

与集合的运算类似，事件之间的运算满足下列规则.

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) 对偶律(反演律)(德·摩根(De Morgan)律)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(5) 包含律：$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；$AB\subset A$，$AB\subset B$.

(6) 吸收律：$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$；$A\Omega=A$，$A\varnothing=\varnothing$.

(7) 幂等律(重叠律)：$A\cup A=A$，$AA=A$.

(8) 对立律：$A\overline{A}=\varnothing$；$A\cup\overline{A}=\Omega$.

(9) 自反律：$\overline{\overline{A}}=A$.

注 (1)有些运算律可推广到有限个或可列个事件的情况，比如，反演律：

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k};\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k};\ \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}$$

(2) 由分配律我们还可推出如下常用的运算：

$$A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$$

在讨论实际问题时，往往需要把某些复杂的事件表示为若干简单事件的运算，要实现这一点，除了正确理解事件的关系与运算外，还必须具体问题具体分析.

例 3 设 A、B、C 是三个事件，化简下列各式：

(1) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$；(2) $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}$.

解 (1)
$$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}=A\cup B$$

(2)
$$\begin{aligned}AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}&=((A\cup\overline{A})B)\cup((A\cup\overline{A})\overline{B})-\overline{AB}\\&=(B\cup\overline{B})-\overline{AB}=\Omega-\overline{AB}=AB\end{aligned}$$

注 在化简复杂事件的过程中，有时候需添加括号，因为事件的运算顺序为逆、交、并、差，而括号优先.

1.2 随机事件的概率

一个随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，虽然我们在试验前不能确定它到底会不会发生，但是我们希望能够度量事件出现的可能性大小. 把用来刻画事件发生可能性大小的数，称为事件发生的概率. 在概率论发展初期，概率是用频率来定义的，这种定义被称为概率的统计定义，它的优点是比较直观，但是，通过频率来求概率，需要做的试验次数多，费时、费力、费财，并且不严格，也不利于理论上的推广. 概率的另一个定义就是柯尔莫哥洛夫给出的公理化定义.

1.2.1 概率的统计定义

1. 频率的定义与性质

定义 1 在相同的条件下，重复做 n 次试验，设事件 A 出现的次数为 n_A，则称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.1}$$

为事件 A 发生的**频率**(frequency).

由定义易得，频率有如下三个性质：

(1) 非负性　对于任一事件 A，有

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1 \tag{1.2}$$

(2) 规范性

$$f_n(\Omega)=1 \tag{1.3}$$

(3) 有限可加性　若 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_n) \tag{1.4}$$

根据频率的定义，在对有些问题的分析中人们发现了，一个随机事件在大量重复试验中发生的比例所反映的统计规律性具有普遍性. 下面看几个例子.

(1) 第 1.1 节中的表 1-2，是历史上若干科学家试验结果的记录，其频率按式(1.1)计算列入表中. 从表中记录的数据可以看到，频率随着抛硬币次数 n 的变化而不同，当次数 n 较小时，频率随机波动的幅度较大，但随着 n 的增大，频率呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时，频率总是在数字 0.5 附近摆动，并逐渐稳定于 0.5.

(2) 研究婴儿出生的频率对人口统计是很重要的，历史上较早研究这个问题的是拉普拉斯(Laplace，1749—1827)，他对伦敦、彼得堡、柏林和全法国的大量人口进行研究，发现男婴的出生频率几乎完全一致，并且总在一个数附近徘徊，这个数大约是 22/43，而女婴的出生频率总是在 21/43 附近，下面给出波兰 1927—1932 年出生的婴儿总数以及其中的男婴总数，从中看到出生男婴的频率在 0.517 附近徘徊. 见表 1-3. 另一位统计学家克拉姆(1893—1985)在他的名著《统计学数学方法》中引用了瑞典 1935 年的官方统计资料，该资料表明，出生男婴的频率稳定在 0.518 左右.

表 1-3　波兰 1927—1932 年出生婴儿性别统计

年份	1927	1928	1929	1930	1931	1932	共计或平均
出生数	958 733	990 993	994 101	1 022 811	964 573	934 663	5 865 874
男婴数	496 544	513 654	514 765	528 072	496 986	482 431	3 032 452
频率	0.518	0.518	0.518	0.516	0.515	0.516	0.517

(3) 英文字母使用的频率也是相当稳定的，表 1-4 即为一份英文字母使用频率的统计表.

表 1-4　一份英文字母使用频率的统计表

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.1268	L	0.0394	P	0.0186
T	0.0978	D	0.0389	B	0.0156
A	0.0788	U	0.0280	V	0.0102
O	0.0776	C	0.0268	K	0.0060
I	0.0707	F	0.0256	X	0.0016
N	0.0706	M	0.0244	J	0.0010
S	0.0634	W	0.0214	Q	0.0009
R	0.0594	Y	0.0202	Z	0.0006
H	0.0573	G	0.0187		

类似的例子还有很多，从这些例子可以看出，当试验次数 n 充分大时，随着 n 的增大，事件 A 出现的频率总是围绕在某一个常数 $P(A)$ 附近，这种性质我们称为频率的稳定性，而称常数 $P(A)$ 为稳定值(或稳定中心). 频率 $f_n(A)$ 稳定值的大小反映了事件 A 发生的可能性大小. 频率的稳定性，说明随机事件发生的可能性大小是由事件本身决定的，虽然它是近似值，但它是可以度量的客观属性，通常称这个可以度量的稳定值为随机事件的概